Traducere de TITUS LUPESCU

С. Г. Михлин

Линейные уравнения
в частных производных

Изд. Высшая школа, Москва, 1977

S. G. MIHLIN

Ecuații liniare cu derivate parțiale

Editura științifică și enciclopedică
București, 1983

Coperta de CONSTANTIN GHEORGHIU—ENESCU

CUVÎNT ÎNAINTE

Cartea a fost scrisă pe baza cursului ţinut de autor, pe parcursul mai multor ani studenţilor de la Facultatea de matematică a Universităţii din Leningrad; prin conţinut cartea este însă oarecum mai dezvoltată decît cursul.

Ideea de bază a autorului, care a determinat conţinutul şi structura cărţii, constă în faptul că un curs universitar de ecuaţii cu derivate parţiale, pe de o parte trebuie să fie strîns legat de ecuaţiile şi problemele clasice ale fizicii matematice iar pe de alta, într-un asemenea curs trebuie larg utilizate ideile şi metodele analizei funcţionale. În vederea realizării acestui dublu deziderat expunerea se face pentru ecuaţii cu un număr arbitrar de variabile independente şi se acordă o mare atenţie studiului operatorilor generaţi de probleme specifice teoriei ecuaţiilor cu derivate parţiale. În acelaşi timp obiectul principal al studiului îl constituie cele trei tipuri clasice de ecuaţii ale fizicii matematice; ecuaţii de tip eliptic, parabolic şi hiperbolic; totodată se acordă o atenţie deosebită celor mai semnificative ecuaţii din tipurile amintite: ecuaţia lui Laplace, ecuaţia de propagare a căldurii şi ecuaţia de propagare a undelor.

Cartea se compune din introducere, 24 capitole şi o scurtă bibliografie cuprinzînd lucrări din domeniul ecuaţiilor cu derivate parţiale şi probleme apropiate de analiză. În introducere se formulează obiectivele cărţii şi se dau unele indicaţii privind noţiunile şi notaţiile utilizate în carte.

Materialul de bază al cărţii se împarte în esenţă în patru părţi. Prima parte (capitolele 1—7) conţine date suplimentare necesare de analiză; partea a doua (capitolele 8—10) se ocupă de teoria generală a ecuaţiilor cu derivate parţiale. Partea a treia (capitolele 11—19) este consacrată ecuaţiilor eliptice; partea a patra (capitolele 20—24) — ecuaţiilor nestaţionare: ecuaţia de propagare a căldurii şi ecuaţia de propagare a undelor. Din această enumerare se vede că autorul se îndepărtează de la tradiţia conform căreia se obişnuieşte să se înceapă cu ecuaţiile hiperbolice. Aceasta se explică prin faptul că ecuaţiile parabolice şi hiperbolice pot fi considerate, cel puţin local, ca ecuaţii diferenţiale ordinare abstracte, care conţin funcţia necu-

noscută și sub semnul operatorului eliptic. După opinia autorului de aici rezultă că este indicat să se înceapă cu studierea ecuațiilor diferențiale eliptice și a operatorilor eliptici.

După cît se pare, anumite probleme sînt incluse pentru prima dată în acest curs universitar de ecuații cu derivate parțiale. Printre acestea se numără elemente de teoria ecuațiilor în spații Banach, elemente de teoria integralelor singulare și a ecuațiilor integrale singulare, legătura între soluțiile slabe și soluțiile tari ale ecuațiilor eliptice și altele. Volumul strict limitat al cărții l-a obligat pe autor să renunțe la prezentarea unor probleme care i s-ar fi părut importante.

În cursul elaborării cărții de față autorul a folosit parțial cartea sa anterioară *Curs de fizică matematică* (Nauka, Moscova, 1968).

Leningrad
august, 1976

S. MIHLIN

INTRODUCERE

§1. OBIECTUL CURSULUI

Teoria ecuațiilor cu derivate parțiale s-a dezvoltat timp îndelungat în principal în direcția studierii ecuațiilor și problemelor fizicii matematice, care de fapt reprezintă o parte a teoriei amintite. Deși în ultimele decenii s-au obținut mari succese în studierea ecuațiilor generale cu derivate parțiale, fizica matematică ocupă și va ocupa probabil încă multă vreme un loc deosebit de important în această disciplină. Însăși denumirea de „fizică matematică" este legată de faptul că această parte a teoriei ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale a apărut din studierea cîtorva probleme simple, dar importante, ale fizicii. Să amintim cîteva dintre ele.

1. *Problema coardei vibrante.* Să presupunem că poziția inițială a coardei coincide cu axa Ox și că oscilațiile ei se produc în planul vertical. Să admitem că dintr-o cauză sau alta coarda este scoasă din starea de echilibru. O astfel de cauză poate fi, de exemplu, lovirea coardei. Prin aceasta coarda își schimbă forma; fiecare punct al coardei suferă o anumită deplasare. Pentru simplificare, să admitem că deplasarea este perpendiculară pe axa Ox și se produce tot timpul în planul (x, u), unde u indică deviația coardei de la poziția de echilibru. Evident, u este funcție de două variabile $u = u(x, t)$. Dacă admitem o coardă omogenă cu grosimea constantă și că, în momentul care urmează după cel inițial, asupra coardei nu acționează nici un fel de forțe exterioare, precum și, în sfîrșit, că această coardă este inextensibilă, dar perfect flexibilă, atunci se poate demonstra că funcția u satisface ecuația liniară cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1}$$

unde a este o mărime constantă care depinde de proprietățile fizice ale coardei.

Ecuația (1), deși aproximativă, este valabilă în cazul așa-numitelor vibrații mici ale coardei. Această ecuație se numește *ecuația undelor* cu două variabile independente sau *ecuația coardei vibrante.*

Probleme mai complexe ale fizicii conduc la ecuații cu derivate parțiale similare cu ecuația (1), dar mai complicate. Astfel, vibrațiile

transversale ale unei membrane subțiri, care în poziția de echilibru se află în planul (x, y), sînt descrise de ecuația cu derivate parțiale de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a=\text{const.} \tag{2}$$

Ecuația (2) se numește *ecuația vibrației membranelor* sau *ecuația undelor cu trei variabile independente*. Ca și ecuația coardei vibrante, ea descrie suficient de precis numai micile oscilații ale membranei.

Ecuația undelor cu patru variabile independente are forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{3}$$

Această ecuație definește, de exemplu, cîmpul vitezelor unui gaz oscilant, dacă aceste viteze sînt mici și derivă dintr-un potențial, adică dacă există o funcție u, astfel încît $\mathbf{v} = \text{grad}\, u$, unde $\mathbf{v}$ este vectorul viteză al particulei de gaz.

2. *Problema cîmpului nestaționar de temperatură.* Dacă presupunem că se supune încălzirii o porțiune a suprafeței unui corp omogen, atunci în acest corp apare un cîmp de temperatură; temperatura, evident, se schimbă de la un punct la altul al corpului și de la un moment de timp la altul. Notînd temperatura cu u, se observă că u este funcție de variabilele independente x, y, z, t: $u = u(x, y, z, t)$. Se poate demonstra că această funcție satisface ecuația cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=k\frac{\partial u}{\partial t}, \quad k=\text{const.} \tag{4}$$

Remarcăm că de obicei expresia $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ se numește *operatorul lui Laplace* pentru funcția u și se notează cu simbolul Δ:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Ecuația (4) se poate scrie deci sub forma $\Delta u = k\dfrac{\partial u}{\partial t}$. Ecuația (4) se numește *ecuația propagării căldurii*; ea este o ecuație liniară

cu derivate parțiale de ordinul al doilea. Această ecuație era cunoscută încă de Euler, dar adesea este legată de numele lui Fourier.

3. *Problema cîmpului de temperatură staționară.* Să presupunem că cîmpul de temperatură u este constant în timp. Atunci u este doar funcție de coordonatele spațiale,

$$u = u(x, y, z).$$

Ecuația (4) devine:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{5}$$

sau

$$\Delta u = 0. \tag{5'}$$

Ecuația (5) (sau (5')) se numește *ecuația lui Laplace*; este o ecuație liniară cu derivate parțiale de ordinul al doilea.

În exemplele prezentate am fost conduși de fiecare dată la o ecuație liniară cu derivate parțiale de ordinul al doilea. Acest tip de ecuații se întîlnește frecvent în aplicațiile fizicii matematice.

Ecuațiile examinate — ecuația undelor, ecuația propagării căldurii și ecuația lui Laplace — corespund unor probleme distincte ale fizicii, dar ele sînt distincte și din punct de vedere matematic. Ele reprezintă trei tipuri importante de ecuații cu derivate parțiale: hiperbolic, parabolic și eliptic.

Pentru aplicațiile fizicii prezintă interes și multe ecuații liniare de ordin superior. Unele probleme din geometrie și fizică conduc atît la ecuații neliniare cu derivate parțiale, cît și la sisteme de ecuații diferențiale. Astfel, sînt bine cunoscute sistemele de ecuații diferențiale din teoria elasticității, hidrodinamicii și electrodinamicii. În capitolul 8 vom prezenta pe scurt și alte tipuri de ecuații cu derivate parțiale.

În exemplele (1)—(5), prezentate mai sus, numărul variabilelor independente, în concordanță cu sensul fizic al problemelor, este cel mult egal cu patru; în cele ce vor urma vom studia ecuații cu derivate parțiale cu un număr arbitrar de variabile independente.

Să mai dăm cîteva exemple de ecuații și sisteme de ecuații cu derivate parțiale.

1) Ecuația biarmonică

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = f(x). \tag{6}$$

Pentru unele aplicații (de exemplu, în teoria elasticității) un rol deosebit de important îl are ecuația biarmonică cu două variabile independente. Această ecuație are următoarea formă explicită

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x, y).$$

Un rol important îl joacă în aplicații ecuația **poliarmonică**

$$\Delta^n u = \underbrace{\Delta\Delta \ldots \Delta}_{n \text{ ori}} u = 0. \tag{7}$$

2) Oscilațiile unui corp elastic tridimensional, omogen și izotrop sînt descrise de *ecuația vectorială din teoria elasticității dinamice*

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{f}(x, t), \tag{8}$$

unde **u** este vectorul deplasărilor elastice, **f** — vectorul forțelor de volum, ρ — densitatea mediului elastic, λ și μ — constantele lui Lamè. Dacă se notează cu u_j, respectiv f_j, $j = 1, 2, 3$, componentele vectorilor **u** și **f**, iar cu x_1, x_2, x_3 — coordonatele carteziene ale punctului x, atunci ecuația vectorială (8) se poate scrie ca un *sistem de trei ecuații scalare*

$$\rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = \mu \Delta u_j + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + f_j(x, t), \qquad j = 1, 2, 3,$$

unde s-a introdus notația

$$\theta = \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}.$$

Dacă **u** nu depinde de t, se obține *ecuația vectorială* din teoria elasticității statice

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{f}(x) = 0, \tag{9}$$

echivalentă cu sistemul de *trei ecuații scalare*

$$\mu \Delta u_j + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + f_j(x) = 0, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Toate ecuațiile și sistemele scrise mai sus sînt liniare. Vom da acum exemple de ecuații și sisteme neliniare.

3) *Ecuația suprafeței minime*

$$\left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{10}$$

unde u este cota punctului de pe suprafață de abscisă x și ordonată y.

Ecuația neliniară (10) este liniară în raport cu derivatele sale de ordin superior. Astfel de ecuații se numesc *cvasiliniare*.

4) *Ecuațiile lui Navier-Stokes*

$$\begin{gathered} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{v} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \mathbf{f}(x, t), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \end{gathered} \tag{11}$$

descriu mișcarea unui lichid sau gaz. Aici **v** este vectorul viteză al particulei de lichid care la momentul t se găsește în punctul $x(x_1, x_2, x_3)$; v_1, v_2, v_3 — componentele vectorului **v**; p — presiunea; ρ — densitatea lichidului; ν — coeficientul de vîscozitate; **f** — vectorul forțelor masice care acționează asupra mediului. Ecuațiile lui Navier-Stokes sînt cvasiliniare.

5) *Ecuațiile problemei plane pentru medii perfect plastice*

$$\begin{gathered} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0, \\ (\sigma_{yy} - \sigma_{xx})^2 + 4\sigma_{xy}^2 = 4K^2, \end{gathered} \tag{12}$$

unde σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yy} sînt componentele tensorului tensiunilor, iar K — o constantă.

Dacă se introduc noi funcții necunoscute conform formulelor

$$\sigma_{xx} = K(\sigma - \cos\varphi), \quad \sigma_{yy} = K(\sigma + \cos\varphi), \quad \sigma_{xy} = K \sin\varphi,$$

atunci sistemul (12) conduce la un sistem cvasiliniar de două ecuații. A treia ecuație din (12) este satisfăcută identic, iar primele două se

reduc la următoarele :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \tag{13}$$

6) Drept exemplu de ecuație neliniară care nu este cvasiliniară servește *ecuația lui Monge-Ampère*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} \right)^2 = f(x, y), \tag{14}$$

care joacă un rol important în multe probleme de geometrie.

§ 2. DEFINIȚII ȘI NOTAȚII

Spațiul euclidian m-dimensional se notează cu simbolul E_m. Dacă un punct al acestui spațiu este notat, de exemplu, cu litera x, atunci coordonatele carteziene ale acestui punct se notează cu x_1, $x_2, \ldots, x_m$. Adesea sîntem conduși să integrăm pe mulțimi de diverse dimensiuni, scufundate în spațiul E_m ; de cele mai multe ori sîntem conduși să integrăm *pe domenii* sau *pe suprafețe* ($m-1$)*-dimensionale*. Independent de dimensiunea domeniului, o astfel de integrare va fi notată utilizînd un singur semn de integrală. Dacă variabila de integrare este notată, de exemplu, cu litera x, atunci *elementul de volum* (*Lebesgue*) în spațiul E_m se va nota cu dx. *Elementul de suprafață* (*arie*) se va nota cu dS, $d\Gamma, \ldots$, dacă suprafața însăși a fost notată cu S, $\Gamma, \ldots$. Dacă M este o mulțime de puncte ale spațiului E_m, atunci vom nota cu $\overline{M}$ *închiderea acestei mulțimi*. În particular, dacă Ω este un domeniu arbitrar din spațiul E_m, iar Γ frontiera sa, atunci $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$.

Vor fi folosite frecvent următoarele notații : dacă *domeniul* este notat cu Ω, atunci *volumul* acestui *domeniu* va fi notat cu $|\Omega|$. În mod analog $|\Gamma|$ va însemna *aria suprafeței* Γ.

Sfera de rază R *din spațiul* E_m va fi notată cu S_R.

Frontiera mulțimii G o vom nota adesea cu ∂G. Astfel, dacă Ω este un domeniu, atunci domeniul închis $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Pe tot parcursul acestei cărți vor fi considerate numai domenii cu frontiere netede pe porțiuni (fără a se mai specifica acest lucru). Se numește *distanță de la punctul* $x \in E_m$ *la mulțimea* $G \subset E_m$ limita inferioară $\rho(x, G)$ a distanțelor dintre x și punctele mulțimii G.

Se numește *bandă frontieră* a domeniului Ω mulțimea punctelor acestui domeniu a căror distanță pînă la frontiera $\partial\Omega$ nu depășește o constantă δ dată, denumită *lărgimea benzii*. O bandă frontieră a domeniului Ω, avînd lățimea δ, o vom nota cu Ω_δ. Peste tot se presupune că *domeniul* Ω *are proprietatea* $\lim_{\delta \to 0} |\Omega_\delta| = 0$.

Dacă Ω și Ω' sînt domenii, astfel încît $\Omega' \subset \Omega$, atunci Ω' se numește *subdomeniu* al lui Ω. Subdomeniul Ω' se numește *interior* dacă $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Evident, $\Omega \setminus \overline{\Omega'_\delta}$ este un subdomeniu interior al lui Ω ; pe de altă parte, pentru fiecare subdomeniu interior Ω' se poate găsi un δ astfel încît $\Omega' \subset \Omega \setminus \overline{\Omega_\delta}$.

Dacă Ω este un domeniu iar $K \subset \Omega$ este o mulțime închisă mărginită, atunci K se numește *compact* în raport cu Ω. Orice subdomeniu interior închis și mărginit este compact.

Fie G o mulțime în spațiul E_m. Mulțimea funcțiilor continue și mărginite în G o vom nota cu $C(G)$; mulțimea funcțiilor care au în G toate derivatele parțiale pînă la ordinul k inclusiv și în plus aceste derivate sînt continue și mărginite în G, o vom nota cu $C^{(k)}(G)$. De cele mai multe ori ne vom întîlni cu cazul $G = \overline{\Omega}$, unde Ω este un domeniu mărginit ; în acest caz mențiunea despre mărginirea funcției sau a derivatelor nu este necesară.

Prin $C_0^{(k)}(\Omega)$, unde Ω este un domeniu mărginit, vom nota mulțimea funcțiilor de k ori continuu diferențiabile în Ω și care se anulează pe $\partial\Omega$ împreună cu toate derivatele pînă la ordinul $k-1$ inclusiv.

Fie Ω un domeniu oarecare și k un număr întreg, $0 \leqslant k \leqslant \infty$. Vom nota prin $\mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$ mulțimea funcțiilor care sînt de k ori continuu diferențiabile și care se anulează într-o bandă frontieră (alta pentru fiecare funcție) a domeniului Ω ; dacă Ω este un domeniu nemărginit, atunci vom cere în plus ca funcțiile din $\mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$ să se anuleze în exteriorul unei anumite sfere, de asemenea alta pentru fiecare funcție. Evident,

$$\mathfrak{M}^{(k)}\Omega \subset \mathfrak{M}^{(k-1)}\Omega.$$

Funcțiile de clasă $\mathfrak{M}^{(\infty)}(\Omega)$ se numesc *finite* în Ω.

Vom spune că o funcție $u(x)$, definită pe mulțimea G, *satisface condiția lui Lipschitz* cu exponentul λ (notăm $u \in \mathrm{Lip}_\lambda(G)$), dacă pentru orice x, $x' \in G$ este adevărată inegalitatea

$$|u(x') - u(x)| \leqslant A |x' - x|^\lambda,$$

unde A și λ sînt constante pozitive. Se observă ușor că dacă $\lambda > 1$, atunci $u(x) \equiv \mathrm{const}$, de aceea se consideră de obicei $0 < \lambda \leqslant 1$. Condiția lui Lipschitz cu exponentul $\lambda < 1$ se numește adesea *condiția lui Hölder*.

O funcție definită aproape peste tot într-un domeniu Ω, se numește *local integrabilă* în Ω, dacă este integrabilă pe orice compact conținut în Ω. Mulțimea acestor funcții se notează cu $L_{1\text{loc}}(\Omega)$. Vom spune că $v_n \to v_0$ în $L_{1\text{loc}}$, dacă v_n, $v_0 \in L_{1\text{loc}}(\Omega)$ și dacă pentru orice subdomeniu interior $\Omega' \subset \Omega$ este adevărată relația

$$\| v_n - v_0 \|_{L_1(\Omega')} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Fie $u(x)$ o funcție continuă. Închiderea mulțimii punctelor în care această funcție este diferită de zero se numește *suportul* ei și se notează cu *supp u*. Evident, suportul derivatei oricărei funcții este conținut în suportul funcției.

În tot ce urmează vom identifica, dacă nu se stipulează contrariu, funcțiile echivalente (funcții care diferă cel mult pe o mulțime de măsură nulă).

Fie Γ o suprafață în spațiul E_m care are normală în fiecare punct al său. Fie $x_0 \in \Gamma$. Un sistem de coordonate carteziene $y_1, y_2, \ldots, y_m$, a cărui origine coincide cu x_0, iar axa y_m este orientată după normala la Γ ce trece prin x_0, se numește *sistem local de coordonate* asociat punctului x_0. Vom scrie $\Gamma \in C^{(k)}$, unde k este un număr natural, dacă există un număr $d = \text{const} > 0$, cu următoarele proprietăți: sfera cu raza d și centrul în punctul $x_0 \in \Gamma$ delimitează din suprafața Γ o porțiune care în sistemul local de coordonate asociat lui x_0 poate fi descrisă de ecuația $y_m = f(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1})$, unde funcția f are toate derivatele continue până la ordinul k inclusiv. Dacă derivata de ordinul k a lui f satisface condiția lui Lipschitz cu exponentul λ, $0 < \lambda \leqslant 1$, și atît exponentul, cît și constanta lui Lipschitz nu depinde de x_0, vom scrie $\Gamma \in C^{(k,\lambda)}$. Suprafețele de clasă $C^{(1,\lambda)}$ se numesc *suprafețe Liapunov*.

Dacă A este un operator, atunci domeniul său de definiție se va nota cu $D(A)$, iar domeniul valorilor prin $R(A)$. Dacă $M \subset D(A)$, vom nota prin AM imaginea mulțimii M prin aplicarea operatorului A. În particular, $R(A) = AD(A)$.

Un șir ordonat de m numere întregi nenegative

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$$

se numește *multiindice de ordinul* m; numărul

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$$

se numește *lungimea multiindicelui*. Pentru multiindici se definesc adunarea și înmulțirea cu un număr întreg nenegativ; dacă n este un astfel de număr, iar

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \quad \text{și} \quad \beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$$

sînt multiindici de același ordin, atunci

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \ \alpha_2 + \beta_2, \ \ldots, \ \alpha_m + \beta_m),$$

$$n\alpha = (n\alpha_1, n\alpha_2, \ldots, n\alpha_m).$$

Dacă $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ este un vector, atunci se scrie $\mathbf{X}^\alpha = X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \ldots X_m^{\alpha_m}$. În particular, dacă x este un punct din spațiul E_m, atunci $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m}$.

De asemenea se scrie $\alpha! = \alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_m!$ Vom folosi adesea și notația

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}.$$

Pentru a sublinia că diferențierea se face după coordonatele punctului x, vom scrie uneori $D_x^\alpha u$.

În lucrare am adoptat numerotarea consecutivă a capitolelor, numerotarea paragrafelor fiind însă proprie fiecărui capitol. În cazul trimiterilor la formulele din cuprinsul aceluiași paragraf se indică numai numărul formulei. Pentru trimiteri la formule din alte paragrafe ale aceluiași capitol se trece în paranteze mai întîi numărul paragrafului, iar apoi cel al formulei. Referirile la formule din alt capitol se fac scriind în paranteze numărul paragrafului și cel al formulei, iar în afara parantezei numărul capitolului.

La sfîrșitul volumului s-a anexat o scurtă bibliografie cu principalele manuale și monografii (mai rar articole din reviste), care se referă la subiectul tratat în lucrare. Uneori se întîlnesc în text trimiteri la această bibliografie. În astfel de cazuri s-a trecut în paranteze drepte numărul de ordine al publicației menționate.

Capitolul 1

INTEGRALE CARE DEPIND DE UN PARAMETRU

§1. INTEGRALE UNIFORM CONVERGENTE

Fie $D \subset E_m$ și $G \subset E_n$ două mulțimi mărginite măsurabile. Vom spune că integrala

$$\int_G f(x, y)\mathrm{d}y, \quad x \in D, \tag{1}$$

este *uniform convergentă* în D, dacă sînt îndeplinite următoarele condiții:

a) pentru orice x fixat în D, funcția $f(x, y)$ este integrabilă în raport cu y în G;

b) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, astfel încît oricare ar fi $g \subset G$ cu măsura Lebesgue $\mu g < \delta$,

$$\left|\int_g f(x, y)\mathrm{d}y\right| < \varepsilon.$$

Teorema 1.1.1. *Fie integrala* (1) *uniform convergentă în* D. *Presupunem că funcția de sub integrală satisface următoarea condiție suplimentară: pentru orice* $\eta > 0$ *și orice* $x_0 \in D$ *există o mulțime* $g(x_0, \eta) \subset G$ *cu* $\mu g(x_0, \eta) < \eta$, *astfel încît funcția de sub integrală este continuă în* x_0*) *uniform cu* $y \in G \setminus g(x_0, \eta)$. *Atunci funcția* $x \in D$, $x \xrightarrow{u} \int_G f(x, y)\mathrm{d}y$ *este continuă în* D.

Demonstrație. Fie $x_0 \in D$. Să arătăm că funcția

$$\forall\, x \in D, \quad x \xrightarrow{u} \int_G f(x, y)\mathrm{d}y$$

*) Altfel spus, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon, x_0)$, astfel încît oricare ar fi $x \in D$ cu $|x - x_0| < \delta$,

$$|f(x, y) - f(x_0, y)| < \varepsilon, \quad \forall\, y \in G \setminus g(x_0, \eta). \ (N.T.).$$

este continuă în x_0. Fie $\varepsilon > 0$. Integrala (1) fiind uniform convergentă n D, există $\eta > 0$ astfel încît

$$\left| \int_{g(x_0,\eta)} f(x, y)\mathrm{d}y \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fie $\eta > 0$ fixat pentru care are loc inegalitatea de mai sus. Avem

$$u(x) - u(x_0) = \int_{G \setminus g(x_0,\eta)} [f(x, y) - f(x_0, y)]\mathrm{d}y + \int_{g(x_0,\eta)} [f(x, y) - f(x_0, y)]\mathrm{d}y. \quad (2)$$

Funcția de sub integrală fiind continuă în x_0 uniform cu $y \in G \setminus g(x_0, \eta)$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît, pentru orice $x \in D$ cu $|x - x_0| < \delta$, avem

$$|f(x, y) - f(x_0, y)| < \frac{\varepsilon}{3\mu G}, \quad y \in G \setminus g(x_0, \eta),$$

de unde $|u(x) - u(x_0)| < \varepsilon$.

Teorema 1.1.2. *Fie*

$$U(x) = \int_G F(x, y)\mathrm{d}y, \quad x \in D, \quad (3)$$

unde D este un domeniu finit închis în E_m, G este o mulțime mărginită măsurabilă în E_n și pentru orice $x \in D$ funcția $y \in G$, $y \to F(x, y)$ este integrabilă în G.

Presupunem că

i) *există* $f(x, y) = \dfrac{\partial F}{\partial x_j}$ (x, y), $1 \leqslant j \leqslant m$, *pentru orice* $x \in D$ *și pentru orice* $y \in G$, *cu excepția cel mult a unei mulțimi de măsură nulă în G.*

ii) *pentru h suficient de mic este adevărată formula lui Newton-Leibniz*

$$F(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_m, y) - F(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_m, y) = \int_0^h f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, \ldots, x_m, y)\mathrm{d}t. \quad (4)$$

iii) *derivata* $\dfrac{\partial F}{\partial x_j}$ *este integrabilă în* $D \times G$. *Atunci* $\dfrac{\partial U}{\partial x_j}$ *există aproape peste tot în D și este adevărată formula* (de derivare sub semnul integrală)

$$\frac{\partial U}{\partial x_j} = \int_G \frac{\partial F(x, y)}{\partial x_j}\,\mathrm{d}y. \quad (5)$$

Demonstrație. Notăm

$$x^t = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, \ldots, x_m),$$

$$x = (x^\circ = x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_m).$$

Din (4) rezultă

$$\frac{U(x^h) - U(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_G \left\{ \int_0^h f(x^t, y)\mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}y.$$

În virtutea ipotezelor teoremei $f(x, y)$ este integrabilă în $D \times G$. Conform teoremei lui Fubini această funcție este integrabilă pe mulțimea $[x, x^h] \times G$ pentru orice $x \in D$, cu excepția cel mult a unei mulțimi de măsură nulă în D. Pentru x cu această proprietate, după aceeași teoremă a lui Fubini, se poate schimba ordinea de integrare :

$$\frac{U(x^h) - U(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h \left\{ \int_G f(x^t, y)\mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}t.$$

Conform teoremei lui Lebesgue, partea dreaptă a ultimei egalități are limită cînd $h \to 0$ oricare ar fi $x \in D$, cu excepția cel mult a unei mulțimi de măsură nulă în D și această limită este egală cu

$$\int_G f(x, y)\mathrm{d}y. \quad (*)$$

Observație. Dacă în $x_0 \in D$ funcția $x \to \int_G f(x, y)\mathrm{d}y$ este continuă, atunci

$\dfrac{\partial U}{\partial x_j}$ (x_0) există și poate fi calculată după formula (5). În particular, dacă f satisface condițiile teoremei 1.1.1, atunci $\partial U / \partial x_j$ există și este continuă în orice punct din D și poate fi calculată conform formulei (5).

Să considerăm un caz particular. Fie

$$w(x) = \int_G u(y)\omega(x, y)\mathrm{d}y, \quad (6)$$

unde u este integrabilă în G și pentru orice multiindice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ cu $\alpha = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = l$, derivatele $D^\alpha\omega/\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}$ sînt continue în $D \times G$. În aceste condiții este adevărată următoarea teoremă.

Teorema 1.1.3. *Funcția w definită de formula* (6) *este de l ori continuu diferențiabilă în D.*

Integrala (6) și, chiar mai mult, orice integrală de tipul

$$\int_G u(y) D_x^\alpha \omega(x, y)\mathrm{d}y, \quad |\alpha| \leqslant l \tag{7}$$

este evident uniform convergentă. Mulțimea $g(x_0, \eta)$ care intervine în teorema 1.1.1 poate fi aleasă independent de x_0 : este suficient să se considere mulțimea $g(\eta)$ astfel încît $\mu g(\eta) < \eta$, funcția $u(y)$ să fie continuă în $G \setminus g(\eta)$ și apoi să se pună $g(x_0, \eta) = g(\eta)$. Conform teoremei 1.1.1 funcțiile definite de integralele (6) și (7) sînt continue în D. Punînd $F(x, y) = u(y)\omega(x, y)$ se observă că toate condițiile teoremei 1.1.2 sînt îndeplinite și prin urmare funcția $w(x)$ are derivatele de ordinul întîi $\partial w/\partial x_j$ continue în D și

$$\frac{\partial w}{\partial x_j} = \int_G u(y) \frac{\partial w(x, y)}{\partial x_j} \, \mathrm{d}y, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

În mod analog, pentru orice multiindice α cu $|\alpha| \leqslant l$, derivatele $D^\alpha w(x)$ există și sînt continue în D. În plus,

$$D^\alpha w(x) = \int_G u(y) \, D_x^\alpha \omega(x, y)\mathrm{d}y. \tag{8}$$

§2. COORDONATE SFERICE

Fie x fixat și y un punct variabil în E_m. Coordonatele sferice cu centrul în punctul x se definesc prin formulele :

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1 + r\cos\vartheta_1, \\
y_2 &= x_2 + r\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_{m-1} &= x_{m-1} + r\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{m-2}\cos\vartheta_{m-1}, \\
y_m &= x_m + r\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{m-2}\sin\vartheta_{m-1}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Evident, $r = |y - x|$; unghiurile $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{m-2}$ variază în intervalul $[0, \pi]$, iar unghiul ϑ_{m-1} — în intervalul $[0, 2\pi]$.

Să găsim expresiile elementului de volum $\mathrm{d}y$ și a elementului de suprafață $\mathrm{d}S_r$ al sferei de rază r în coordonate sferice. Aceasta se poate face destul de simplu în modul următor.

Calculăm jacobianul

$$J_m = \frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)}{D(r, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{m-1})} =$$

$$= \begin{vmatrix}
\cos\vartheta_1 & -r\sin\vartheta_1 & 0 & \ldots & 0 \\
\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 & r\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 & -r\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\Phi\cos\vartheta_{m-1} & r\Phi\operatorname{ctg}\vartheta_1\cos\vartheta_{m-1} & r\Phi\operatorname{ctg}\vartheta_2\cos\vartheta_{m-1} & \ldots & -r\Phi\sin\vartheta_{m-1} \\
\Phi\sin\vartheta_{m-1} & r\Phi\operatorname{ctg}\vartheta_1\sin\vartheta_{m-1} & r\Phi\operatorname{ctg}\vartheta_2\sin\vartheta_{m-1} & \ldots & r\Phi\cos\vartheta_{m-1}
\end{vmatrix}, \tag{2}$$

unde în ultimele două linii ale determinantului s-a notat

$$\Phi = \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{m-2}.$$

Se arată ușor că $\partial J_m/\partial\vartheta_{m-1} = 0$ și pentru calculul determinantului J_m se poate pune $\vartheta_{m-1} = 0$. Aceasta conduce la formula de recurență $J_m = r\sin\vartheta_1 \ldots \sin\vartheta_{m-2} J_{m-1}$. Înlocuind succesiv m cu $m-1$, $m-2$, ..., obținem :

$$J_m = r^{m-1}\sin^{m-2}\vartheta_1 \sin^{m-3}\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{m-2}. \tag{3}$$

Acum putem scrie elementul de volum în coordonate sferice :

$$\mathrm{d}y = r^{m-1}\sin^{m-2}\vartheta_1 \sin^{m-3}\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{m-2}\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\vartheta_1 \ldots \mathrm{d}\vartheta_{m-1}. \tag{4}$$

Să deducem formula pentru elementul de suprafață pe sfera S_r de rază r și cu centrul în centrul sistemului de coordonate sferice. După cum se știe din geometria diferențială, pentru orice suprafață Γ, $\mathrm{d}\Gamma = \dfrac{\mathrm{d}y_1\, \mathrm{d}y_2 \ldots \mathrm{d}y_{m-1}}{|\cos(\nu, y_m)|}$, unde ν este normala la Γ. Pentru sfera S_r avem

$$|\cos(\nu, y_m)| = |\cos(r, y_m)| = \frac{|y_m - x_m|}{r} = \left| \prod_{k=1}^{m-1} \sin\vartheta_k \right|.$$

Pe această sferă coordonata r este constantă, deci

$$\mathrm{d}y_1\, \mathrm{d}y_2, \ldots \mathrm{d}y_{m-1} = \left| \frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1})}{D(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{m-1})} \right| \mathrm{d}\vartheta_1 \mathrm{d}\vartheta_2 \ldots \mathrm{d}\vartheta_{m-1}.$$

Jacobianul din ultima formulă se poate obține eliminînd în determinantul (2) prima coloană și ultima linie. În determinantul astfel obținut toate elementele din dreapta diagonalei principale sînt egale cu zero și acest determinant este egal cu produsul elementelor de pe diagonală. De aici rezultă ușor relația căutată

$$dS_r = r^{m-1} \sin^{m-2} \vartheta_1 \sin^{m-3} \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{m-1} d\vartheta_1 d\vartheta_2 \dots d\vartheta_{m-1}. \tag{5}$$

Din formulele (4) și (5) se deduc relațiile

$$|dS_r = r^{m-1} dS_1 \tag{6}$$

și

$$dy = dr\, dS_r = r^{m-1} dr\, dS_1. \tag{7}$$

Integrînd relația (6) obținem încă o formulă frecvent utilizată

$$|S_r| = r^{m-1} |S_1|, \tag{8}$$

unde S_1 reprezintă sfera de rază unitate. Să găsim aria $|S_1|$ a acestei sfere. Avem

$$|S_1| = \int_0^{\pi} \dots \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{m-2} \vartheta_1 \dots \sin \vartheta_{m-2}\, d\vartheta_1 \dots d\vartheta_{m-2}\, d\vartheta_{m-1} =$$

$$= 2\pi \prod_{k=1}^{m-2} \int_0^{\pi} \sin^k \vartheta\, d\vartheta = 2\pi \prod_{k=1}^{m-2} 2 \int_0^{\pi/2} \sin^k \vartheta\, d\vartheta.$$

Substituția $\sin^2 \vartheta = t$ conduce la

$$2 \int_0^{\pi/2} \sin^k \vartheta\, d\vartheta = \int_0^1 t^{\frac{k-1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = B\left(\frac{k+1}{2}, \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)},$$

de unde se obține ușor formula căutată

$$|S_1| = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}. \tag{9}$$

Aici B și Γ sînt integrale euleriene de speța întîi, respectiv a doua.

Se deduce ușor volumul bilei de rază R. Notăm această bilă cu B_R și avem

$$|B_R| = \int_{r<R} dy = \int_{S_1} \left\{ \int_0^R r^{m-1} dr \right\} ds_1 = \frac{|S_1| R^m}{m}. \tag{10}$$

Pentru simplificare, presupunem că originea sistemului de coordonate coincide cu punctul x, deci $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$.

Se verifică ușor că sistemul de coordonate sferice este ortogonal, adică oricare două suprafețe din familia

$$r = c_0,\ \vartheta_1 = c_1, \dots,\ \vartheta_{m-1} = c_{m-1}, \tag{11}$$

unde $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ sînt constante, se intersectează sub un unghi drept. Ecuațiile (11) definesc următoarea familie de suprafețe de ordinul al doilea:

$$\sum_{k=1}^{m} y_k^2 - c_0^2 = 0, \quad \gamma_1^2 y_1^2 - \sum_{k=2}^{m} y_k^2 = 0,$$

$$\gamma_2^2 y_2^2 - \sum_{k=3}^{m} y_k^2 = 0, \dots, \gamma_{m-1}^2 y_{m-1}^2 - y_m^2 = 0;\ \gamma_k = \operatorname{tg} c_k,$$

iar ortogonalitatea lor rezultă imediat din binecunoscutele formule din geometria diferențială: cosinușii directori ai normalei la suprafață $F(y_1, y_2, \dots, y_m) = 0$ sînt egali cu

$$\cos(\nu, y_k) = \pm \frac{1}{|\operatorname{grad} F|} \frac{\partial F}{\partial y_k}. \tag{12}$$

Din ortogonalitatea suprafețelor (11) se deduc relațiile

$$\frac{\partial r}{\partial y_k} \frac{\partial \vartheta_j}{\partial y_k} = 0;\quad j = 1, 2, \dots, m-1;$$

$$\frac{\partial \vartheta_i}{\partial y_k} \frac{\partial \vartheta_j}{\partial y_k} = 0;\ i \neq j;\ i, j = 1, 2, \dots, m-1. \tag{13}$$

Fie $u(y)$ o funcție diferențială. Să găsim expresia mărimii $|\operatorname{grad} u|^2$ în coordonate sferice. Avem

$$|\operatorname{grad} u|^2 = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2; \quad \frac{\partial u}{\partial y_k} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y_k} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial u}{\partial \vartheta_j}\frac{\partial \vartheta_j}{\partial y_k}.$$

Ridicăm la pătrat și însumăm. Folosind relațiile (13), obținem

$$|\operatorname{grad} u|^2 = \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^2 \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial r}{\partial y_k}\right)^2 + \sum_{j=1}^{m-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta_j}\right)^2 \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial \vartheta_j}{\partial y_k}\right)^2. \tag{14}$$

Avem $\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial r}{\partial y_k}\right)^2 = \sum_{k=1}^{m}\frac{y_k^2}{r^2} = 1$. Mai departe, diferențiind identitatea $\cos\vartheta_1 = y_1/r$, obținem $\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial y_k}\right)^2 = \frac{1}{r^2}$.

Să calculăm ceilalți coeficienți din suma (14). Din formula (1) găsim

$$\sum_{k=j}^{m} y_k^2 = r^2 \sin^2\vartheta_1 \sin^2\vartheta_2 \ldots \sin^2\vartheta_{j-1}, \quad j \geqslant 2.$$

Notînd $\left(\sum_{k=j}^{m} y_k^2\right)^{1/2} = r'$, avem

$$\cos\vartheta_j = \frac{y_j}{r'}. \tag{15}$$

Rezultă că ϑ_j, $j \geqslant 2$, nu depinde de $y_1, \ldots, y_{j-1}$. Din formula (15) găsim, ca mai sus,

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial \vartheta_j}{\partial y_k}\right)^2 = \sum_{k=j}^{m}\left(\frac{\partial \vartheta_j}{\partial y_k}\right)^2 = \frac{1}{r'^2} = \frac{1}{r^2 q_j},$$

unde s-a introdus notația

$$q_1 = 1; \quad q_j = (\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{j-1})^2, \quad j \geqslant 2. \tag{16}$$

Înlocuind rezultatele găsite în (14), obținem expresia căutată

$$|\operatorname{grad} u|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{q_j}\left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta_j}\right)^2. \tag{17}$$

Să mai introducem notația

$$|\operatorname{grad}_\theta u|^2 = \sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{q_j}\left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta_j}\right)^2.$$

Pentru $r = 1$ mărimea $|\operatorname{grad}_\theta u|$ este proiecția vectorului grad u pe planul tangent la sfera $r = 1$ în punctul θ, cu coordonatele unghiulare $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{m-1}$. Formula (17) poate fi pusă sub forma

$$|\operatorname{grad} u|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}|\operatorname{grad}_\theta u|^2. \tag{18}$$

§3. OPERATORI INTEGRALI CU SINGULARITATE SLABĂ

Operatorii de tipul

$$(K\rho)(x) = u(x) = \int_G \rho(y)\frac{A(x,y)}{r^\lambda}\,dy; \quad r = |y - x|; \quad x \in G, \tag{1}$$

unde $G \subset E_m$ este o mulțime mărginită măsurabilă, $A(x, y)$ o funcție măsurabilă și mărginită în $G \times G$, iar λ o constantă, $0 \leqslant \lambda < m$, se numesc *operatori integrali* cu singularitate slabă.

Teorema 1.3.1. *Fie G o mulțime închisă, $\rho \in L_p(G)$, $1 < p \leqslant \infty$, $\lambda p' < m$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$; fie că $A \in C(G \times G)$. Atunci operatorul integral cu singularitate slabă definit de (1) este compact (sau complet continuu) ca operator din $L_p(G)$ în $C(G)$.*

Înainte de toate să punem în evidență o egalitate care va fi mult folosită în cele ce urmează: dacă $\beta < m$, atunci

$$\int_{r<a}\frac{dy}{r^\beta} = \frac{|S_1|\,a^{m-\beta}}{m-\beta}. \tag{2}$$

Pentru demonstrație este suficient să utilizăm sistemul de coordonate sferice cu centrul în punctul x.

Examinăm mai întîi cazul $p < \infty$. Dacă $\rho \in L_p(G)$, atunci pentru orice punct $x \in G$ funcția $A(x, y)r^{-\lambda}\rho(y)$ este integrabilă în G. Într-adevăr, punînd $N = \max A(x, y)$, conform inegalității lui Hölder, avem

$$\int_G \frac{|A(x,y)|}{r^\lambda}|\rho(y)|\,dy \leqslant N\|\rho\|_p \left\{\int_G \frac{dy}{r^{\lambda p'}}\right\}^{1/p'},$$

unde indicele p desemnează norma în $L_p(G)$.

Fie H diametrul mulțimii G: $H = \sup\{|x-y| \,|\, x \in G,\ y \in G\}$. Evident, G se află în bila $|y-x| < H$ și, conform formulei (2), avem

$$\int_G \frac{dy}{r^{\lambda p'}} < \int_{r<H} \frac{dy}{r^{\lambda p'}} = \frac{|S_1| H^{m-\lambda p'}}{m-\lambda p'}.$$

Notînd ultima constantă prin $Q^{p'}$, obținem

$$\int_G \frac{|A(x,y)|}{r^\lambda} |\rho(y)|\,dy \leqslant NQ\,\|\rho\|_p < \infty. \tag{3}$$

Rezultă deci că funcția de sub integrala (1) este integrabilă și condiția a) din § 1 este satisfăcută.

Fie $\varepsilon > 0$. Dacă g este o submulțime a lui G, atunci în mod analog

$$\left| \int_g \frac{A(x,y)}{r^\lambda}\, \rho(y)dy \right| \leqslant NQ \left\{ \int_g |\rho(y)|^p dy \right\}^{1/p}.$$

Se poate alege $\delta > 0$ astfel încît pentru $\mu g < \delta$ partea dreaptă a ultimei inegalități să fie mai mică decît ε; condiția b) §1 este de asemenea satisfăcută și deci integrala (1) este uniform convergentă.

Fie x_0 un punct arbitrar în G și $g(x_0, \eta)$ o mulțime care satisface condițiile teoremei 1.1.1. Să construim mulțimea deschisă $g_1(\eta)$ astfel încît $\mu g_1(\eta) < \eta/2$ și în $G \setminus g_1(\eta)$ funcția $\rho(y)$ să fie continuă. Mulțimea $G \setminus g_1(\eta)$ este închisă, iar funcția $\rho(y)$ pe această mulțime este uniform continuă. Să notăm cu $g_2(x_0, \eta)$ bila cu centrul în x_0 și raza $\sigma = m\eta/2|S_1|^{1/m}$; conform formulei (2.10), $\mu g_2(x_0, \eta) = \eta/2$. Punînd $g(x_0, \eta) = g_1(\eta) \cup g_2(x_0, \eta)$, avem $\mu g(x_0, \eta) < \eta$. Dacă y variază în mulțimea $G \setminus g(x_0, \eta)$, iar x este suficient de aproape de x_0 (de exemplu, dacă $|x - x_0| \leqslant \sigma/2$), atunci funcția de sub integrala (1) este uniform continuă în ansamblul argumentelor x și y, de unde rezultă că funcția considerată este continuă în x_0 uniform cu $y \in G \setminus g(x_0, \eta)$. Conform teoremei 1.1.1, funcția $u(x)$ definită de integrala (1) este continuă în G.

Din cele demonstrate rezultă că operatorul K acționează din $L_p(G)$ în $C(G)$. Formula (3) arată că acest operator este mărginit și că norma lui nu depășește mărimea

$$NQ = N\left[\frac{|S_1| H^{m-\lambda p'}}{m-\lambda p'}\right]^{1/p'}. \tag{4}$$

Să arătăm că operatorul K este compact. Fie M o mulțime de funcții mărginite în $L_p(G)$, $\forall \rho \in M$, $\|\rho\|_p \leqslant C \leqslant$ const. Din inegalitatea (3) rezultă că mulțimea KM este de asemenea mărginită: $\forall u \in KM$, $\|u\|_{C(G)} \leqslant CNQ$; să demonstrăm că funcțiile acestei mulțimi sînt egal continue. Pentru $\eta > 0$ arbitrar, conform inegalității lui Hölder, avem

$$|u(x+\Delta x, y) - u(x,y)| = \left| \int_G \rho(y) \left[\frac{A(x+\Delta x, y)}{r_1^\lambda} - \frac{A(x,y)}{r^\lambda} \right] dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \|\rho\|_p \left[\int_G \left| \frac{A(x+\Delta x_1 y)}{r_1^\lambda} - \frac{A(x,y)}{r^\lambda} \right|^{p'} dy \right]^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant C \left\{ \int_{G \setminus (r<\eta)} \left| \frac{A(x+\Delta x, y)}{r_1^\lambda} - \frac{A(x,y)}{r^\lambda} \right|^{p'} dy + \right.$$

$$\left. + \int_{r<\eta} \left| \frac{A(x+\Delta x, y)}{r_1^\lambda} - \frac{A(x,y)}{r^\lambda} \right|^{p'} dy \right\}^{1/p'}, \quad r_1 = |x+\Delta x - y|.$$

Aplicînd de două ori inegalitatea lui Minkowski, obținem

$$|u(x+\Delta x) - u(x)| \leqslant C \left[\int_{G \setminus (r<\eta)} \left| \frac{A(x+\Delta x, y)}{r_1^\lambda} - \frac{A(x,y)}{r^\lambda} \right|^{p'} dy \right]^{1/p'} +$$

$$+ CN \left\{ \left[\int_{r<\eta} \frac{dy}{r_1^{\lambda p'}} \right]^{1/p'} + \left[\int_{r<\eta} \frac{dy}{r^{\lambda p'}} \right]^{1/p'} \right\}. \tag{6}$$

După formula (2) ultima integrală din (6) este egală cu $\dfrac{|S_1|\eta^{m-\lambda p'}}{m-\lambda p'}$.

Să estimăm a doua integrală. Fie $|\Delta x| < \eta/2$. Atunci $r_1 < r + \eta/2$, dar $r < \eta$ și deci $r_1 < 3\eta/2$. Bila $r < \eta$ este prin urmare inclusă în bila $r_1 < 3\eta/2$, de unde

$$\int_{r<\eta} \frac{dy}{r_1^{\lambda p'}} < \int_{r_1 < \frac{3\eta}{2}} \frac{dy}{r_1^{\lambda p'}} = \frac{|S_1| \left(\frac{3\eta}{2}\right)^{m-\lambda p'}}{m-\lambda p'}.$$

Deci

$$u(x+\Delta x)-u(x) \leqslant C\left[\int\limits_{G\setminus(r<\eta)}\left|\frac{A(x+\Delta x,y)}{r_1^{\lambda}}-\frac{A(x,y)}{r^{\lambda}}\right|^{p'}\mathrm{d}y\right]^{1/p'}+$$

$$+\gamma\eta^{\frac{m-\lambda p'}{p}} \quad ; \quad \gamma=\frac{|S_1|\left[1+\left(\frac{3}{2}\right)^{m-\lambda p'}\right]CN}{m-\lambda p'}.$$

Alegem η astfel încît să satisfacă inegalitatea $\gamma\eta^{\frac{m-\lambda p'}{p'}}<\varepsilon/2$. Pentru η astfel ales există $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, astfel încît dacă $|\Delta x|<\delta$ și

$$C\left[\int\limits_{G\setminus(r<\eta)}\left|\frac{A(x+\Delta x,y)}{r_1^{\lambda}}-\frac{A(x,y)}{r^{\lambda}}\right|^{p'}\mathrm{d}y\right]^{1/p'}<\frac{\varepsilon}{2},$$

atunci $|u(x+\Delta x)-u(x)|<\varepsilon$. Deoarece δ nu depinde de funcția $\rho(y)$, mulțimea funcțiilor KM este egal continuă. Conform teoremei lui Arzelà această mulțime este compactă în $C(G)$ și operatorul K este compact.

Fie $p=\infty$. Atunci $p'=1$ și condiția $\lambda p'<m$ este satisfăcută. În acest caz,

$$\|\rho\|_p=\|\rho\|_\infty=\sup_{x\in G}\operatorname{ess}|\rho(x)|.$$

Acum

$$|u(x+\Delta x)-u(x)| \leqslant \|\rho\|_\infty\int\limits_G\left|\frac{A(x+\Delta x,y)}{r_1^{\lambda}}-\frac{A(x,y)}{r^{\lambda}}\right|\mathrm{d}y.$$

Repetînd raționamentul făcut pentru integrala (5), găsim că mulțimea de funcții KM este egal continuă.

Corolar. *Dacă G este o mulțime închisă și $A\in C(G\times G)$, atunci operatorul* (1) *este compact în $C(G)$.*

Aceasta rezultă imediat din teorema 1.3.1. pentru cazul $p=\infty$ și din faptul că $C(G)$ este subspațiu al spațiului $L_\infty(G)$.

Teorema 1.3.2. *Fie în integrala* (1) $\lambda p'\geqslant m$ *și fie s un număr întreg, astfel încît $m-(m-\lambda)p<s\leqslant m$. Atunci integrala* (1) *definește o funcție care are sens aproape peste tot (în sensul măsurii Lebesgue din E_s) în orice secțiune a mulțimii G cu un hiperplan de dimensiune s. Operatorul K, definit de formula* (1), *este mărginit ca operator din $L_p(G)$ în $L_q(g_s)$, unde q satisface inegalitatea*

$$1\leqslant q<q_0=\frac{sp}{m-(m-\lambda)p}. \tag{7}$$

Să examinăm mai întîi cazul $p\leqslant q<q_0$. Punem $\sigma=\frac{s}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{q_0}\right)$; evident că $\sigma>0$. Atunci $\lambda=\frac{m}{p'}+\frac{s}{q}-2\sigma$. Să estimăm integrala (1):

$$|u(x)|\leqslant N\int\limits_G\frac{|\rho(y)|}{r^{\lambda}}\,\mathrm{d}y=N\int\limits_G|\rho(y)|^{p/q}r^{\sigma-s/q}\,|\rho(y)|^{1-p/q}r^{\sigma-m/p'}\mathrm{d}y. \tag{8}$$

Punem $p_1=q$, $p_2=\frac{pq}{q-p}$, $p_3=p'$. Evident că $1/p_1+1/p_2+1/p_3=1$ și integralei (8) i se poate aplica inegalitatea lui Hölder cu trei factori:

$$|u(x)|\leqslant N\left\{\int\limits_G|\rho(y)|^p r^{\sigma q-s}\mathrm{d}y\right\}^{1/q}\times\left\{\int\limits_G|\rho(y)^p\mathrm{d}y\right\}^{1/p-1/q}\left\{\int\limits_G r^{p'\sigma-m}\,\mathrm{d}y\right\}^{1/p'}.$$

Al doilea factor din dreapta este egal cu $\|\rho\|_p^{1-p/q}$, al treilea se estimează ușor dacă se observă că $G\subset(r<H)$ și se folosește formula (2). În final, obținem

$$|u(x)|\leqslant\frac{N|S_1|^{1/p'}H^{\sigma}}{(p'\sigma)^{1/p'}}\|\rho\|_p^{1-p/q}\left\{\int\limits_G|\rho(y)|^p r^{\sigma q-s}\,\mathrm{d}y\right\}^{1/q},$$

de unde

$$\int\limits_{g_s}|u(x)^q|\mathrm{d}_s x\leqslant C\|\rho\|_p^{q-p}\int\limits_G|\rho(y)^p\left\{\int\limits_{g_s}r^{\sigma q-s}\mathrm{d}_s x\right\}\mathrm{d}y,\quad C=\text{const}; \tag{9}$$

aici cu $\mathrm{d}_s x$ s-a notat elementul de măsură Lebesgue în E_s.

În inegalitatea (9) integrala interioară se calculează ușor. Alegem axele de coordonate astfel încît hiperplanul s-dimensional cu care se realizează secțiunea g_s să fie definit de ecuațiile $x_{s+1}=x_{s+2}=\ldots=x_m=0$. Atunci pe g_s

$$r^2=\sum_{k=1}^{s}(x_k-y_k)^2+\sum_{k=s+1}^{m}y_k^2\geqslant\sum_{k=1}^{s}(x_k-y_k)^2.$$

Ultima sumă o notăm cu r_s^2; evident că $r\geqslant r_s$. În acest caz, $\sigma q<s$ și prin urmare

$$\int\limits_{g_s}\frac{\mathrm{d}_s x}{r^{s-\sigma q}}\leqslant\int\limits_{g_s}\frac{\mathrm{d}_s x}{r_s^{s-\sigma q}}<\int\limits_{r_s<H}\frac{\mathrm{d}_s x}{r_s^{s-\sigma q}};$$

folosind formula (2), în care m se înlocuiește cu s, obținem

$$\int_{g_s} \frac{\mathrm{d}_s x}{\rho^{s-\sigma q}} < \frac{2\pi^{s/2} H^{\sigma q}}{\Gamma(s/2)\,\sigma q}.$$

Din inegalitatea (8) rezultă atunci

$$\|u\|_{L_q(g_s)} = \left\{ \int_{g_s} |u(x)|^q \,\mathrm{d}_s x \right\}^{1/q} < C' \|\rho\|_{L_p(G)}; \quad C' = \text{const} \tag{10}$$

și pentru $q \geqslant p$ teorema este demonstrată.

Demonstrația pentru $q < p$ se obține ușor cu ajutorul următoarelor observații. Fie $\Omega \subset E_k$ o mulțime măsurabilă mărginită, $1 < q < q_1$ și $u \in L_q(\Omega)$. Folosind inegalitatea lui Hölder cu exponentul q_1/q, obținem

$$\|u\|_q^q = \int_\Omega |u(x)|^q \mathrm{d}x < \left\{ \int_\Omega |u(x)|^{q_1} \mathrm{d}x \right\}^{q/q_1} \left\{ 1^{\frac{q_1}{q_1 - q}} \mathrm{d}x \right\}^{\frac{q_1 - q}{q_1}}$$

sau

$$\|u\|_q < (\mu\Omega)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{q_1}} \|u\|_{q_1}. \tag{11}$$

Dacă $q < p$, atunci se alege un număr q_1 astfel încît $p \leqslant q_1 < q_0$. Conform formulelor (10) și (11)

$$\|u\|_{L_q(g_s)} < (\mu g_s)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{q_1}} C' \|\rho\|_{L_p(G)}.$$

Teorema 1.3.3. *Fie că $\lambda p' \geqslant m$ și s un număr întreg care satisface inegalitatea $m - (m - \lambda)p < s \leqslant m$. Fie mai departe $g_s \subset G$ o varietate s-dimensională netedă pe porțiuni. Atunci toate afirmațiile teoremei 1.3.2 sînt adevărate.*

După cum rezultă din definiție, o varietate netedă pe porțiuni este reuniunea unui număr finit de părți $g_s = \bigcup_{i=1}^{n} g_s^{(i)}$, fiecare dintre ele fiind descrisă de o ecuație de tipul

$$x_j = f_{ij}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s), \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{12}$$

unde funcțiile f_{ij} sînt continuu diferențiabile în domeniul de variație $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ și limita inferioară a sumei

$$A(x) = \sum \left[\frac{D(x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{js})}{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s)} \right]^2 \tag{13}$$

este pozitivă; sumarea în (13) se face după toate posibilitățile de alegere ale lui $j_1, j_2, \ldots, j_s$, fiecare din acești indici luînd valori de la 1 la m. Evident, este suficient să demonstrăm teorema pentru fiecare dintre mulțimile $g_s^{(i)}$, care pot fi considerate închise; în caz contrar, este suficient să se înlocuiască fiecare din aceste mulțimi cu închiderea sa și să se demonstreze teorema pentru această închidere. Într-o anumită vecinătate a fiecărui punct al mulțimii $g_s^{(i)}$, cel puțin unul dintre jacobienii (13) este diferit de zero. Conform lemei lui Heine-Borel mulțimea considerată poate fi acoperită cu un număr finit de mulțimi deschise, fiecare dintre jacobienii (13) fiind diferit de zero.

Fie g' una din aceste mulțimi deschise și să numerotăm axele de coordonate astfel încît pe mulțimea g' jacobianul

$$\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_s)}{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s)}$$

să nu se anuleze. Există deci o vecinătate a lui g' astfel încît jacobianul să nu se anuleze. Să notăm cu G_1 intersecția acestei vecinătăți cu mulțimea G și fie $G_2 = G \setminus G_1$. În G_1 introducem noile coordonate $\xi_1, \ldots, \xi_s, \xi_{s+1}, \ldots, \xi_m$ astfel încît pentru $j \leqslant s$ ele sînt definite de primele s ecuații (12), iar pentru $j > s$ de ecuațiile

$$x_j = f_{ij}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s) + \xi_j. \tag{14}$$

Este ușor de verificat că jacobianul acestei transformări este

$$\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)} = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_s)}{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s)},$$

și deci este diferit de zero în G_1; dacă diametrul acestei mulțimi este suficient de mic, ceea ce se poate întotdeauna presupune, atunci transformarea introdusă este univocă. Important pentru cele ce urmează este ca prin această transformare mulțimea g' să meargă în mulțimea d' situată în planul $\xi_{s+1} = \xi_{s+2} = \ldots = \xi_m = 0$. Să notăm cu D_1 imaginea mulțimii G_1 prin transformarea indicată. Transformarea însăși este notată $x = f(\xi)$, iar transformarea inversă prin $\xi = F(x)$.

Să punem $u(x) = u_1(x) + u_2(x)$, unde

$$u_k(x) = \int_{G_k} \rho(y) \frac{A(x, y)}{r^\lambda} \, dy, \quad k = 1, 2. \tag{15}$$

Dacă $x \in g'$ și $y \in G_2$, atunci nucleul $A(x, y)r^{-\lambda}$ este mărginit, deci

$$|u_2(x)| \leqslant C \int_{G_2} |\rho(y)| dy \leqslant C \int_G |\rho(y)| dy = C \|\rho\|_1 \leqslant C' \|\rho\|_p,$$

unde C și C' sînt constante arbitrare. Ridicînd la puterea q și integrînd pe g', obținem

$$\int_{g'} |u_2(x)|^q \, dx \leqslant C'' \|\rho\|_p^q, \quad C'' = \text{const}. \tag{16}$$

Să trecem la funcția $u_1(x)$. Fie $y = f(\eta)$. Punem $|\xi - \eta| = R$, atunci

$$R = |F(y) - F(x)| = |J(\bar{x})(y - x)|,$$

unde J este matricea jacobiană a transformării $\xi = F(x)$ și $\bar{x}$ un punct oarecare al segmentului care unește x cu y. Matricea J este mărginită în G_1 și atunci, evident, $R \leqslant cr$, $c = \text{const}$.

Funcția $u_1(x)$ se poate reprezenta sub forma

$$u_1(x) = \int_{D_1} \frac{A(f(\xi), f(\eta)) |J^{-1}(\xi)| \left(\frac{R}{r}\right)^\lambda}{R^\lambda} \rho(f(\eta)) d\eta. \tag{17}$$

Numărătorul fracției de sub integrala (17) este mărginit și această integrală are singularitate slabă. Varietatea d' este plană și conform teoremei 1.3.2

$$\int_{d'} |u_2(f(\xi))|^q d\xi_1 \ldots d\xi_s \leqslant B_1^q \left\{ \int_{D_1} |\rho(f(\eta))|^p d\eta \right\}^{q/p} =$$

$$= B_1^q \left\{ \int_{G_1} |\rho(y)|^p \left| \frac{D(\eta_1, \ldots, \eta_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)} \right| dy \right\}^{q/p} \leqslant$$

$$\leqslant B_2^q \left\{ \int_{G_1} |\rho(y)|^p dy \right\}^{q/p} \leqslant B_2^q \|\rho\|_p^q, \quad B_1, B_2 = \text{const}. \tag{18}$$

Pe de altă parte,

$$\|u_1\|^q_{L_p(g')} = \int_{g'} |u_1(x)|^q \, d_x g' = \int_{d'} |u_1(x(\xi))|^q \sqrt{A(x)} \, d\xi_1 \ldots d\xi_s \leqslant$$

$$\leqslant B_3^q \int_{d_1} |u_1(x(\xi))|^q \, d\xi_1 \ldots d\xi_s, \quad B_3 = \text{const}; \tag{19}$$

mărimea $A(x)$ este mărginită deoarece derivatele $\partial x_j / \partial \xi_k$ sînt toate continue și prin urmare mărginite.

Comparînd relațiile (18) și (19) găsim că

$$\|u_1\|_{L_q(g')} \leqslant B_4 \|\rho\|_p, \quad B_4 = \text{const}.$$

de unde, ținînd seama și de inegalitatea (16), rezultă

$$\|u\|_{L_q(g')} \leqslant B_5 \|\rho\|_p.$$

Sumînd aceste inegalități după toți $g' \subset g_s^{(i)}$, iar apoi după toți i, găsim că

$$\|u\|_{L_q(g_s)} \leqslant B \|\rho\|_p, \quad B = \text{const}. \tag{20}$$

§4. OPERATORII INTEGRALI CU SINGULARITATE SLABĂ (CONTINUARE)

Teorema 1.4.1. *Dacă $\lambda p' > m$, atunci operatorul integral cu singularitate slabă este compact ca operator din $L_p(G)$ în $L_q(G)$, unde* $1 \leqslant q \leqslant q_0^* = \dfrac{mp}{m - (m - \lambda)p}$.

Observație. Se poate arăta că dacă $\lambda p' \geqslant m$, operatorul integral cu singularitate slabă este compact și ca operator din $L_p(G)$ în $L_q(g_s)$, unde $g_s \subset G$ este o varietate s-dimensională netedă pe porțiuni $m - (m - \lambda)p < s \leqslant m$ și $1 \leqslant q < q_0$, unde q_0 este definit de formula (3.7). Pentru demonstrație vezi [44], [46].

Fie ε un număr pozitiv arbitrar. Pentru $x, y \in G$, definim

$$K_1(x, y) = \begin{cases} A(x, y)r^{-\lambda}, & r \geqslant \varepsilon, \\ 0, & r < \varepsilon; \end{cases}$$

$$K_2(x, y) = \begin{cases} 0, & r \geqslant \varepsilon, \\ A(x, y)r^{-\lambda}, & r < \varepsilon. \end{cases}$$

Notăm prin K_j, $j = 1, 2$, operatorul integral cu nucleul $K_j(x, y)$, astfel încît $K_1 + K_2 = K$. Să demonstrăm că $\|K_2\| \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$.

Fie $\rho \in L_p(G)$ și

$$v(x) = \int_G K_2(x, y)\rho(y)dy = \int_{G \cap (r<\varepsilon)} \frac{A(x, y)}{r^\lambda} \rho(y)dy.$$

Ca și în paragraful precedent, obținem

$$|v(x)| \leqslant N \left\{ \int_{G \cap (r<\varepsilon)} |\rho(y)|^p r^{\sigma q - m} dy \right\}^{1/q} \times$$

$$\times \left\{ \int_{G \cap (r<\varepsilon)} |\rho(y)|^p dy \right\}^{1/p - 1/q} \left\{ \int_{G \cap (r<\varepsilon)} r^{p'\sigma - m} dy \right\}^{1/p'},$$

unde $\sigma = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p'} - \frac{\lambda}{m}\right)$. Dacă în primii doi factori din dreapta se integrează pe G, iar în al treilea pe bila $r < \varepsilon$, atunci partea dreaptă nu se micșorează. Folosind apoi formula (3.2) și integrînd pe G, obținem $\|v\|_q \leqslant C_1 \varepsilon^\sigma \|\rho\|_p$, $C_1 = \text{const}$. Deci $\|K_2\| \leqslant C_1 \varepsilon^\sigma$ și afirmația noastră este demonstrată.

Fie acum un nucleu oarecare $T(x, y) \in L_p(G \times G)$, unde $\beta = \max(p', q)$ și fie operatorul T definit de formula

$$(T\rho)(x) = w(x) = \int_G T(x, y)\rho(y)dy.$$

Estimăm norma lui T ca operator din $L_p(G)$ în $L_q(G)$. Conform inegalității lui Hölder,

$$|w(x)| \leqslant \|\rho\|_p \left[\int_G |T(x, y)|^{p'} dy \right]^{1/p'}.$$

Considerînd în formula (3.11) $q = p'$, $q_1 = \beta$, obținem

$$|w(x)| \leqslant (\mu G)^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{\beta}} \|\rho\|_p \left[\int_G |T(x,y)|^\beta dy \right]^{1/\beta}.$$

Pentru prescurtare, notăm

$$\varphi(x) = \left[\int_G |T(x, y)|^\beta dy \right]^{1/\beta}; \quad (\mu G)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{\beta}} = c,$$

astfel încît $|w(x)| \leqslant c\|\rho\|_p \varphi(x)$. Ridicînd la puterea q și integrînd după x, obținem

$$\|w\|_q^q \leqslant c^q \|\rho\|_p^q \|\varphi\|_q^q \leqslant c_1^q \|\rho\|_p^q \|\varphi\|_\beta^q; \quad c_1 = (\mu G)^{\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} - \frac{2}{\beta}} c,$$

de unde rezultă ușor estimarea căutată

$$\|T\| \leqslant c_1 \left[\int_G \int_G |T(x,y)|^\beta dx dy \right]^{1/\beta}. \tag{1}$$

Să revenim la operatorul K_1. Nucleul său este mărginit și prin urmare integrabil de orice ordin. În acest caz nucleul $K_1(x, y)$ poate fi aproximat cu un polinom $P(x, y)$, astfel încît mărimea

$$\int_G \int_G |K_1(x, y) - P(x, y)|^\beta dx dy$$

să fie oricît de mică. Notînd cu P operatorul integral cu nucleul $P(x, y)$ se observă că norma operatorului $K_1 - P$ poate fi făcută oricît de mică dacă $P(x, y)$ este convenabil ales.

Să arătăm acum că P este compact ca operator din $L_p(G)$ în $L_q(G)$. Fie M o mulțime mărginită în $L_p(G)$: $\forall \rho \in M$, $\|\rho\|_p \leqslant C = \text{const}$. Este suficient să arătăm că mulțimea PM este compactă în $L_p(G)$. Conform inegalității lui Hölder,

$$|(P\rho)(x)| \leqslant \|\rho\|_p \left\{ \int_G |P(x, y)^{p'}| dy \right\}^{1/p'} \leqslant C \left\{ \int_G |P(x, y)|^{p'} dy \right\}^{1/p'}.$$

Mulțimea G este mărginită și ultima integrală este de asemenea mărginită. De unde rezultă că mulțimea funcțiilor PM este absolut mărginită de o constantă independentă de $\rho(y)$. Mai departe, conform aceleiași inegalități a lui Hölder,

$$|(P\rho)(x + \Delta x) - (P\rho)(x)| \leqslant \|\rho\|_p \left\{ \int_G |P(x+\Delta x, y) - P(x, y)|^{p'} dy \right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant C \left\{ \int_G |P(x + \Delta x, y) - P(x, y)|^{p'} dy \right\}^{1/p'}. \tag{2}$$

În mulțimea mărginită G polinomul $P(x, y)$ este uniform continuu și inegalitatea (2) arată că mulțimea funcțiilor PM este egal continuă. Conform teoremei lui Arzela, mulțimea PM este compactă în metrica lui $C(G)$ și cu atît mai mult în metrica lui $L_q(G)$. Operatorul P este deci compact.

Prin urmare este valabilă descompunerea $K = P + (K_1 - P) + K_2$, în care operatorul P este compact, iar fiecare din operatorii $K_1 - P$ și K_2 au o normă oricît de mică. Dar atunci operatorul K este compact.

Teoremele de la paragrafele 3 și 4 se extind fără dificultate la cazul cînd în integrala cu singularitate slabă integrarea se face după o mulțime măsurabilă G, care aparține unei varietăți Γ m-dimensionale, netedă pe porțiuni; relativ la această varietate presupunem că este scufundată într-un spațiu euclidian de dimensiune mai mare n. În acest caz în formula (3.1), care definește integrala cu singularitate slabă, prin r se înțelege distanța între punctele x și y, definită fie în metrica spațiului E_n, fie în metrica interioară a varietății Γ.

Capitolul 2

FUNCȚII DE MEDIE ȘI DERIVATE GENERALIZATE

§1. NUCLEU DE MEDIERE[1)]

Fie x și y puncte arbitrare din E_m, $r = |x - y|$ și h un număr pozitiv arbitrar. Funcția $\omega_h(r)$ se numește *nucleu de mediere*, dacă are următoarele proprietăți:

1) funcția $\omega_h(r)$ este indefinit derivabilă în raport cu coordonatele carteziene ale punctelor x și y; remarcăm de la început că în cazul $r \neq 0$ pentru satisfacerea proprietății 1) este necesar și suficient ca funcția considerată să fie indefinit derivabilă în raport cu r;

2) $\omega_h(r) > 0$, $r < h$; $\omega_h(r) = 0$, $r \geqslant h$;

3) $\int\limits_{r<h} \omega_h(r)\, dy = \int\limits_{r<h} \omega_h(r)\, dx = 1.$

Să dovedim existența unui astfel de nucleu. Fie

$$\omega_h(r) = \begin{cases} c_h e^{-\frac{h^2}{h^2 - r^2}}, & r < h, \quad c_h = \text{const} > 0; \\ 0, & r \geqslant h. \end{cases} \tag{1}$$

Proprietatea 2) este evidentă. Proprietatea 3) este adevărată dacă punem

$$c_h = \left\{ \int\limits_{r<h} e^{-\frac{h^2}{h^2 - r^2}}\, dy \right\}^{-1}. \tag{2}$$

Să stabilim proprietatea 1). Este evident că funcția (1) este indefinit derivabilă cu $r < h$ și $r > h$; totodată pentru $r = h$ toate derivatele sînt egale cu zero. Este suficient deci să stabilim că funcția (1) are pentru $r = h$ derivatele de orice ordin în raport cu r egale cu zero și că derivatele calculate pentru $r < h$ tind la zero cu $r \to h$.

[1)] Noțiunea de nucleu de mediere și strîns legată de ea noțiunea de funcție de medie (vezi mai jos) au fost introduse pentru prima oară de V. A. Steklov. Dezvoltarea ulterioară a acestor noțiuni aparține lui S. L. Sobolev ale cărui idei le și expunem aici. S.L. Sobolev a introdus și studiat de asemenea noțiunea de derivată generalizată, care va fi expusă în paragrafele 3 și 8 ale acestui capitol.

Să dăm demonstrația pentru derivata de ordinul întîi; pentru derivatele de ordin superior raționamentele desfășurîndu-se în mod analog.

a) Funcția $\omega_h(r)$ este continuă pentru $r = h$. Într-adevăr, din formulele (1) se observă că $\omega_h(h + 0) = 0 = \omega_h(h)$, iar

$$\omega_h(h - 0) = \lim_{r \to h-0} c_h \, e^{-\frac{h^2}{h^2 - r^2}} = 0,$$

întrucît

$$-\frac{h^2}{h^2 - r^2} \xrightarrow[r \to h-0]{} -\infty.$$

b) Derivata $\omega_h(h)$ există și este egală cu zero. Într-adevăr

$$\lim_{r \to h+0} \frac{\omega_h(r) - \omega_h(h)}{h - r} = \lim_{r \to h+0} 0 = 0.$$

Totodată, aplicînd regula lui L'Hôspital, avem

$$\lim_{r \to h-0} \frac{\omega_h(r) - \omega_h(h)}{r - h} = \lim_{r \to h-0} \frac{e^{-\frac{h^2}{r^2 - h^2}}}{r - h} = 0.$$

Prin urmare limita

$$\lim_{r \to h} \frac{\omega_h(r) - \omega_h(h)}{r - h} = \omega_h'(h),$$

există și este egală cu zero.

c) Are loc relația

$$\lim_{r \to h-0} \omega_h'(r) = \lim_{r \to h-0} c_h \frac{2rh^2}{(h^2 - r^2)^2} e^{-\frac{h^2}{h^2 - r^2}} = 0,$$

care se verifică ușor pe baza aceleiași reguli a lui L'Hôspital.

În acest fel derivata de ordinul întîi $\omega_h'(r)$ există și este continuă pentru orice r. Exact la fel se demonstrează existența și continuitatea celorlalte derivate. Proprietatea 1) a fost stabilită.

§ 2. FUNCȚII DE MEDIE

Fie Ω un domeniu mărginit din E_m și $u(y)$ o funcție integrabilă în Ω. Prelungim această funcție cu zero în exteriorul lui Ω. Fie x un punct arbitrar din E_m. Punem

$$u_h(x) = \int_\Omega \omega_h(r)\, u(y)\, dy, \tag{1}$$

unde $\omega_h(r)$ este un nucleu de mediere care are proprietățile 1—3 § 1. Funcția u_h se numește *funcție de medie* în raport cu u; numărul h se numește *raza de medie*. Funcția de medie se poate prezenta încă în trei forme:

1) avînd în vedere că $u(y) = 0$, $y \notin \Omega$, se poate extinde integrala (1) la întreg spațiul și atunci

$$u_h(x) = \int_{E_m} \omega_h(r)\, u(y)\, dy; \tag{1a}$$

2) în baza proprietății 2) nucleul de mediere se poate integra nu pe tot spațiul, ci numai pe bila de rază h cu centrul în x:

$$u_h(x) = \int_{r<h} \omega_h(r)\, u(y)\, dy; \tag{1b}$$

3) se poate, în sfîrșit, integra numai după intersecția $\Omega \cap (r < h)$, întrucît în afara ei sau unul, sau celălalt factor de sub integrală este egal cu zero. În acest context avem

$$u_h(x) = \int_{\Omega \cap (r<h)} \omega_h(r)\, u(y)\, dy. \tag{1c}$$

Cele mai simple proprietăți ale funcțiilor de medie

1. O funcție de medie este indefinit derivabilă în tot spațiul; derivatele sale de orice ordin se pot obține prin derivarea sub semnul integralei în oricare din formulele (1)—(1c).

Această proprietate rezultă direct din teorema 1.1.3. Derivatele funcțiilor de medie se pot deci calcula după formula

$$D^\alpha u_h(x) = \int_\Omega u(y)\, D_x^\alpha \omega_h(r)\, dy, \tag{2}$$

unde α este un multiindice arbitrar de ordin m; domeniul Ω din formula (2) se poate înlocui cu oricare din domeniile E_m, $r < h$, $\Omega \cap (r < h)$.

2. Funcția de medie este nulă în toate punctele a căror distanță pînă la domeniul Ω este mai mare sau egală cu h. Într-adevăr, în acest caz bila $r < h$ se află în întregime în exteriorul lui Ω și sub semnul integralei (1b) $u(y) \equiv 0$.

Prin urmare, funcțiile de medie pot fi diferite de funcția identic nulă numai în domeniul pe care-l notăm $\Omega^{(h)}$ și care poate fi construit astfel: din fiecare punct $x \in \Omega$, ca centru, descriem o bilă cu raza h; reuniunea acestor bile este Ω^h. Este clar că $\Omega^{(h)} \supset \Omega$; dacă, de exemplu, Ω este bila de rază R, atunci $\Omega^{(h)}$ este o bilă concentrică cu Ω de rază $R + h$.

Convergența funcțiilor de medie

Teorema 2.2.1. *Dacă* $u \in C(\Omega)$, *atunci* $u_h(x) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} u(x)$ *este uniform pe închiderea oricărui subdomeniu interior al domeniului* Ω.

Fie Ω' un subdomeniu interior al domeniului Ω. Să construim Ω'' astfel încît Ω'' să fie subdomeniu interior al lui Ω, iar Ω' să fie subdomeniu interior al lui Ω''.

Să notăm cu Γ' și Γ'' frontierele domeniilor Ω' și respectiv Ω''. Fie h_0 cea mai mică distanță dintre punctele frontierelor Γ' și Γ''. Luăm $h < h_0$. Conform formulei (1b) și proprietății 3) a nucleului de mediere (§1) avem

$$u_h(x) - u(x) = \int_{r<h} [u(y) - u(x)]\, \omega_h(r)\, dy. \tag{3}$$

Dacă $x \in \overline{\Omega}'$, atunci în integrala (3) $y \in \overline{\Omega}''$. În domeniul închis Ω'' funcția continuă u este uniform continuă; deci pentru h suficient de mic și $r \leqslant h$ vom avea $|u(y) - u(x)| < \varepsilon$, unde ε este un număr pozitiv arbitrar. Avînd în vedere că $\omega_h(r) \geqslant 0$ (proprietatea 2), din formula (3) obținem

$$|u_h(x) - u(x)| \leqslant \varepsilon \int_{r<h} \omega_h(r)\, dy = \varepsilon.$$

Teorema 2.2.2. *Dacă* $u \in L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, *atunci* $\|u_h\|_p \leqslant \|u\|_p$.

Fie $u \in L_p(\Omega)$ și $1 < p < \infty$. Conform inegalității lui Hölder

$$|u_h(x)|^p = \left|\int_\Omega u(y)\, \omega_h(r)\, dy\right|^p = \left|\int_\Omega u(y)\omega_h^{1/p}(r)\, \omega_h^{1/p}(r)\, dy\right|^p \leqslant$$

$$\leqslant \int_\Omega |u(y)|^p \omega_h(r)\, dy \left\{\int_\Omega \omega_h(r)\, dy\right\}^{p/p'} \leqslant \int_\Omega |u(y)|^p \omega_h(r)\, dy, \tag{4}$$

deoarece conform proprietății 2) a nucleului de mediere

$$\int_\Omega \omega_h(r)\, dy = \int_{\Omega\cap(r<h)} \omega_h(r)\, dy \leqslant \int_{r<h} \omega_h(r)\, dy = 1.$$

Integrînd inegalitatea (4) pe domeniul Ω, obținem

$$\|u_h\|_p^p = \int_\Omega |u_h(x)|^p\, dx \leqslant \int_\Omega |u(y)|^p \left\{\int_\Omega \omega_h(r)\, dx\right\} dy \leqslant$$

$$\leqslant \int_\Omega |u(y)|^p dy = \|u\|_p^p.$$

Lăsăm în seama cititorului examinarea cazurilor mai simple $p = 1$ și $p = \infty$.

Teorema 2.2.3. *Dacă* $u \in L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, *atunci* $\|u - u_h\|_p \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Se știe[1]) că pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate construi un polinom f astfel încît $\|u - f\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$. Aplicînd inegalitatea triunghiului (și notînd $\|\ \|$ în loc de $\|\ \|_p$), obținem

$$\|u - u_h\| \leqslant \|u - f\| + \|f - f_h\| + \|f_h - u_h\|.$$

Conform teoremei 2.2.2, $\|f_h - u_h\| \leqslant \|f - u\|$, astfel că

$$\|u - u_h\| \leqslant 2\|f - u\| + \|f - f_h\| < \frac{2\varepsilon}{3} + \|f - f_h\|.$$

Alegem un domeniu Ω_1 pentru care Ω va fi un subdomeniu strict interior. Polinomul f este continuu în Ω_1, deci $f_h \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f$ uniform în orice subdomeniu interior închis Ω_1, în particular, în Ω. Dar din convergența uniformă pe un domeniu închis rezultă convergența în medie și, pentru h suficient de mic, $\|f - f_h\|_{L_p(\Omega)} < \frac{1}{3}\varepsilon$, de unde rezultă ușor afirmația teoremei.

Teorema 2.2.4. *Mulțimea funcțiilor, finite în domeniul* Ω, *este densă în spațiul* $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$.

[1]) Vezi, de exemplu, [44].

Trebuie să arătăm că orice funcție $u \in L_p(\Omega)$ poate fi aproximată în metrica lui $L_p(\Omega)$ cu o funcție finită.

Alegînd δ astfel încît măsura benzii Ω_δ să fie suficient de mică, și anume: luăm $\varepsilon > 0$ și alegem δ astfel încît

$$\int_{\Omega_\delta} |u(x)|^p \, dx < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

Să examinăm funcția definită de egalitatea

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \setminus \Omega_\delta, \\ 0, & x \in \Omega_\delta. \end{cases}$$

Este evident că $v \in L_p(\Omega)$; de aici

$$\|u - v\|^p = \int_{\Omega_\delta} |u(x)|^p \, dx < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

și prin urmare

$$\|u - v\| < \varepsilon/2. \qquad (4)'$$

Luăm $h < \delta/2$ și construim funcția de medie $v_h(x)$. Ea este finită în Ω, deoarece este indefinit derivabilă și egală cu zero în banda frontieră $\Omega_{\delta-h}$ (proprietățile 1, 2 ale funcțiilor de medie § 2). Conform teoremei 2.2.3 se poate alege h_0 astfel încît pentru $h < h_0$ să avem

$$\|v - v_h\| < \varepsilon/2. \qquad (5)$$

Din inegalitatea triunghiului și relațiile (4) și (5) rezultă că

$$\|u - v_h\| \leqslant \|u - v\| + \|v - v_h\| < \varepsilon, \quad h < h_0.$$

Corolarul 2.2.1 *Dacă $M \subset L_p(\Omega)$ este o mulțime care conține mulțimea funcțiilor finite din Ω, atunci M este dens în $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$.*

§ 3. NOȚIUNEA DE DERIVATĂ GENERALIZATĂ

Reamintim mai întîi o formulă a calculului integral cunoscută sub numele de *formula de integrare prin părți.*

Fie Ω un domeniu mărginit din spațiul euclidian m-dimensional, cu frontiera Γ netedă pe porțiuni. Amintim formula lui Ostrogradski

$$\int_\Omega \frac{\partial P}{\partial x_k} \, dx = \int_\Gamma P \cos(\nu, x_k) \, d\Gamma;$$

unde ν este normala exterioară la suprafața Γ. Pentru $P(x)$ este suficient să cerem să fie de clasă $C^{(1)}(\overline{\Omega})$.

Să examinăm integrala

$$\int_\Omega P \frac{\partial Q}{\partial x_k} \, dx = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k}(PQ) \, dx - \int_\Omega Q \frac{\partial P}{\partial x_k} \, dx,$$

unde $P\,Q \in C^{(1)}(\overline{\Omega})$. Înlocuind prima integrală din dreapta conform formulei lui Ostrogradski, obținem formula de integrare prin părți

$$\int_\Omega P \frac{\partial Q}{\partial x_k} \, dx = -\int_\Omega Q \frac{\partial P}{\partial x_k} \, dx + \int_\Gamma PQ \cos(\nu, x_k) \, d\Gamma.$$

Menționăm unele consecințe ce decurg din această formulă. Dacă una din funcțiile P sau Q se anulează pe suprafața Γ, atunci integrala de suprafață dispare și se obține o formulă mai simplă

$$\int_\Omega P \frac{\partial Q}{\partial x_k} \, dx = -\int_\Omega Q \frac{\partial P}{\partial x_k} \, dx.$$

Să examinăm o integrală de un tip mai complicat:

$$\int_\Omega P \frac{\partial^k Q}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} \, dx.$$

Dacă funcția P are derivatele continue, atunci, integrînd de k ori prin părți, funcția Q din expresia integrandului poate fi eliberată de sub acțiunea operatorului de diferențiere

$$\int_\Omega P \frac{\partial^k Q}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} \, dx = -\int_\Omega \frac{\partial P}{\partial x_1} \frac{\partial x^{k-1} Q}{\partial x_1^{k_1 - 1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} \, dx +$$

$$+ \int_\Gamma P \frac{\partial^{k-1} Q}{\partial x_1^{k-1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} \cos(\nu, x_1) \, d\Gamma = \ldots$$

$$\ldots = (-1)^k \int_\Omega Q \frac{\partial^k P}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} \, dx + \int_\Gamma R(P, Q) \, d\Gamma,$$

unde prin $R(P, Q)$ s-a notat expresia care depinde de funcțiile P, Q și derivatele lor pînă la ordinul $k-1$ inclusiv.

Fie Ω un domeniu și fie funcțiile $u, w \in L_{1\text{oc}}(\Omega)$; în particular, u, w sînt integrabile pe orice subdomeniu interior al lui Ω. Să admitem că pentru orice funcție $\varphi \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$ (vezi notația din introducere, § 2) are loc identitatea

$$\int_\Omega u\, D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^k \int_\Omega v\varphi \, dx, \quad k = |\alpha|, \tag{1}$$

unde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ este un multiindice. Atunci $v(x)$ se numește *derivata generalizată* de ordinul k a funcției $u(x)$ în domeniul Ω. Pentru notarea derivatei generalizate se folosește simbolul obișnuit și se scrie

$$v(x) = D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}. \tag{2}$$

Teorema 2.3.1 *Derivata generalizată* (2) *este unică.*

Să demonstrăm că dacă funcțiile $u(x)$, $v_1(x)$, $v_2(x) \in L_{1\text{oc}}(\Omega)$ și pentru orice funcție $\varphi \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$ satisfac identitățile

$$\begin{aligned} \int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx &= (-1)^k \int_\Omega v_1 \varphi \, dx, \\ \int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx &= (-1)^k \int_\Omega v_2 \varphi \, dx, \end{aligned} \tag{3}$$

unde α este un multiindice și $k = |\alpha|$, atunci $v_1 \equiv v_2$. Scăzînd a doua indentitate (3) din prima și punînd $v_1(x) - v_2(x) = w(x)$, obținem identitatea

$$\int_\Omega w(x)\, \varphi(x) \, dx = 0, \tag{4}$$

adevărată pentru orice $\varphi \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$. Să arătăm că identitatea (4) este adevărată pentru orice funcție $\varphi(x)$ măsurabilă, mărginită și egală cu zero într-o bandă frontieră. Fie $\varphi(x)$ o astfel de funcție și fie că ea este egală cu zero în banda frontieră δ. Luăm $h < \delta/2$ și construim funcția de medie $\varphi_h(x)$. Ea este indefinit derivabilă și egală cu zero în banda frontieră de lățime $\delta - h$. Deci $\varphi_h \in \mathfrak{M}^{(\infty)}(\Omega)$ și cu

atît mai mult $\varphi_h \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$. Pentru funcția $\varphi_h(x)$ este adevărată identitatea

$$\int_\Omega w(x)\, \varphi_h(x) \, dx = 0. \tag{5}$$

Se observă ușor că pentru orice h funcțiile $\varphi_h(x)$ sînt mărginite de una și aceeași constantă: dacă $|\varphi(x)| < N = \text{const}$, atunci

$$|\varphi_h(x)| = \left| \int_{r<h} \varphi(y)\, \omega_h(r)\, dy \right| \leqslant N \int_{r<h} \omega_h(r)\, dy = N.$$

Funcția φ măsurabilă și mărginită în Ω este de pătrat integrabil în Ω. Conform teoremei 2.2.3 avem $\| \varphi_h - \varphi \|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$. Conform cunoscutei teoreme a șirurilor de funcții convergente în medie[1]), se poate alege un subșir $h_n \to 0$, astfel încît $\varphi_{h_n}(x) \to \varphi(x)$ aproape peste tot în Ω.

Punem în identitatea (5) $h = h_n$. Pentru fiecare n, $|w(x)\varphi_{h_n}(x)| = N|w(x)|$ și pentru $n \to \infty$, $w(x)\varphi_{h_n}(x)$ converge aproape peste tot la $w(x)\varphi(x)$. Conform teoremei lui Lebesgue de trecere la limită sub integrală, obținem $\int_\Omega w(x)\varphi(x)dx = 0$, ceea ce trebuia să demonstrăm.

Să punem în identitatea (4)

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_{\delta/2}, \\ \operatorname{sign} w(x), & x \in \Omega' = \Omega \setminus \Omega_{\delta/2}, \end{cases}$$

atunci $\int_{\Omega'} |w(x)|\, dx = 0$ și prin urmare $w(x) \equiv 0$, $x \in \Omega'$. Deoarece $\delta > 0$ este arbitrar rezultă că $w(x) \equiv 0$ pe Ω.

Dacă funcția $u(x)$ este continuă în Ω împreună cu derivatele sale pînă la ordinul k inclusiv, atunci derivatele sale generalizate de ordinul k există și coincid cu cele clasice. Într-adevăr, integrala din partea stîngă a formulei (1) poate fi calculată prin părți; în acest calcul integralele de suprafață dispar deoarece pe frontiera lui Ω atît funcția

[1]) Vezi, de exemplu, I. P. Natanson, *Teoria funcțiilor de variabile reale*, ed. II-a, Fizmatghiz, Moscova, 1957, p. 184.

φ, cît și derivatele sale pînă la ordinul $(k-1)$ inclusiv sînt egale cu zero. Ca urmare se obține egalitatea

$$\int_\Omega u \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} \, dx = (-1)^k \int_\Omega \varphi \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} \, dx, \tag{6}$$

în al cărui membru drept figurează derivata în sens clasic a lui u. Egalitatea (6) arată că în acest caz derivata generalizată există și este egală cu derivata în sens clasic

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}}.$$

Exemple. **1.** Fie Ω intervalul $(-1,1)$. Funcția $u(x) = |x|$ are derivata generalizată $u'(x) = \operatorname{sign} x$. Într-adevăr, fie $\varphi(x) \in \mathfrak{M}^{(1)}(-1, +1)$, atunci $\varphi(x)$ este continuu diferențiabilă pe $[-1, +1]$ și $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$. Are loc egalitatea

$$\int_{-1}^{1} |x| \varphi'(x) \, dx = -\int_{-1}^{0} x\varphi'(x) \, dx + \int_{0}^{1} x\varphi'(x) \, dx.$$

Integrînd prin părți, obținem

$$\int_{-1}^{1} |x| \varphi'(x) \, dx = \int_{-1}^{0} \varphi(x) \, dx - \int_{0}^{1} \varphi(x) \, dx = -\int_{-1}^{1} \varphi(x) \operatorname{sign} x \, dx. \tag{7}$$

și afirmația a fost demonstrată.

2. Funcția sign x nu are în intervalul $(-1, 1)$ derivată generalizată de ordinul întîi (deși are ca și funcția $|x|$ derivată clasică în orice punct $x \neq 0$). Pentru a ne convinge de acest lucru observăm că pentru $\varphi \in \mathfrak{M}^{(1)}(-1,1)$

$$\int_{-1}^{1} \varphi'(x) \operatorname{sign} x \, dx = -\int_{-1}^{0} \varphi'(x) \, dx + \int_{0}^{1} \varphi'(x) \, dx = -2\varphi(0). \tag{8}$$

Nu există însă o funcție $v(x)$ local integrabilă în intervalul $(-1,1)$ astfel încît pentru orice $\varphi(x) \in \mathfrak{M}^{(1)}(-1, +1)$ să fie satisfăcută identitatea

$$\int_{-1}^{+1} v(x) \, \varphi(x) \, dx = 2\varphi(0). \tag{9}$$

Să presupunem că o astfel de funcție există, atunci funcția $V(x) = \int_0^x v(y) dy$ este absolut continuă pe orice segment $[a, b] \subset (-1,1)$ și are derivata de ordinul întîi $v(x)$ integrabilă

pe $[a, b]$. Integrala (9) poate fi calculată prin părți conform formulei (8) și se obține identitatea adevărată pentru orice $\varphi(x) \in \mathfrak{M}^{(1)}(-1,1)$

$$\int_{-1}^{+1} \varphi'(x)[\operatorname{sign} x - V(x)] \, dx = 0.$$

Dar atunci [1] sign $x = V(x) + \text{const}$, $x \in (-1, +1)$, ceea ce este absurd deoarece în punctul $x = 0$ funcția din partea stîngă a acestei egalități este discontinuă, iar cea din partea dreaptă este continuă.

3. Fie funcțiile $f(t)$ și $g(t)$ continue pe $[-1, 1]$, dar nediferențiabile în nici un punct al acestui segment. Se poate demonstra că funcția de două variabile, continuă în pătratul $0 \leqslant x_1, x_2 \leqslant 1$:

$$u(x) = u(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2) \tag{10}$$

nu are derivată generalizată de ordinul întîi. Totuși această funcție are derivata generalizată de ordinul al doilea $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$ și această derivată este nulă. Pentru a stabili acest lucru este suficient să se arate că pentru orice funcție $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2) \in \mathfrak{M}^{(2)}(\Omega)$, unde Ω este pătratul $-1 \leqslant x_1, x_2 \leqslant 1$, este adevărată identitatea

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} u(x_1 x_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \, dx_1 \, dx_2 = 0.$$

Dar această identitate rezultă din șirul de egalități

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} u(x_1, x_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \, dx_1 \, dx_2 = \int_{-1}^{+1} f(x_1) \left\{ \int_{-1}^{+1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \, dx_2 \right\} dx_1 +$$

$$+ \int_{-1}^{+1} g(x_2) \left\{ \int_{-1}^{+1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \, dx_1 \right\} dx_2 =$$

$$= \int_{-1}^{+1} f(x_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \Big|_{x_2=-1}^{x_2=+1} dx_1 + \int_{-1}^{+1} g(x_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \Big|_{x_1=-1}^{x_1=+1} dx_2 = 0.$$

Acest exemplu arată că din existența unei derivate generalizate de un ordin oarecare nu rezultă existența derivatelor generalizate de ordin inferior.

---

[1] Vezi, de exemplu, [44], teorema 12.

§ 4. CELE MAI SIMPLE PROPRIETĂȚI ALE DERIVATEI GENERALIZATE

Teorema 2.4.1. *Să admitem că în domeniul* Ω *funcția* $u(x)$ *are derivata generalizată* $v(x)$ *de tipul* (1.2) : $v(x) = D^\alpha u(x)$ *și fie* $u_h(x)$ *și* $v_h(x)$ *funcțiile de medie corespunzătoare. Atunci în domeniul* $\Omega \setminus \Omega_h$, $v_h(x) = D^\alpha u_h(x)$.

Reamintim că Ω_h reprezintă o bandă frontieră a domeniului Ω de lățime h. Mulțimea $\Omega \setminus \Omega_h$ este deschisă și dacă $x \in \Omega \setminus \Omega_h$, distanța de la punctul x pînă la frontiera domeniului Ω este mai mare decît h, astfel că nucleul de mediere $\omega_h(r) \in \mathfrak{M}^{(\infty)}(\Omega)$. Conform formulei (1.1)

$$\int_\Omega u(y)\, D_y^\alpha \omega_h(r)\, dy = (-1)^k \int_\Omega u(y)\, \omega_h(r)\, dy = (-1)^k v_h(x); \qquad (1)$$

unde s-a notat $|\alpha| = k$. Nucleul de mediere $\omega_h(r)$ depinde numai de distanța $r = \|x - y\|$, deci $D_y^\alpha \omega_h(r) = (-1)^k D_x^\alpha \omega_h(r)$. Substituind aceasta în formula (1), obținem

$$v_h(x) = D^\alpha u_h(x).$$

Teorema 2.4.2. *Fie* Ω' *un subdomeniu al lui* Ω. *Dacă* $v(x)$ *este derivata generalizată a lui* $u(x)$

$$v(x) = D^\alpha u(x), \quad |\alpha| = k, \qquad (2)$$

în Ω, *atunci* $v(x)$ *este derivata generalizată a lui* $u(x)$ *și în domeniul* Ω'.

Fie $\varphi \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega')$. Să prelungim cu zero funcția $\varphi(x)$ în $\Omega \setminus \Omega'$. Evident, atunci $\varphi \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$. Aplicăm funcțiilor $u(x)$ și $\varphi(x)$ formula (3.1). Eliminînd în ambele părți ale acestei formule integrabilele pe $\Omega \setminus \Omega'$, care sînt nule, obținem formula

$$\int_{\Omega'} u D^\alpha \varphi\, dx = (-1)^k \int_{\Omega'} v\varphi\, dx,$$

care arată că $v = D^\alpha u$ în subdomeniul Ω'.

Teorema 2.4.3. *Dacă în domeniul* Ω *funcția* $v(x)$ *este derivata generalizată a lui* $u(x)$ *de tipul* $v(x) = D^\alpha u(x)$, *iar* $w(x)$ *este derivata generalizată a lui* $v(x)$ *de tipul* $w(x) = D^\beta v(x)$ *în același domeniu, atunci* $w(x) = D^{\alpha+\beta} u(x)$ *în* Ω.

Notăm $|\alpha| = k$, $|\beta| = l$, și fie $\varphi \in \mathfrak{M}^{(k+1)}(\Omega)$. Atunci $D^\alpha \varphi \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$ și conform formulei (1.1) :

$$\int_\Omega u D^{\alpha+\beta} \varphi\, dx = (-1)^k \int_\Omega v D^\beta \varphi\, dx;$$
$$\int_\Omega v D^\beta \varphi\, dx = (-1)^l \int_\Omega w\varphi\, dx. \qquad (3)$$

Substituind ultima egalitate în (3), obținem formula

$$\int_\Omega u D^{\alpha+\beta} \varphi\, dx = (-1)^{k+l} \int_\Omega w\varphi\, dx,$$

ceea ce este echivalent cu afirmația teoremei.

Lema 2.4.1. *Să admitem că* $u(x)$ *are în domeniul* Ω *derivata generalizată* $\dfrac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}$, *precum și toate derivatele generalizate de ordin inferior. Dacă funcția* $\zeta(x) \in C^{(k)}(\Omega)$, *atunci există derivata generalizată* $\dfrac{\partial^k (\zeta u)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}$, *care se poate calcula conform regulei obișnuite de diferențiere a unui produs.*

Fie $u_h(x)$ o funcție de medie. Dacă $\varphi \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$, atunci este valabilă formula de integrare prin părți

$$\int_\Omega u_h \zeta \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}\, dx = (-1)^k \int_\Omega \varphi\, \frac{\partial^k (u_h \zeta)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}\, dx =$$
$$= (-1)^k \sum \int_\Omega \varphi\, \frac{\partial^\mu \zeta}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_\mu}}\, \frac{\partial^\nu u_h}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_\nu}}\, dx, \qquad (4)$$

unde, conform regulei de diferențiere a produsului, suma se face după toate posibilitățile de alegere ale indicilor $j_1, j_2, \dots, j_\mu$ și $l_1, l_2, \dots, l_\nu$, astfel încît reuniunea lor să dea $i_1, i_2, \dots, i_k$. Fie $\varphi = 0$ în banda frontieră Ω_δ. În domeniul $\Omega \setminus \Omega_\delta$, pe care se efectuează în fapt integrarea în formula (4),

$$u_h \xrightarrow[h \to 0]{} u, \quad \frac{\partial^\nu u_h}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_\nu}} \xrightarrow[h \to 0]{} \frac{\partial^\nu u}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_\nu}}$$

în metrica lui L_1; prima relație rezultă din teorema 2.2.3, a doua din teoremele 2.2.3 și 2.4.1. Trecînd la limită sub semnul integralei, ceea ce evident este admisibil, obținem formula

$$\int_\Omega u\zeta \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \, dx =$$

$$= (-1)^k \int_\Omega \varphi \sum \frac{\partial^\mu \zeta}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_\mu}} \frac{\partial^\nu u}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_\nu}} \, dx.$$

Din această formulă, conform definiției, rezultă că derivata generalizată

$$\frac{\partial^k (\zeta u)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}$$

există și

$$\frac{\partial^k (\zeta u)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} = \sum \frac{\partial^\mu \zeta}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_\mu}} \frac{\partial^\nu u}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_\mu}}.$$

§ 5. PROPRIETĂȚI DE CONVERGENȚĂ ALE DERIVATELOR GENERALIZATE

Teorema 2.5.1. *Fie funcțiile $u_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, care au derivate generalizate de același tip $v_n(x) = D^\alpha u_n(x)$ în domeniul mărginit $\Omega \in E_m$. Dacă ambele șiruri $\{u_n\}$ și $\{v_n\}$ converg în metrica lui $L_1(\Omega)$ la $u(x)$, respectiv $v(x)$, atunci funcția $v(x)$ este derivata generalizată a lui $u(x)$, $v(x) = D^\alpha u(x)$ în domeniul Ω.*

Conform definiției derivatei generalizate,

$$\int_\Omega u_n D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^k \int_\Omega v_n \varphi \, dx; \quad k = |\alpha|, \ \forall \varphi \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega). \tag{1}$$

Deoarece pentru orice $\varphi \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$ funcționalele $u \in L_1$, $u \to \int_\Omega u\varphi \, dx$ și, respectiv, $u \in L_1$, $u \to \int_\Omega u D^\alpha \varphi(x) \, dx$, sînt liniare și continue pe L_1, trecînd la limită în egalitatea (1), se obține formula (3.1).

Teorema 2.5.2 *Fie $u, v \in L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ și $v(x)$ derivata generalizată a lui $u(x)$ în Ω nu neapărat mărginit, $v(x) = D^\alpha u(x)$. Atunci în orice subdomeniu interior finit $\Omega' \subset \Omega$ se poate construi un șir de funcții indefinit derivabile astfel încît în metrica spațiului $L_p(\Omega')$,*

$$u_n \to u, \ D^\alpha u \to v. \tag{2}$$

Pentru demonstrație se poate lua $u_n(x) = u_{h_n}(x)$, unde h_n este un șir de numere pozitive ce tinde la zero. Atunci prima relație din (2) rezultă din teorema 2.2.3, iar a doua din teoremele 2.2.3 și 2.4.1.

§ 6. CAZUL UNEI SINGURE VARIABILE INDEPENDENTE

În acest caz clasa funcțiilor care au derivată generalizată de ordinul întîi este strîns legată de clasa funcțiilor absolut continue. Amintim că funcția $u(x)$ de variabilă reală x este absolut continuă pe segmentul $[a, b]$, dacă există o funcție $v(x)$ integrabilă pe $[a, b]$ astfel încît

$$u(x) = \int_a^x v(t) \, dt + \text{const}, \quad x \in [a, b].$$

Din cunoscutele teoreme ale lui Lebesgue rezultă că funcția $u(x)$ are derivata în sens clasic egală cu $v(x)$ aproape peste tot în $[a, b]$.

Teorema 2.6.1 *Fie $u, v \in L_p(a, b)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, și (a, b) un interval finit. Fie, de asemenea, $v(x)$ derivata generalizată de ordinul întîi a lui $u(x)$ pe intervalul (a, b): $v(x) = du(x)/dx$. Atunci funcția $u(x)$ este absolut continuă pe $[a, b]$ și are derivata în sens clasic egală cu $v(x)$ aproape peste tot în (a, b).*

Punem

$$w(x) = \int_a^x v(y) \, dy. \tag{1}$$

Funcția w este absolut continuă pe segmentul $[a, b]$ și are derivata în sens clasic egală cu $v(x)$ aproape peste tot pe acest segment. Fie $\varphi(x) \in \mathfrak{M}^{(1)}(a, b)$. Integrînd prin părți, obținem

$$\int_a^b w(y) \, \varphi'(y) \, dy = w(y) \, \varphi(y) \Big|_a^b - \int_a^b \varphi(y) w'(y) \, dy = - \int_a^b \varphi(y) \, v(y) \, dy.$$

Pe de altă parte, conform definiției derivatei generalizate,

$$\int_a^b u(y)\,\varphi'(y)\,dy = -\int_a^b \varphi(y)\,v(y)\,dy.$$

Scăzînd, obținem

$$\int_a^b [u(y) - w(y)]\varphi'(y)\,dy = 0. \tag{2}$$

Fie $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Repetînd raționamentele de la teorema 2.3.1, obținem că identitatea (2) este adevărată pentru orice funcție $\varphi(x)$, $\varphi \in C[a, b] \cap C^{(1)}[\alpha, \beta]$ și nulă în exteriorul segmentului $[\alpha, \beta]$. Punînd $\varphi(x) = \sin nt$, $t = \pi(x - \alpha)/(\beta - \alpha)$, $n = 1, 2, \ldots$, pe $[\alpha, \beta]$ și $\varphi(x) = 0$ în exteriorul lui $[\alpha, \beta]$, observăm că pe $[\alpha, \beta]$ diferența $u(x) - w(x)$ și $\cos nt$, $n = 1, 2, \ldots$, sînt ortogonale. În consecință această diferență este constantă:

$$u(x) = c + w(x) = c + \int_a^x v(y)\,dy, \quad c = \text{const.} \tag{3}$$

Deoarece $[\alpha, \beta]$ este un segment arbitrar inclus în intervalul (a, b), egalitatea (3) este adevărată pe (a, b). Alegînd constanta c astfel încît

$$u(b) = c + \int_a^b v(y)\,dy,$$

egalitatea (3) este adevărată pe $[a, b]$.

Corolarul 2.6.1. *Fie $u \in L_p(a, b)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ și (a, b) un interval finit. Fie $v(x)$ derivata generalizată de ordinul k a lui $u(x)$. Atunci $u(x)$ este de $k - 1$ ori continuu diferențiabilă pe $[a, b]$ și are derivată în sens clasic $u^k(x) = v(x)$, aproape peste tot pe acest interval. Mai mult, derivata $u^{k-1}(x)$ este absolut continuă pe segmentul $[a, b]$.*

În paragraful următor se va demonstra o teoremă care poate fi considerată ca o generalizare a teoremei 2.6.1 la cazul mai multor variabile independente.

§ 7. CU PRIVIRE LA O PROPRIETATE A FUNCȚIILOR CARE AU DERIVATĂ GENERALIZATĂ DE ORDINUL ÎNTÎI

Teorema 2.7.1. *Fie $u(x)$ o funcție integrabilă într-un domeniu mărginit $\Omega \subset E_m$ avînd derivata generalizată de ordinul întîi $v_j = \partial u/\partial x_j$ de asemenea integrabilă în Ω și fie λ intersecția domeniului Ω cu o dreaptă paralelă cu axa x_j. Atunci, aproape pe orice secțiune λ funcția $u(x)$ este absolut continuă în raport cu x_j și derivata sa în raport cu x_j coincide aproape peste tot cu derivata generalizată $v_j(x)$.*

Pentru simplificarea scrierii numerotăm axele de coordonate astfel încît $j = 1$. Secțiunea λ este o mulțime deschisă unidimensională și deci este reuniunea unui număr finit sau numărabil de intervale. Fie (α, β) unul din aceste intervale; evident, punctele α și β aparțin lui $\partial\Omega$. Conform teoremei lui Fubini $u(x)$ și $v_1(x)$ sînt integrabile aproape pe orice interval de acest fel. Notăm $x' = (x_2, x_3, \ldots, x_m)$; pe fiecare secțiune λ punctul x' este constant. Orice funcție de x poate fi considerată ca funcție de x_1 și x'; deci putem scrie $u(x) = u(x_1, x')$ și așa mai departe. Pe intervalul ales (α, β) să examinăm funcția

$$w(x) = w(x_1, x') = \int_\alpha^{x_1} v_1(t, x')\,dt;$$

ca funcție de x_1 ea este absolut continuă pe $[\alpha, \beta]$ și are derivata $\partial w/\partial x_1 = v_1(x_1, x') = v_1(x)$ aproape peste tot pe acest segment. Fie $\varphi \in \mathring{W}_1^{(1)}(\Omega)$, atunci, în particular, $\varphi(\alpha, x') = \varphi(\beta, x') = 0$. Integrînd prin părți, obținem

$$\int_\alpha^\beta w(x)\,\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1}\,dx_1 = -\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,v_1(x)\,dx_1.$$

Sumînd după toate intervalele a căror reuniune este λ, obținem

$$\int_\lambda w(x)\,\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1}\,dx_1 = -\int_\lambda \varphi(x)\,v_1(x)\,dx_1.$$

Fie Σ proiecția lui Ω pe planul $(m - 1)$-dimensional de coordonate $x_2, x_3, \ldots, x_m$. Integrînd ultima identitate pe Σ, obținem

$$\int_\Omega w(x)\,\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1}\,dx = -\int_\Omega \varphi(x)\,v_1(x)\,dx.$$

Totodată, conform definiției derivatei generalizate,

$$\int_\Omega u(x)\,\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_1} = -\int_\Omega \varphi(x)\,v_1(x)\,dx.$$

Alegem drept $\varphi(x)$ nucleul de mediere $\omega_h(r)$, unde $h<\delta$ și δ este fixat. Atunci în $\Omega\setminus\Omega_\delta$

$$\frac{\partial w_h(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial u_h(x)}{\partial x_1}$$

și prin urmare diferența $w_h(x) - u_h(x)$ nu depinde de x_1. Trecînd la limită cu $h\to 0$, observăm că $w(x)-u(x)$ nu depinde de x_1. Fixăm x' astfel încît pe secțiunea corespunzătoare λ funcția $w(x)$ să fie, absolut continuă în raport cu x_1. Atunci pe orice interval $(\alpha, \beta)\in\lambda$,

$$u(x) = \int_\alpha^{x_1} v_1(t, x')\,dt + \text{const}.$$

Reciproca teoremei este de asemenea adevărată.

Teorema 2.7.2. *Fie u o funcție integrabilă în domeniul mărginit $\Omega\subset E_m$ și absolut continuă aproape pe toate intersecțiile domeniului Ω cu o dreaptă paralelă cu axa x_j. Fie $v_j = \partial u/\partial x_j$ integrabilă în Ω. Atunci v_j este derivata generalizată în Ω a lui u în raport cu x_j.*

Păstrînd notațiile de la teorema anterioară, avem

$$\forall\varphi\in\mathfrak{M}^{(1)}(\Omega),\quad \int_\Omega u\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,dx = \int_\Sigma\left\{\int_\lambda u\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,dx_j\right\}dx'\ldots$$

Fie λ o secțiune pe care funcția u este absolut continuă. Integrînd prin părți, obținem

$$\int_\lambda u\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,dx_j = -\int_\lambda v_j\varphi\,dx_j$$

și în consecință

$$\int_\Omega u\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,dx = -\int_\Sigma\left\{\int_\lambda v_j\varphi\,dx_j\right\}dx' = -\int_\Omega v_j\varphi\,dx.$$

Corolarul 2.7.1. *Dacă funcția $u\in Lip_1(\bar\Omega)$, atunci ea are în Ω toate derivatele generalizate de ordinul întîi și aceste derivate sînt mărginite.*

§ 8. DERIVATELE INTEGRALELOR CU SINGULARITATE SLABĂ

Teorema 2.8.1. *Fie Ω un domeniu mărginit din E_m și*

$$u(x) = \int_\Omega \frac{A(x, y)}{r^\lambda}\,\rho(y)\,dy, \tag{1}$$

unde $\lambda < m-1$ și $\rho\in L_p(\Omega)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$; totodată funcțiile $A(x, y)$ și $\partial A(x, y)/\partial x_j$ sînt presupuse continue în $\bar\Omega\times\bar\Omega$. Atunci există derivata generalizată

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{A(x, y)}{r^\lambda}\right]\rho(y)\,dy, \tag{2}$$

care este de clasă $C(\bar\Omega)$, dacă $(\lambda+1)p' < m$, și de clasă $L_q(\Omega)$, $q < mp/[m-(m-\lambda-1)p]$, dacă $(\lambda+1)p'\geqslant m$.

Fie $\rho\in C(\bar\Omega)$. Avem $(\lambda+1+\varepsilon<m)$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{A(x, y)}{r^\lambda}\right] = \frac{B(x, y)}{r^{\lambda+1+\varepsilon}}\ ;\quad B(x, y) = r^\varepsilon\left[r\,\frac{\partial A}{\partial x_j} + \lambda A\,\frac{y_j - x_j}{r}\right],$$

de unde rezultă evident că $B\in C(\bar\Omega\times\bar\Omega)$. Deoarece $\lambda+1+\varepsilon<m$, integrala (2) este uniform convergentă (vezi demonstrația teoremei 1.3.1), ceea ce justifică derivarea în (1) conform formulei (2).

Fie $\rho\in L_p(\Omega)$. Să considerăm funcția de medie $\rho_h(y)$ și integrala

$$u(x, h) = \int_\Omega \frac{A(x, y)}{r^\lambda}\,\rho_h(y)\,dy.$$

Funcția $\rho_h(y)$ este continuă în $\bar\Omega$; conform demonstrației există derivata

$$\frac{\partial u(x, h)}{\partial x_j} = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{A(x, y)}{r^\lambda}\right]\rho(y)\,dy.$$

Dacă $h \to 0$, atunci, conform teoremei 2.2.3, $\rho_h \to \rho$ în metrica lui $L_p(\Omega)$. Din teorema 1.3.2 rezultă acum că cel puțin în metrica lui $L(\Omega)$, $u(x, h) \to u(x)$ și

$$\frac{\partial u(x, h)}{\partial x_j} \to \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{A(x, y)}{r^{\lambda}} \right] \rho(y)\, dy.$$

În baza teoremei 2.5.1, derivata generalizată $\partial u/\partial x_j$ există și se exprimă prin formula (2). Celelalte afirmații decurg din teoremele 1.3.1 și 1.3.2.

Capitolul 3

SPAȚII DE FUNCȚII CU DERIVATE GENERALIZATE[1]

§ 1. DEFINIȚIA SPAȚIILOR $W_p^{(k)}$

Fie $\Omega \subset E_m$ un domeniu mărginit cu frontieră netedă pe porțiuni; mai jos se vor pune lui Ω restricții suplimentare. Să examinăm mulțimea funcțiilor care sînt integrabile în Ω și au toate derivatele generalizate de ordinul k dat, p-integrabile în Ω. Această mulțime este evident liniară. Definim o normă pe ea conform formulei

$$\|u\|_{p,k} = \|u\|_1 + \sum_{|\alpha|=k} \|D^{\alpha} u\|_p. \tag{1}$$

Mulțimea considerată devine astfel un spațiu normat care se numește *spațiu Sobolev*[2] și se notează cu $W_p^{(k)}(\Omega)$. Faptul că norma se introduce conform formulei (1) nu este esențial: pe $W_p^{(k)}(\Omega)$ se pot introduce și alte norme echivalente cu norma (1). Astfel sînt, de exemplu, normele:

$$\|u\|'_{p,k} = \|u\|_1 + \left\{ \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=k} |D^{\alpha} u|^p \, dx \right\}^{1/p} = \|u\|_1 + \left\{ \sum_{|\alpha|=k} \|D^{\alpha} u\|_p^p \right\}^{1/p} \tag{1a}$$

și

$$\|u\|''_{p,k} = \|u\|_1 + \left\{ \int_{\Omega} \left[\sum_{|\alpha|=k} (D^{\alpha} u)^2 \right]^{p/2} dx \right\}^{1/p}; \tag{1b}$$

norma (1b) prezintă avantajul că este invariantă în raport cu rotația axelor de coordonate. Simbolul $\|\cdot\|_{p,k}$ va desemna în cele ce urmează orice normă echivalentă cu norma (1).

---

[1] Spațiile de funcții cu derivate generalizate au fost introduse pentru prima oară de S. L. Sobolev în anul 1936. O expunere destul de completă a teoriei acestor spații, împreună cu cele mai importante aplicații în fizica matematică a fost dată de S. L. Sobolev în cartea sa [46] (vezi, de asemenea, [44]). Ulterior teoria spațiilor de funcții cu derivate generalizate a cunoscut o dezvoltare considerabilă.

[2] În literatura de specialitate se mai întîlnește noțiunea de spațiu Sobolev pentru mulțimea $W_p^k(\Omega) = \{u : D^{\alpha} u \in L_p(\Omega), |\alpha| \leqslant k\}$ înzestrată cu norma

$$\|u\|_{p,k} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^{\alpha} u\|^p_{L_p(\Omega)} \right)^{1/p} - (N \cdot T).$$

Teorema 3.1.1. *Spaţiul $W_p^{(k)}(\Omega)$ este complet.*
Fie $u_n \in W_p^{(k)}(\Omega)$, $n=1, 2, \ldots$, şi $\|u_n - u_s\|_{p,k} \xrightarrow[n,s\to\infty]{} 0$; să admitem că norma pe $W_p^{(k)}(\Omega)$ este dată de formula (1). Ţinînd seama de relaţia (1), din $\|u_n - u_s\|_{p,k} \xrightarrow[n,s\to\infty]{} 0$ rezultă că

$$\|u_n - u_s\|_1 \xrightarrow[n,s\to\infty]{} 0, \quad \|D^\alpha u_n - D^\alpha u_s\|_p \xrightarrow[n,s\to\infty]{} 0.$$

Pentru orice p spaţiul $L_p(\Omega)$ este complet, prin urmare, există funcţiile $u \in L_p(\Omega)$ şi $v_\alpha \in L_p(\Omega)$, $|\alpha| = k$, astfel încît $\|u_n - u\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ şi $\|D^\alpha u_n - v_\alpha\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Din formula (3.11) cap. 1 rezultă totodată că $\|D^\alpha u_n - v_\alpha\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Conform teoremei 2.5.1 există derivatele generalizate $D^\alpha u = v_\alpha$, $|\alpha| = k$. Cum $u \in L_1(\Omega)$ şi $D^\alpha u \in L_p(\Omega)$, $|\alpha| = k$ rezultă că $u \in W_p^k(\Omega)$. Deci

$$\|u_n - u\|_{p\,k} = \|u_n - u\|_1 + \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u_n - v_\alpha\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Se poate demonstra că spaţiile Sobolev sînt separabile; vezi, de exemplu, [44].

Remarcăm că pentru $k = 0$ spaţiul $W_p^{(k)}(\Omega)$ se reduce la spaţiul $L_p(\Omega)$.

Într-o serie de cazuri prezintă interes spaţiile $W_p^k(\Omega)$ cu exponenţii k neîntregi; ele se definesc în modul următor. Fie $k = l + \lambda$ unde $l \geqslant 0$ este un număr întreg şi $0 < \lambda < 1$. În acest caz elementele spaţiului $W_p^{(k)}(\Omega)$ sînt funcţii din $W_p^{(l)}(\Omega)$, pentru care integrala

$$J(u) = \int_\Omega \int_\Omega \sum_{|\alpha|=l} \frac{|D^\alpha u(y) - D^\alpha u(x)|^p}{|y - x|^{m+\lambda p}} \, dx dy \qquad (2)$$

este convergentă; norma pe $W_p^{(k)}(\Omega)$ este dată de formula

$$\|u\|_{W_p^{(k)}} = \|u\|_{W_p^{(l)}} + [J(u)]^{1/p}. \qquad (3)$$

În locul normei (3) se poate introduce orice normă echivalentă cu ea.

În legătură cu aplicaţiile spaţiilor $W_p^{(k)}$ cu exponenţi k neîntregi vezi cap. 17; în paragrafele următoare din acest capitol vor fi studiate numai spaţii Sobolev cu exponenţi întregi.

Noţiunea de spaţiu $W_p^{(k)}$ poate fi extinsă şi la cazul în care funcţiile considerate sînt definite nu neapărat pe domenii ale spaţiilor

euclidiene, ci şi pe varietăţi suficient de regulate. Fie Γ o varietate m-dimensională. Să admitem că ea se reprezintă ca o reuniune finită de subvarietăţi de aceeaşi dimensiune: $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{N} \Gamma_j$, $N < \infty$, şi că fiecare subvarietate Γ_j poate fi aplicată biunivoc şi bicontinuu pe un domeniu D_j, $D_j \in E_m$, cu ajutorul transformării $\xi = \varphi_i(x)(\xi \in \Gamma, x \in E_m)$ care este de $[k]$ ori continuu diferenţiabilă pe $\bar{D}_j$. Vom spune că $u \in W_p^{(k)}(\Gamma)$ dacă $u(\varphi_j) \in W_p^{(k)}(D_j)$, $j = 1, 2, \ldots, N$. Norma pe $W_p^{(k)}(\Gamma)$ se poate defini, de exemplu, prin formula

$$\|u\|_{W_p^{(k)}(\Gamma)} = \sum_{j=1}^{N} \|u(\varphi_j)\|_{W_p^{(k)}(D_j)}.$$

§ 2. IDENTITATEA INTEGRALĂ A LUI SOBOLEV

Un domeniu se numeşte stelat în raport cu un punct oarecare, dacă orice semidreaptă care pleacă din acest punct intersectează frontiera domeniului într-un punct şi numai într-unul. Domeniul se numeşte stelat în raport cu o mulţime de puncte dacă este stelat în raport cu fiecare punct al acestei mulţimi.

Să examinăm domeniul Ω, stelat în raport cu bila B (fig. 1) a cărei rază o notăm cu a. Plasăm originea coordonatelor în centrul acestei bile şi notăm $v(y) = \omega_a(|y|)$, unde ω_a este nucleul de mediere definit de formulele (1.1) şi (1.2) cap. 2.

Fie x şi y puncte arbitrare din E_m. Notăm cu Θ versorul direcţiei de la x la y, cu Θ_j proiecţia acestui versor pe axa x_j. Ca de obicei, punem $r = |y - x|$. Fiecare funcţie de x şi y poate fi considerată ca funcţie de x, r şi Θ şi reciproc. În consecinţă vom scrie, de exemplu, $v(y) = v(x, r, \Theta)$. Să considerăm funcţiile

$$t(x, y) = t(x, r, \Theta) = -\int_r^\infty v(x, \rho, \Theta) \rho^{m-1} \, d\rho \qquad (1)$$

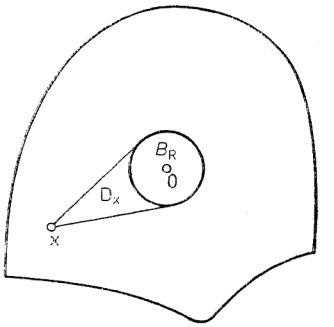

Fig. 1

şi

$$z(x, y) = z(x, r, \Theta) = \frac{1}{(k-1)!} r^{k-1} t(x, r, \Theta). \qquad (2)$$

Funcţiile $t(x, y)$ şi $z(x, y)$ sînt nenule numai pentru $y \in D_x$ limitat de frontiera bilei B, ∂B, şi conul cu vîrful în x tangent la ea; dacă

$x \in B$, D_x coincide cu B. În exteriorul și pe frontiera domeniului D_x funcțiile considerate sînt nule, cu excepția punctului $y = x$ în care funcția $t(x, y)$ nu este definită.

Fie funcția $u(x) \in C^{(k)}(\overline{\Omega})$, $k \geqslant 1$. Să construim funcția $U(x, r, \Theta)$, pe care o definim astfel: dacă $x \in \overline{\Omega}$, $y \in \overline{\Omega}$, atunci

$$U(x, r, \Theta) = u(y) \frac{\partial^{k-1} z}{\partial r^{k-1}} - \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^{k-2} z}{\partial r^{k-2}} + \ldots + (-1)^{k-1} \frac{\partial^{k-1} u}{\partial r^{k-1}} z, \tag{3}$$

iar dacă $x \in \overline{\Omega}$, $y \notin \overline{\Omega}$, atunci $U(x, r, \Theta) = 0$. Derivînd formula (3), obținem

$$\frac{\partial U}{\partial r} = u(y) \frac{\partial^k z}{\partial r^k} + (-1)^{k-1} \frac{\partial^k u}{\partial r^k} z. \tag{4}$$

Dacă în (3) se pune $r = 0$, atunci toți termenii din dreapta egalității se anulează cu excepția primului:

$$U(x, 0, \Theta) = u(x) t(x, 0, \Theta) = -u(x) \int_0^\infty v(x, r, \Theta) r^{m-1} \, dr. \tag{5}$$

Să integrăm (4) după r pe $(0, \infty)$. Folosind relația (5) obținem

$$u(x) \int_0^\infty v(x, r, \Theta) r^{m-1} dr = \int_0^\infty \left[u(y) \frac{\partial^k z}{\partial r^k} + (-1)^{k-1} z \frac{\partial^k u}{\partial r^k} \right] dr.$$

Înmulțind ultima egalitate cu dS_1 (elementul de suprafață al sferei unitate cu centrul în x) și integrînd pe această sferă, obținem

$$u(x) \int_{E_m} v(x, r, \Theta) dy = \int_{E_m} \left[u \frac{\partial^k z}{\partial r^k} + (-1)^{k-1} z \frac{\partial^k u}{\partial r^k} \right] \frac{dy}{r^{m-1}}. \tag{6}$$

Dar conform proprietății 3 (cap. 2, §1) a nucleului de mediere

$$\int_{E_m} v(x, r, \Theta) \, dy = \int_{E_m} v(y) dy = \int_{E_m} \omega_a(|y|) dy = 1.$$

Ținînd încă seama că integrala pe E_m din membrul drept al egalității (6) se reduce la integrala pe Ω, obținem *identitatea integrală a lui S. L. Sobolev*:

$$u(x) = \int_\Omega u(y) \frac{\partial^k z}{\partial r^k} \frac{dy}{r^{m-1}} + (-1)^{k-1} \int_\Omega z \frac{\partial^k u}{\partial r^k} \frac{dy}{r^{m-1}}. \tag{7}$$

Să studiem mai amănunțit identitatea (7). Să demonstrăm mai întîi că *prima integrală* din această formulă reprezintă *un polinom* în x de grad cel mult egal cu $k - 1$; coeficienții acestui polinom sînt integrale din produse ale funcției $u(y)$ cu anumite funcții mărginite.

Conform formulei lui Leibniz

$$\frac{\partial^k z}{\partial r^k} = \sum_{j=1}^{k} c_j r^{j-1} \frac{\partial^{j-1}}{\partial r^{j-1}} [r^{m-1} v(y)] = \sum_{j=1}^{k} \sum_{s=0}^{j-1} c_{js} r^{m+s-1} \frac{\partial^s v(y)}{\partial r^s}, \tag{8}$$

unde c_j și c_{js} sînt constante arbitrare. Avem de asemenea

$$\frac{\partial^s v(y)}{\partial r^s} = \sum_{|\alpha|=s} \frac{s!}{\alpha!} D_y^\alpha v(y) \Theta^\alpha. \tag{9}$$

Deoarece $\Theta_j = (y_j - x_j)/r$ este evident că produsul $r^s \Theta^\alpha$ este polinom de grad s în x și y_0. Din formula (8) se observă ușor că $\partial^k z / \partial r^k = r^{m-1} P_{k-1}(x, y)$, în polinomul $P_{k-1}(x, y)$ puterile lui x nedepășind valoarea $k - 1$, iar coeficienții acestui polinom sînt funcții de y continue în $\overline{\Omega}$:

$$P_{k-1}(x, y) = \sum_{|\alpha|=0}^{k-1} b_\alpha(y) x^\alpha; \quad b_\alpha \in C(\overline{\Omega}).$$

Din formula (9) se observă că funcțiile $b_\alpha(y)$ depind liniar de derivatele funcției $v(y)$ și deci $b_\alpha(y) = 0$, dacă $y \notin B$. Înlocuind în prima integrală din (7) pe $\partial^k z / \partial r^k$ cu expresia (8), obținem

$$\int_\Omega u(y) \frac{\partial^k z}{\partial r^k} \frac{\partial y}{r^{m-1}} = \sum_{|\alpha|=0}^{k-1} x^\alpha \int_\Omega b_\alpha(y) u(y) dy. \tag{10}$$

Să examinăm a doua integrală din formula (7). Analog formulei (9), avem

$$\frac{\partial^k u}{\partial r^k} = \sum_{|\alpha|=k} D_y^\alpha u(y) \Theta^\alpha,$$

deci

$$\int_\Omega z \frac{\partial^k u}{\partial r^k} \frac{dy}{r^{m-1}} = \int_\Omega \sum_{|\alpha|=k} \frac{A_\alpha(x, y)}{r^{m-k}} D_y^\alpha u(y) dy, \tag{11}$$

unde

$$A_\alpha(x, y) = \frac{1}{(k-1)!} t(x, r, \Theta)\Theta^\alpha \tag{12}$$

nu fu n cţii mărginite de x şi y, nule dacă $y \notin D_x$ şi indefinit derivabile dac ă $y \neq x$. Remarcăm de asemenea că funcţiile A_α sînt indefinit erivab ile în raport cu x, r şi Θ. Identitatea integrală (7) se poate epreze nta deci sub forma

$$u(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{k-1} x^\alpha \int_\Omega b_\alpha(y) u(y) dy + \sum_{|\alpha|=k} \int_\Omega \frac{A_\alpha(x, y)}{r^{m-k}} D_y^\alpha u(y) dy, \tag{13}$$

au, ţinî nd seama de proprietăţile funcţiilor $b_\alpha(y)$ şi $A_\alpha(x, y)$, sub forma

$$u(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{k-1} x^\alpha \int_B b_\alpha(y) u(y) dy + \sum_{|\alpha|=k} \int_{D_x} \frac{A_\alpha(x, y)}{r^{m-k}} D_y^\alpha u(y) dy \tag{14}$$

din care se observă că identitatea lui S. L. Sobolev permite expri marea funcţiei cu ajutorul derivatelor ei de ordin k şi a unui polinom de grad cel mult egal cu $k-1$.

Identitatea integrală a lui S. L. Sobolev s-a obţinut în ipotedr $u \in \mathring{C}^{(k)}(\Omega)$. Ea poate fi însă extinsă fără dificultate la funcţii din spaţiile $W_p^{(k)}(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Fie $u(x)$ o astfel de funcţie iar $u_h(x)$ funcţia de medie corespunzătoare. Aplicăm identitatea lui Sobolev funcţiilor $u_h(x)$ şi, conform formulei (14), avem

$$u_h(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{k-1} x^\alpha \int_B b_\alpha(y) u_h(y) dy + \sum_{|\alpha|=k} \int_{D_x} \frac{r^\varepsilon A_\alpha(x, y)}{r^{m-k+\varepsilon}} D_y^\alpha u_h(y) dy. \tag{15}$$

Conform teoremei 2.2.3, $u_h(y) \to u(y)$ în metrica lui $L_1(\Omega)$ şi cu atît mai mult în metrica lui $L_1(B)$. Integralele primei sume din (15) sînt funcţionale mărginite în $L_1(B)$, ceea ce permite trecerea la limită sub integrală. Conform teoremelor 2.2.3 şi 2.4.1, $D^\alpha u_h \xrightarrow[h\to 0]{} D^\alpha u$ în metrica lui $L_p(\Omega')$, pentru orice subdomeniu interior Ω' al lui Ω.

În baza teoremei 1.3.2, integralele din a doua sumă sînt operatori în $D^\alpha u$, mărginiţi în $L_p(\Omega)$ şi cu atît mai mult în $L_p(\Omega')$; şi în acest caz se poate trece la limită sub integrală.

Să admitem că punctul x parcurge un subdomeniu interior Ω''. Atunci punctul y parcurge mulţimea $\Omega' = \bigcup_{x \in \Omega'} D_x$ care este de asemenea un subdomeniu interior al lui Ω. Trecînd la limită în (15) cu $h \to 0$, găsim că pentru funcţii din $W_p^k(\Omega)$ identitatea (14) este adevărată aproape peste tot în Ω'. Subdomeniul Ω'' fiind însă arbitrar rezultă că identitatea respectivă este adevărată aproape peste tot în Ω.

Vom considera, prin convenţie, că în toate punctele domeniului Ω, în care integralele din formula (14) sînt convergente, valorile funcţiilor $u \in W_p^{(k)}(\Omega)$ sînt definite de această formulă. Această convenţie permite înlocuirea funcţiei $u(x)$ cu orice funcţie echivalentă. În consecinţă identitatea (14) este adevărată nu numai aproape peste tot, ci peste tot unde partea dreaptă a ei are sens.

§ 3. TEOREMELE DE SCUFUNDARE

Fie X şi Y două spaţii Banach. Să presupunem că orice element al lui X aparţine şi lui Y. Se spune că spaţiul X se scufundă în spaţiul Y. Să notăm cu V operatorul care face ca fiecărui element $u \in X$ să-i corespundă acelaşi element u, considerat însă de data aceasta ca element al lui Y. Operatorul V se numeşte *operator de scufundare* al spaţiului X în spaţiul Y; evident, $D(V) = X$ şi $R(V) \subset Y$. De obicei se numesc „teoreme de scufundare" acele teoreme care dau mărginirea sau compacitatea operatorului de scufundare.

Dacă operatorul de scufundare este mărginit, respectiv compact, spunem că X este *scufundat mărginit*, respectiv *compact* în Y.

Vom presupune în cele ce urmează în acest paragraf că Ω este un domeniu mărginit din E_m, stelat în raport cu o bilă oarecare.

Teorema 3.3.1. *Dacă* $pk > m$, *atunci* $W_p^{(k)}(\Omega)$ *se scufundă compact în* $C(\overline{\Omega})$.

Fie $u(x)$ o funcţie arbitrară din $W_p^{(k)}(\Omega)$. Notăm $u_1 = V_1 u$, $u_2 = V_2 u$ primul, respectiv al doilea membru din identitatea lui Sobolev (2.13). Este evident că operatorul V_1 acţionează din $W_p^{(k)}(\Omega)$ în $C(\overline{\Omega})$; el este finit-dimensional, iar funcţionalele definite de integralele care intervin în expresia lui sînt mărginite. În consecinţă, operatorul V_1 este compact.

Al doilea membru al formulei (2.13) îl scriem sub forma

$$(V_2 u) = u_2(x) = \sum_{|\alpha|=k} \int_\Omega \frac{r^\varepsilon A_\alpha(x, y)}{r^{m-k+\varepsilon}} D_y^\alpha u(y) dy; \tag{1}$$

$\varepsilon > 0$ fiind astfel ales încît $p(k-\varepsilon) > m$. Dacă punem $[r^{\varepsilon} A_\alpha(x, y)]_{y=x} = 0$, numărătorul de sub fiecare din integralele (1) va fi continuu în $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$. Punînd $\lambda = m - k + \varepsilon$, rezultă $\lambda p' < m$. Conform teoremei 1.3.1, $u_2 \in C(\bar{\Omega})$ și V_2 este compact ca operator din $W_p^{(k)}(\Omega)$ în $C(\bar{\Omega})$. Rezultă $u = (u_1 + u_2) \in C(\bar{\Omega})$, deci spațiul $W_p^{(k)}(\Omega)$ este scufundat în $C(\bar{\Omega})$. Evident, operatorul de scufundare $V = V_1 + V_2$ este compact ca sumă a doi operatori compacți.

Din compacitatea operatorului de scufundare rezultă mărginirea sa; dacă $pk > m$, atunci există o constantă B astfel încît

$$\|u\|_C \leqslant B\|u\|_{p;k}, \tag{2}$$

unde $\|\cdot\|_C$ reprezintă norma pe $C(\bar{\Omega})$.

Teorema 3.3.2. *Fie $pk \leqslant m$ și fie $g_s \subset \Omega$ o varietate s-dimensională netedă pe porțiuni, $m - kp < s \leqslant m$. Atunci $W_p^{(k)}(\Omega)$ se scufundă mărginit în $L_q(g_s)$, unde*

$$1 \leqslant q < q_s = \frac{sp}{m - kp}. \tag{3}$$

Teorema rezultă direct din identitatea integrală a lui S. L. Sobolev și din teorema 1.3.2: dacă $m - k = \lambda$, inegalitatea (3) se transformă în inegalitatea (3.7) cap. 1.

Mărginirea scufundării înseamnă existența unei constante B_1 astfel încît

$$\|u\|_{L_q(g_s)} \leqslant B_1\|u\|_{p;k}. \tag{4}$$

Din teorema 1.4.1 rezultă teorema următoare.

Teorema 3.3.3. *Dacă $pk \leqslant m$, atunci $W_p^{(k)}(\Omega)$ se scufundă compact în $L_q(\Omega)$, unde*

$$1 \leqslant q < q'_m = \frac{mp}{m - kp}. \tag{5}$$

Observații. 1. Dacă $pk \leqslant m$ și $1 \leqslant q \leqslant q < q_s$, atunci $W_p^{(k)}(\Omega)$ se scufundă compact în $L_q(g_s)$; vezi [44], [46].

2. Se poate demonstra că spațiul $W_p^{(k)}(\Omega)$ se scufundă mărginit în $L_{q_s}(g_s)$; pentru $s = m$ demonstrația este dată în § 8. Această scufundare nu este compactă; vezi [3].

Teorema 3.3.4. *Dacă funcția $u \in W_p^{(k)}(\Omega)$, atunci ea are în Ω toate derivatele generalizate de ordin $l < k$. Spațiul $W_p^{(k)}(\Omega)$ se scufundă compact în $C^{(l)}(\bar{\Omega})$, dacă $(k - l)p > m$, și în $W_p^{(l)}(\Omega)$, dacă $(k - l)p = m$ și $1 \leqslant q < q_m$.*

Să revenim la identitatea integrală a lui Sobolev scrisă sub forma (2.13). Fie funcția $u \in C^{(k)}(\bar{\Omega})$. Să arătăm că (2.13) poate fi de l ori derivată sub integrală dacă $l < k$. Amintim că partea dreaptă a formulei (2.12) este indefinit derivabilă în raport cu x, r, Θ. Mai menționăm și faptul că

$$\frac{\partial r}{\partial x_j} = -\frac{y_j - x_j}{r} = -\Theta_j, \qquad \frac{\partial \Theta_i}{\partial x_j} = \frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{(y_i - x_i)(y_j - x_j)}{r^3}.$$

Derivînd mai departe, este ușor de constatat că $D_x^\beta r = O(r^{1-|\beta|})$, $D_x^\beta \Theta = O(r^{-|\beta|})$ și că avem

$$D_x^\beta A_\alpha(x, y) = r^{-l} C_{\alpha\beta}(x, y), \quad l = |\beta|,$$

unde funcțiile $C_{\alpha\beta}$ sînt mărginite și indefinit derivabile pentru $x \neq y$.

Derivînd formal partea dreaptă a identității (2.13) obținem expresia

$$\sum_{|\alpha|=0}^{k-1} D^\beta x^\alpha \int_\Omega b_\alpha(y) u(y)\mathrm{d}y + \sum_{|\alpha|=k} \int_\Omega \frac{C_{\alpha\beta}(x, y)}{r^{m-k+l}} D_y^\alpha u(y)\mathrm{d}y. \tag{6}$$

Integralele din a doua sumă le reprezentăm sub forma

$$\int_\Omega \frac{r^{\varepsilon} C_{\alpha\beta}(x, y)}{r^{m-k+l+\varepsilon}} D_y^\alpha u(y)\mathrm{d}y, \tag{7}$$

unde $0 < \varepsilon < 1$. Întrucît $l < k$, $m - k + l + \varepsilon < m$. Mai departe, dacă punem $[r^{\varepsilon} C_{\alpha\beta}(x, y)]_{x=y} = 0$, atunci $r^{\varepsilon} C_{\alpha\beta}(x, y)$ va fi continuu pentru orice x și y. Dar atunci, după cum rezultă din demonstrația teoremei 1.3.1, integrala (7) este uniform convergentă; derivarea sub integrală este permisă și obținem formula

$$D^\beta u(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{k-1} D^\beta x^\alpha \int_\Omega b_\alpha(y) u(y)\mathrm{d}y + \sum_{|\alpha|=k} \int_\Omega \frac{C_{\alpha\beta}(x, y)}{r^{m-k+l}} D_y^\alpha u(y)\mathrm{d}y. \tag{8}$$

Formula (8) a fost demonstrată pentru $u \in C^{(k)}(\bar{\Omega})$. Fie $u \in W_p^{(k)}(\Omega)$. Scriem formula (8) pentru funcția de medie $u_h(x)$ și trecem la limită cu $h \to 0$. Cu aceleași argumente utilizate în obținerea identității integrale (2.7) se poate trece la limită sub integrală și se obține că pentru orice multiindice β, $|\beta| < k$, există derivata generalizată

$D^\beta u(x)$, definită de formula (8). Reprezentarea lui $D^\beta u(x)$ sub forma (8) permite ca utilizînd aceeași tehnică din demonstrarea teoremelor 3.3.1 și 3.3.2 să se arate că dacă $(k-l)p > m$, această derivată este continuă, iar dacă $(k-l)p \leqslant m$ și $q < q_m$, atunci $D^\beta u(x)$ este q-integrabilă în Ω.

Prin urmare, spațiul $W_p^{(k)}(\Omega)$ se scufundă în $W_p^{(l)}(\Omega)$, $l < k$. Afirmația despre compacitatea scufundării se demonstrează la fel ca în teoremele de la începutul paragrafului.

§ 4. EXTINDEREA LA DOMENII MAI GENERALE

Fie Ω un domeniu mărginit din E_m, care se poate reprezenta sub forma unei reuniuni $\Omega = \bigcup_{j=1}^{n} \Omega_j$ a unui număr finit de n domenii Ω_j, stelate fiecare în raport cu o bilă. Să arătăm că toate teoremele de la paragraful precedent sînt adevărate pentru domeniul Ω.

Raționamentele din demonstrațiile teoremelor de la paragraful precedent sînt analoage; să le aplicăm, de exemplu, teoremei 3.3.1. Fie $u \in W_p^{(k)}(\Omega)$. Conform teoremei 2.4.2, $u \in W_p^{(k)}(\Omega_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Conform ipotezelor teoremei 3.3.1, $pk > m$ și atunci funcția $u(x)$ este continuă în oricare din domeniile închise Ω_j și deci și în reuniunea lor $\bar{\Omega}$. În acest fel s-a demonstrat că pentru $pk > m$, spațiul $W_p^{(k)}(\Omega)$ se scufundă în $C(\bar{\Omega})$. Să demonstrăm că această scufundare este compactă.

Fie $\boldsymbol{M}$ mulțimea funcțiilor mărginite în norma lui $\boldsymbol{W}_p^{(k)}(\Omega)$. Atunci ea este mărginită și în norma lui $\boldsymbol{W}_p^{(k)}(\Omega_j)$ pentru orice j; aceasta rezultă imediat din formula (1.1). Conform teoremei 3.3.1, scufundarea lui $\boldsymbol{W}_p^{(k)}(\Omega_1)$ în $C(\bar{\Omega}_1)$ este compactă, deci din $\boldsymbol{M}$ se poate extrage un șir $\{u_{i1}\}$, uniform convergent în $\bar{\Omega}_1$. Fiind o parte a mulțimii $\boldsymbol{M}$, acest șir este mărginit în $W_p^{(k)}(\Omega_2)$; în baza aceleiași teoreme 3.3.1 din el se poate extrage un subșir pe care îl notăm cu $\{u_{i2}\}$ și care este uniform convergent în $\bar{\Omega}_2$; evident, noul șir este uniform convergent și în Ω_1. Continuînd procedeul, în final extragem din M un șir $\{u_{in}\}$, care este uniform convergent în fiecare din domeniile închise $\bar{\Omega}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Dar atunci acest șir este uniform convergent și în $\bar{\Omega}$. În acest fel s-a demonstrat compacitatea scufundării lui $W_p^{(k)}(\Omega)$ în $C(\bar{\Omega})$.

Să considerăm cîteva exemple. Dacă $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ și $m = 2$, atunci $u \in L_p(\Omega)$ și totodată $u \in L_p(\partial\Omega)$, unde p este un număr arbitrar. Dacă $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ și $m = 3$, atunci $u \in L_{6-\varepsilon}(\Omega)$ și $u \in L_{4-\varepsilon}(\partial\Omega)$, $\forall \varepsilon > 0$. Dacă $m = 2$ sau $m = 3$ și $u \in W_2^{(2)}(\Omega)$, atunci $u \in C(\Omega)$; pentru $m = 4$, în acest caz nu se poate afirma continuitatea lui u, dar se poate afirma că este p-integrabilă în Ω, oricare ar fi p.

În exemplele de mai sus orice mulțime de funcții mărginită în metrica lui $W_2^{(1)}(\Omega)$ sau $W_2^{(2)}(\Omega)$ este compactă în metrica corespunzătoare lui $L_q(\Omega)$, $L_q(\partial\Omega)$ sau $C(\bar{\Omega})$. Astfel, de exemplu, pentru $m = 3$, mulțimea este mărginită în $W_2^{(1)}(\Omega)$, compactă în $L_{6-\varepsilon}(\Omega)$ și în $L_{4-\varepsilon}(\partial\Omega)$. Pentru orice m, $(m-1)p/(m-kp) \geqslant p$, deoarece $kp \geqslant 1$. Dacă $u \in W_p^{(k)}(\Omega)$, atunci $u \in L_p(\partial\Omega)$.

Un caz particular al teoremelor de scufundare îl reprezintă teorema 2.6.1 și corolarul ei.

Observație. Se poate arăta că în exemplele considerate mai sus rezultatele pot fi uneori întărite. Astfel, de exemplu, dacă $m = 3$, atunci din $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ rezultă că $u \in L_6(\Omega)$ (mai tare decît $u \in L_{6-\varepsilon}(\Omega)$).

§ 5. NORME ECHIVALENTE ÎN SPAȚII SOBOLEV

Fie $t_1, t_2, \ldots, t_N$ variabile independente care pot lua orice valoare, iar N un număr finit. Vom spune că funcția continuă $f(t_1, t_2, \ldots, t_N)$ are proprietățile normei dacă:

a) $f(t_1, t_2, \ldots, t_N) \geqslant 0$, iar $f(t_1, t_2, \ldots, t_N) = 0$, dacă și numai dacă $t_1 = t_2 = \ldots = t_N = 0$;

b) $f(\lambda t_1, \lambda t_2, \ldots, \lambda t_N) = |\lambda| f(t_1, t_2, \ldots, t_N)$;

c) $f(t_1 + \tau_1, t_2 + \tau_2, \ldots, t_N + \tau_N) \leqslant f(t_1, t_2, \ldots, t_N) + f(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N)$.

Teorema 3.5.1[1]. *Fie N numărul monoamelor liniar independente de grad cel mult egal cu $k-1$. Fie, mai departe, $l_1, l_2, \ldots, l_N$ funcționale liniare, mărginite în metrica lui $W_p^{(k)}(\Omega)$, care nu se anulează simultan în nici un polinom de grad $\leqslant k-1$, în afara celui identic nul. Fie, în sfîrșit, $f(t_1, t_2, \ldots, t_N)$ o funcție care are proprietățile normei. Atunci norma*

$$\|u\|_{p,k}^* = f(l_1 u, l_2 u, \ldots, l_N u) + \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_p \qquad (1)$$

este echivalentă cu norma (1.1).

[1] Demonstrația acestei teoreme o facem urmărind pe cea din cartea [44].

Funcția continuă f este mărginită pe sfera unitate N-dimensională : $f(t_1, t_2, \ldots, t_N) \leqslant A$ dacă $\sum_{j=1}^{N} t_j^2 = 1$. Conform proprietății b) avem

$$f(l_1 u, l_2 u, \ldots, l_N u) \leqslant A \sqrt{\sum_{j=1}^{N} (l_j u)^2},$$

și deoarece funcționalele l_j sînt mărginite în norma (1.1), atunci

$$f(l_1 u, l_2 u, \ldots, l_N u) \leqslant B_0 \|u\|_{p;k}, \quad B_0 = \text{const},$$

de unde

$$\|u\|_{p,k}^{*} \leqslant (B_0 + 1)\|u\|_{p;k}. \tag{2}$$

Să demonstrăm că are loc și inegalitatea de sens invers

$$\|u\|_{p;k} \leqslant C\|u\|_{p,k}^{*}, \quad C = \text{const}. \tag{3}$$

Să presupunem contrariul. În acest caz există un șir $u_n \in W_p^{(k)}(\Omega)$ $n = 1, 2, \ldots$, pentru care $\|u_n\|_{p,k} \geqslant n\|u_n\|_{p,k}^{*}$. Punînd $v_n = u_n / \|u_n\|_{p,k}$, atunci $\|v_n\|_{p,k} = 1$ și $\|v_n\|_{p,k}^{*} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Șirul $\{v_n\}$ este mărginit în metrica lui $W_p^{(k)}(\Omega)$; conform teoremei 3.3.3 el este compact în $L_1(\Omega)$ și deci din el se poate extrage un subșir $\{v_{n_1}\}$ care converge în $L_1(\Omega)$. Fie $v(x)$ limita acestui subșir : $\|v_{n_1} - v\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Din $\|v_n\|_{p,k}^{*} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ rezultă că $\|\mathrm{D}^\alpha v_n\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $|\alpha| = k$. În baza teoremei 2.5.1 funcția $v(x)$ admite derivatele generalizate de ordinul k și toate acestea sînt egale cu zero. Pe baza formulei (2.13), $v(x)$ este un polinom de grad $\leqslant k - 1$.

Relația $\|\mathrm{D}^\alpha v_{n_1}\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $|\alpha| = k$, poate fi reprezentată deci sub forma $\|\mathrm{D}^\alpha v_{n_1} - \mathrm{D}^\alpha v\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $|\alpha| = k$. Ținînd seama și de faptul că $\|v_{n_1} - v\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ rezultă $\|v_{n_1} - v\|_{p;k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, de unde $\|v\|_{p;k} = 1$. Pe de altă parte,

$$\|v_{n_1} - v\|_{p,k}^{*} \leqslant (B_0 + 1)\|v_{n_1} - v\|_{p,k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

deci $\|v\|_{p,k}^{*} = \lim_{n\to\infty} \|v_{n_1}\|_{p,k}^{*} = 0$; de unde $f(l_1 x, l_2 v, \ldots, l_N v) = 0$. Dar atunci $l_1 v = l_2 v = \ldots = l_N v = 0$. Întrucît v este un polinom de grad $\leqslant k - 1$, atunci în mod necesar $v(x) \equiv 0$. Acest lucru este în contradicție cu faptul că $\|v\|_{p,k} = 1$.

Uneori este convenabil să se compare nu normele (1) și (1.1) ci alte norme. Dăm un exemplu. După cum s-a menționat în §1, norma (1.1) este echivalentă cu norma (1.1b) Mai departe, din teorema 3.3.2 rezultă că $\|u\|_p \leqslant c\|u\|_{p;k}$, $c = \text{const}$, de unde

$$\|u_p\| + \left\{\int_\Omega \Big[\sum_{|\alpha|=k} (\mathrm{D}^\alpha u)^2\Big]^{p/2} \mathrm{d}x\right\}^{1/p} \leqslant (c+1)\|u\|_{p,k}.$$

Pe de altă parte, conform formulei (3.11) cap. 1

$$\|u\|_{p,k} = |u|_1 + \left\{\int_\Omega \Big[\sum_{|\alpha|=k} (\mathrm{D}^\alpha u)^2\Big]^{p/2} \mathrm{d}x\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant |\Omega|^{1-1/p}\|u\|_p + \left\{\int_\Omega \Big[\sum_{|\alpha|=k} (D^\alpha u)^2\Big]^{p/2} dx\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant c_1\left[\|u\|_p + \left\{\int_\Omega \Big[\sum_{|\alpha|=k} (D^2 u)^2\Big]^{p/2} \mathrm{d}x\right\}^{1/p}\right].$$

Din relațiile obținute rezultă că norma egală cu

$$\|u\|_p + \left\{\int_\Omega \Big[\sum_{|\alpha|=k} (\mathrm{D}^\alpha u)^2\Big]^{p/2} \mathrm{d}x\right\}^{1/p} \tag{4}$$

este echivalentă cu (1.1). În același timp norma (1) este, evident, echivalentă cu

$$f(l_1 u, l_2 u, \ldots, l_N u) + \left\{\int_\Omega \Big[\sum_{|\alpha|=k} (\mathrm{D}^\alpha u)^2\Big]^{p/2} \mathrm{d}x\right\}^{1/p}. \tag{5}$$

Din teoremele acestui paragraf rezultă că normele (4) și (5) sînt echivalente.

§ 6. INEGALITĂȚILE FRIEDRICHS ȘI POINCARÉ

Dacă Ω este o reuniune de domenii, fiecare dintre ele stelat în raport cu cîte o bilă și $u \in W_p^{(k)}(\Omega)$, atunci conform teoremei 3.3.4 derivatele $\mathrm{D}^\gamma u$, $0 \leqslant |\gamma| \leqslant k - 1$, sînt definite aproape peste tot (în

raport cu măsura $\partial\Omega$) pe $\partial\Omega$ și cel puțin p-integrabile. Pentru prescurtare, notăm $\partial\Omega = \Gamma$. Să demonstrăm că funcționalele

$$l_\gamma u = \int_\Gamma \mathrm{D}^\gamma u \mathrm{d}\Gamma;\ 0 \leqslant |\gamma| \leqslant k-1 \tag{1}$$

sînt mărginite în metrica lui $W_p^{(k)}(\Omega)$. Să considerăm că norma din $W_p^{(k)}(\Omega)$ este dată de formula (1.1).

Conform inegalității lui Buniakovski

$$|l_\gamma u| \leqslant \left\{\int_\Gamma |\mathrm{D}^\gamma u|^p \,\mathrm{d}\Gamma\right\}^{1/p} \left\{\int_\Gamma \mathrm{d}\Gamma\right\}^{1/p'} = |\Gamma|^{1/p'} \|\mathrm{D}^\gamma u\|_{L_p(\Gamma)}.$$

Notăm $|\gamma| = l$. Prin ipoteză, $u \in W_p^{(k)}\Omega)$, iar $l = |\gamma| \leqslant k-1$; deci $\mathrm{D}^\gamma u \in W_p^{(k-l)}(\Omega)$ și $k - l \geqslant 1$. Conform teoremei 3.3.2 avem

$$\|\mathrm{D}^\gamma u\|_{L_p(\Gamma)} \leqslant B_1 \|\mathrm{D}^\gamma u\|_{k,k-l} =$$

$$= B_1 \{\|\mathrm{D}^\gamma u\|_1 + \sum_{|\beta|=k-l} \|\mathrm{D}^{\beta+\gamma} u\|_p\},\ B_1 = \text{const.} \tag{2}$$

Mai departe, pe baza teoremei 3.3.3, $\|\mathrm{D}^\gamma u\|_1 \leqslant B_2 \|u\|_{p,k}$, $B_2 = \text{const.}$ În afară de aceasta avem și

$$\sum_{|\beta|=k-l} \|\mathrm{D}^{\beta+\gamma} u\|_p \leqslant \sum_{|\alpha|=k} \|\mathrm{D}^\alpha u\|_p \leqslant \|u\|_{p;k}.$$

Ținînd seama în (2) de relația de mai sus, obținem

$$\|\mathrm{D}^\gamma u\|_{L_p(\Gamma)} \leqslant B_1(B_2+1)\|u\|_{p;k},$$

adică

$$|l_\gamma u| \leqslant \|C\|u\|_{p;k},\ C = B_1(B_2+1)|\Gamma|^{1/p'}.$$

Afirmația noastră a fost demonstrată.

Este de asemenea evident că numărul funcționalelor (1) este egal cu numărul monoamelor liniar independente de grad $\leqslant k-1$ și că aceste funcționale nu se anulează simultan pe nici un polinom de grad $\leqslant k-1$, în afara celui identic nul. Din teorema 3.5.1 rezultă că norma

$$\|u\|_{p,k}^* = \sum_{|\alpha|=0}^{k-1} \left|\int_\Gamma \mathrm{D}^\alpha u \,\mathrm{d}\Gamma\right| + \left\{\int_\Omega [\sum_{|\alpha|=k} (\mathrm{D}^\alpha u)^2]^{p/2} \,\mathrm{d}x\right\}^{1/p} \tag{3}$$

este echivalentă cu norma (5.4) și prin urmare poate fi considerată ca normă pe $W_p^{(k)}(\Omega)$.

Să considerăm mulțimea funcțiilor din $W_p^{(k)}(\Omega)$ care pe frontiera domeniului Ω satisfac condițiile:

$$\mathrm{D}^\gamma u|_\Gamma = 0,\ 0 \leqslant |\gamma| \leqslant k-1. \tag{4}$$

Se observă ușor că această mulțime formează un subspațiu al lui $W_p^{(k)}(\Omega)$; să-l notăm cu $W_{p,0}^{(k)}(\Omega)$. Formula (3) arată că dacă se introduce pe $W_{p,0}^{(k)}(\Omega)$ norma

$$\|u\|_{p,k}^{**} = \left\{\int_\Omega [\sum_{|\alpha|=k} (\mathrm{D}^\alpha u)^2]^{p/2} \,\mathrm{d}x\right\}^{1/p}, \tag{5}$$

atunci pe $W_{p,0}^{(k)}(\Omega)$ această normă va fi echivalentă cu norma (5.4). De aici rezultă imediat inegalitatea

$$\|u\|_p \leqslant C \left\{\int_\Omega [\sum_{|\alpha|=k} (\mathrm{D}^\alpha u)^2]^{p/2} \,\mathrm{d}x\right\}^{1/p},\quad \forall u \in W_{p,0}^{(k)}(\Omega),\ C = \text{const.} \tag{6}$$

Pentru $k=1$, $p=2$, inegalitatea (6) este cunoscută sub numele de *inegalitatea lui Friedrichs*

$$\|u\|_2^2 = \int_\Omega u^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \varkappa^2 \int_\Omega \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 \mathrm{d}x,\quad \forall u \in W_{2,0}^{(1)}(\Omega),\ \varkappa = C^2 = \text{const.} \tag{7}$$

Să examinăm spațiul $W_2^{(1)}(\Omega)$. În acest caz $k=1$ și deci există numai un singur monom liniar independent de grad mai mic decît k; acest monom este atunci identic cu unitatea. Funcționala $\int_\Omega u \,\mathrm{d}x$ este mărginită în metrica lui $W_2^{(1)}(\Omega)$:

$$\left|\int_\Omega |u \,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_\Omega |u| \mathrm{d}x = \|u\|_1 \leqslant \|u\|_{2,1}$$

și diferită de zero pentru $u \equiv 1$, deci mărimea

$$\left|\int_\Omega u \,\mathrm{d}x\right| + \left\{\int_\Omega \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 \mathrm{d}x\right\}^{1/2} \tag{8}$$

poate fi luată drept normă pe $W_2^{(1)}(\Omega)$ și normele (8) și $\|\cdot\|_{2,1}$ sînt echivalente pe $W_2^{(1)}(\Omega)$. Conform aceleiași teoreme 3.3.2, avem

$$\|u\|_2^2 \leqslant C'\left[\left|\int_\Omega u\,\mathrm{d}x\right| + \left\{\int_\Omega \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 \mathrm{d}x\right\}^{1/2}\right], \quad C' = \text{const}.$$

Să ridicăm ultima inegalitate la pătrat. Aplicînd inegalitatea elementară $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$, se ajunge la *inegalitatea lui Poincaré*

$$\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x \leqslant C\left[\left(\int_\Omega u\,\mathrm{d}x\right)^2 + \int_\Omega \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 \mathrm{d}x\right]; \tag{9}$$

aici $C = 2C'^2$.

Inegalitățile lui Friedrichs și Poincaré au fost deduse în ipoteza că domeniul Ω este reuniunea unui număr finit de domenii fiecare stelat în raport cu cîte o bilă. În condiții mai generale inegalitatea lui Poincaré poate să nu fie adevărată (vezi [9]).

Inegalitatea lui Friedrichs este adevărată pentru orice domeniu mărginit, trebuie numai să se precizeze în mod corespunzător că „funcția $u(x) \in W_2^{(1)}(\Omega)$ este nulă pe frontiera domeniului".

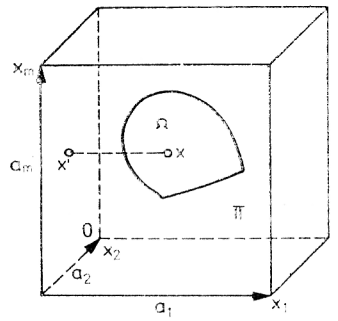

Fig. 2

Pentru a demonstra aceasta, fie Ω un domeniu mărginit din E_m și fie $u(x)$ o funcție de clasă $C^{(1)}(\Omega)$ care se anulează pe $\partial\Omega$. Alegem sistemul de coordonate astfel încît domeniul Ω să fie situat în acea parte a spațiului unde toate coordonatele sînt pozitive. Plasăm acest domeniu în interiorul unui paralelipiped Π (fig. 2) definit de inegalitățile $0 \leqslant x_k \leqslant a_k$; $k = 1,2,\ldots,m$. Prelungim funcția ($u(x)$ cu valori nule în domeniul $\Pi \setminus \Omega$. Prin aceasta funcția $u(x)$ rămîne continuă deoarece $u|_\Gamma = 0$. Derivatele acestei funcții pot fi discontinue la traversarea frontierei $\partial\Omega$. Pentru astfel de funcții este adevărată formula lui Leibniz-Newton.

Să considerăm în paralelipipedul Π punctul $x(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ pe care-l proiectăm pe planul de coordonate ortogonale axei O_{x_1}. Să notăm proiecția cu x'. Punctul x' poate fi considerat un punct din spațiul euclidian $(m-1)$-dimensional, de coordonate $x_2, \ldots, x_m$.

Vom folosi notația $x = (x_1, x')$ și analoagele sale. Conform formulei lui Leibniz-Newton

$$u(x) - u(0, x') = \int_0^{x_1} \frac{\partial u(\xi, x')}{\partial \xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

Dar punctul (O, x') se află în afara domeniului Ω, deci $u(O, x') = 0$, de unde rezultă

$$u(x) = \int_0^{x_1} \frac{\partial u(\xi, x')}{\partial \xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

Conform inegalității lui Buniakovski avem

$$u^2(x) \leqslant \int_0^{x_1} \mathrm{d}\xi \int_0^{x_1} \left(\frac{\partial u(\xi, x')}{\partial \xi}\right)^2 \mathrm{d}\xi \leqslant a_1 \int_0^{a_1} \left(\frac{\partial u(\xi, x')}{\partial \xi}\right)^2 d\xi.$$

Să integrăm ultima inegalitate pe paralelipipedul Π:

$$\int_\Pi u^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant a_1^2 \int_0^{a_1} d\xi \int_0^{a_2} \mathrm{d}x_2 \ldots \int_0^{a_m} \left(\frac{\partial u(\xi, x')}{\partial \xi}\right)^2 \mathrm{d}x_m =$$

$$= a_1^2 \int_0^{a_1} \mathrm{d}x_1 \int_0^{a_2} \mathrm{d}x_2 \ldots \int_0^{a_m} \left(\frac{\partial u(x_1, x')}{\partial x_1}\right)^2 \mathrm{d}x_m = a_1^2 \int_\Pi \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right)^2 \mathrm{d}x.$$

În primul și ultimul termen neglijem integralele pe $\Pi \setminus \Omega$, care sînt nule; în afară de aceasta adăugăm funcției de sub integrala ultimului termen suma nenegativă $\sum_{k=2}^m \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right)^2$. Aceasta conduce la inegalitatea

$$\int_\Omega u^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant a_1^2 \int_\Omega \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 \mathrm{d}x, \tag{10}$$

care coincide cu inegalitatea (7) a lui Friedrichs dacă notăm $\varkappa = a_1^2$.

Inegalitatea lui Friedrichs poate fi extinsă la clase mai largi de funcții. Să considerăm mulțimea funcțiilor pe care o notăm cu $\mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$ și care se definește prin următoarele condiții: $u \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$ dacă

1) $u \in L_2(\Omega)$;

2) există derivate de ordinul întîi generalizate $\frac{\partial u}{\partial x_k} \in L_2(\Omega)$, $k = 1, 2, \ldots, m$);

3) există un șir de funcții $\{u_n\}$ astfel încît

$$u_n \in C^{(1)}(\bar{\Omega}), \quad u_n|_{\partial\Omega} = 0, \quad \|u - u_1\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_k} - \frac{\partial u_n}{\partial x_k} \right\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{11}$$

Despre funcțiile mulțimii $\mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$ vom spune că se anulează pe $\partial\Omega$. Analog putem introduce mulțimea și spațiul $\mathring{W}_p^{(k)}$ pentru orice p și k.

Mulțimea $\mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$ devine spațiu Hilbert dacă introducem[1] norma prin

$$\|u\|^2_{\mathring{W}_2^{(1)}} = \int_\Omega \left[u^2(x) + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 \right] dx. \tag{12}$$

Dacă Ω este reuniunea unui număr fînt de domenii stelate, atunci $\mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$ poate fi privit ca un subspațiu al spațiul $W_2^{(1)}(\Omega)$.

Fie $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ și fie $\{u_n\}$ șirul descris mai sus. Pentru funcția u_n inegalitatea lui Friedrichs este adevărată:

$$\int_\Omega u_n^2 \, dx \leqslant \varkappa^2 \int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx. \tag{13}$$

Din relațiile (11) rezultă că

$$\|u_n\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \|u\|_2,$$

$$\left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_k} \right\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\|_2.$$

Trecînd la limită în (13) se obține inegalitatea lui Friedrichs pentru orice funcție din clasa $\mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$.

[1] Analog se poate introduce și spațiul $\mathring{W}_p^{(k)}(\Omega)$ pentru orice p și k.

Capitolul 4

OPERATORI POZITIV DEFINIȚI

§ 1. FUNCȚIONALE PĂTRATICE

În acest capitol vom studia funcționale ale căror domenii de definiție aparțin unui spațiu Hilbert real. În unele cazuri (care vor fi menționate) vom considera acest spațiu separabil. Amintim că un spațiu Banach se numește *separabil* dacă el conține o mulțime numărabilă densă. Pentru un spațiu Hilbert se poate da o definiție echivalentă: un spațiu Hilbert se spune că este separabil dacă admite un sistem ortonormat numărabil dens. Unul din cele mai importante spații Hilbert separabile este spațiul $L_2(\Omega)$, unde Ω este o mulțime măsurabilă într-un spațiu finit-dimensional.

Fie H un spațiu Hilbert dat. Să considerăm în H o *funcțională biliniară* $\Phi(u, v)$, adică o funcțională care depinde de două elemente din spațiul H și care satisface următoarele condiții: pentru v fixat ea este o funcțională liniară de u:

$$\Phi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 \Phi(u_1, v) + \alpha_2 \Phi(u_2, v), \tag{1}$$

iar pentru u fixat este o funcțională liniară de v:

$$\Phi(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \Phi(u, v_1) + \alpha_2 \Phi(u, v_2). \tag{2}$$

În egalitățile (1) și (2) α_1 și α_2 sînt numere reale arbitrare.

Vom considera numai funcționale biliniare simetrice, adică pentru care

$$\Phi(u, v) = \Phi(v, u). \tag{3}$$

Cea mai simplă funcțională biliniară simetrică este produsul scalar (u, v) al elementelor u și v.

Expresia $\Phi(u,u)$, unde $\Phi(u, v)$ este o funcțională biliniară simetrică, se va numi *funcțională pătratică omogenă* sau *formă pătratică*. Pentru prescurtare, vom scrie $\Phi(u)$ în loc de $\Phi(u, u)$.

Să deducem o relație simplă și importantă pe care o satisface orice formă pătratică. Fie $\Phi(u, v)$ o funcțională biliniară și α_1, α_2,

β_1, β_2 numere reale arbitrare. Aplicînd succesiv formulele (1) și (2), obținem

$$\Phi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) =$$

$$= \alpha_1\beta_1\Phi(u_1, v_1) + \alpha_1\beta_2\Phi(u_1, v_2) + \alpha_2\beta_1\Phi(u_2, v_1) + \alpha_2\beta_2\Phi(u_2, v_2).$$

Dacă funcționala Φ este simetrică deducem

$$\Phi(u + v) = \Phi(u) + 2\Phi(u, v) + \Phi(v). \tag{4}$$

Aceasta este relația căutată.

Vom numi funcțională pătratică expresia

$$F(u) = \Phi(u) - l(u), \tag{5}$$

unde $\Phi(u)$ este o formă pătratică, iar $l(u)$ o funcțion ală liniară.

Exemple. 1. Integrala Dirichlet

$$\Phi(u) = \int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx.$$

este forma pătratică care corespunde funcționalei biliniare simetrice

$$\Phi(u, v) = \int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k}\, dx.$$

2. Cel mai simplu exemplu de spațiu Hilbert este axa numerelor reale. În acest caz produsul scalar este înmulțirea numerelor, iar norma este valoarea absolută a numerelor. Un polinom de gradul al doilea fără termen liber este o funcțională pătratică.

3. Un exemplu mult mai important de care ne vom ocupa ulterior este funcționala pătratică

$$F(u) = \int_\Omega \left\{ \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 - 2f(x)u \right\} dx. \tag{6}$$

§ 2. OPERATORI POZITIV DEFINIȚI

În cele ce urmează vom considera în special operatorii care acționează în spații Hilbert H. Vorbind despre un astfel de operator,

fie acesta A, vom presupune întotdeauna că el este liniar (adică aditiv și omogen, dar care poate fi nemăginit) și că domeniul său de definiție este dens în H, adică $\overline{D(A)} = H$ (aici linia de deasupra înseamnă închiderea în metrica spațiului H).

Operatorul A, care acționează într-un spațiu Hilbert, se numește *simetric* dacă $\overline{D(A)} = H$ și dacă pentru orice $u, v \in D(A)$ are loc identitatea

$$(Au, v) = (u, Av). \tag{1}$$

Dacă A este un operator simetric, atunci (Au, v), unde $u, v \in D(A)$ este o funcțională liniară simetrică iar (Au, u) este forma ei pătratică

Exemple. **1.** Să considerăm operatorul integral

$$Ku = \int_\Omega K(x, y)\, u(y)\, dy \tag{2}$$

în spațiul $H = L_2(\Omega)$. Să presupunem că integrala ($2m$-uplă)

$$\int_\Omega\int_\Omega K^2(x, y)\, dx\, dy$$

este mărginită. Un astfel de operator este definit în tot spațiul. Dacă $K(x, y) = K(y, x)$, atunci operatorul (2) este simetric. Să arătăm aceasta.

Să considerăm produsul scalar

$$(Ku, v) = \int_\Omega v(x) \left\{ \int_\Omega K(x, y)u(y)dy \right\} dx.$$

Conform teoremei lui Fubini se poate schimba ordinea de integrare:

$$(Ku, v) = \int_\Omega u(y) \left\{ \int_\Omega K(x, y)\, v(x)\, dx \right\} dy.$$

Schimbînd x cu y și y cu x, obținem

$$(Ku, v) = \int_\Omega u(x) \left\{ \int_\Omega K(y, x)\, v(y)\, dy \right\} dx = \int_\Omega u(x) \left\{ \int_\Omega K(x, y)v(y)\, dy \right\} dx =$$

$$= (Kv, u) = (u, Kv),$$

deoarece produsul scalar este real.

2. Să considerăm operatorul

$$Au = -\frac{d^2u}{dx^2}, \tag{3}$$

în spațiul $H=L_2(0,1)$. Fie $D(A)$ mulțimea funcțiilor u satisfăcînd următoarele condiții:

$$u \in C^{(2)}\ [0,\ 1],\quad u(0) = u(1) = 0. \tag{4}$$

Evident că operatorul A astfel definit este liniar. Să arătăm că el este și simetric.

Mulțimea de funcții din $C^2[0,1]$ ce satisface condițiile la limită (4), adică $D(A)$, conține mulțimea funcțiilor finite pe $[0,\ 1]$, care este densă în $L_2(0,1)$. Conform corolarului 2.2.1 mulțimea $D(A)$ însăși este densă în $L_2(0,1)$.

Rămîne să arătăm că operatorul A satisface condiția de simetrie (1). Pentru aceasta să considerăm produsul scalar (Au, v), unde $u,\ v \in D(A)$, adică $u,\ v \in C^2[0,1]$ și $u(0) = u(1) = 0\ ;\ v(0) = v(1) = 0$. Integrînd prin părți și ținînd cont de condițiile la limită (4), obținem

$$(Au, v) = -\int_0^1 v(x)\ u''(x)\,dx = \int_0^1 u'(x)\,v'(x)\,dx = -\int_0^1 u(x)v''(x)\,dx = (u, Av).$$

Operatorul simetric A se numește *strict pozitiv*, dacă forma pătratică $(Au,\ u) \geqslant 0$ și $(Au, u) = 0$, dacă și numai dacă $u = 0$.

De exemplu, operatorul (3) — (4) este strict pozitiv. Pentru a dovedi acest lucru, să considerăm forma pătratică

$$(Au, u) = -\int_0^1 u\frac{d^2u}{dx^2}\,dx.$$

Integrînd prin părți și ținînd seama de condițiile (4), obținem

$$(Au, u) = \int_0^1 u'^2(x)\,dx \geqslant 0. \tag{5}$$

Fie $(Au, u) = 0$, adică

$$\int_0^1 u'^2\,dx = 0.$$

Atunci $u'(x) \equiv 0$ și $u(x) \equiv$ const. Ținînd cont de condițiile (4), rezultă că $u(x) \equiv 0$.

Operatorul simetric A se numește *pozitiv definit*, dacă

$$\inf_{\substack{u \in D(A) \\ u \neq 0}} \frac{(Au, u)}{\|u\|^2} > 0. \tag{6}$$

Această definiție este echivalentă cu următoarea: operatorul simetric A se numește *pozitiv definit* [1], dacă există o constantă $\gamma^2 > 0$ astfel încît

$$(Au, u) \geqslant \gamma^2\|u\|^2. \tag{7}$$

Inegalitatea (7), oricare ar fi $u \in D(A)$, se va numi *inegalitatea de pozitivă definire*.

Evident că orice operator pozitiv definit este și strict pozitiv. Reciproca, în general, nu este adevărată.

Exemplu. Să arătăm că operatorul (3) — (4) este pozitiv definit. Conform inegalității lui Friedrichs (vezi cap. 3, formula (6.10)) avem

$$\|u\|^2 = \int_0^1 u^2(x)\,dx \leqslant \int_0^1 u'^2(x)\,dx.$$

Comparînd inegalitatea de mai sus cu (5), obținem inegalitatea $(Au, u) \geqslant \|u\|^2$. Constanta din inegalitatea de pozitivă definire poate fi luată în acest caz egală cu unitatea.

Există operatori strict pozitivi care nu sînt pozitiv definiți. Pentru a dovedi aceasta să considerăm următorul exemplu.

Fie operatorul B astfel definit

$$Bu = -\frac{d^2u}{dx^2},\quad 0 < x < \infty. \tag{8}$$

Vom considera B ca operator în spațiul Hilbert $L_2(0, \infty)$. Ca domeniu de definiție $D(B)$, să considerăm mulțimea funcțiilor care satisfac condițiile:

1) $u \in C^{(2)}\ [0,\infty]$,

2) $u(0) = 0$,

[1] Unii autori numesc *pozitiv definit* un operator A cu proprietățile: a) $(Ax, x) \geqslant 0$, $\forall x \in D(A)$ și b) $(Ax, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, ceea ce corespunde termenului strict pozitiv, utilizat mai sus. (*N. T.*).

3) pentru fiecare funcție $u \in D(B)$ există un număr a_u (altul pentru fiecare funcție) astfel încît $u(x) \equiv 0$ pentru $x > a_u$. Evident că $D(B) \subset L_2(0, \infty)$.

Să arătăm că operatorul B astfel definit este strict pozitiv, dar nu este pozitiv definit. Să arătăm mai întîi că $\overline{D(B)} = L_2(0, \infty)$. Este suficient să arătăm că pentru orice funcție $\varphi \in L_2(0, \infty)$ și orice $\varepsilon > 0$, există o funcție $u \in D(B)$ astfel încît

$$\|\varphi - u\| < \varepsilon .$$

Integrala

$$\int_0^\infty \varphi^2(x)\, dx$$

fiind mărginită, există $\delta > 0$ și $N > 0$, astfel încît

$$\int_0^\delta \varphi^2(x)\, dx < \frac{\varepsilon^2}{8}, \quad \int_N^\infty \varphi^2(x)\, dx < \frac{\varepsilon^2}{8}.$$

Introducem funcția

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant \delta, \\ \varphi(x), & \delta < x < N, \\ 0, & x \geqslant N. \end{cases}$$

Este clar că $\Psi \in L_2(0, \infty)$; atunci

$$\|\varphi - \Psi\|^2 = \int_0^\infty (\varphi(x) - \Psi(x))^2\, dx = \int_0^\delta \varphi^2(x)\, dx + \int_N^\infty \varphi^2(x)\, dx < \frac{\varepsilon^2}{4}$$

și prin urmare $\|\varphi - \Psi| < \varepsilon/2$.

Să mediem apoi funcția Ψ, luînd ca rază de mediere $h < \delta/2$ și considerăm $u(x) = \Psi_h(x)$. Evident, $\Psi_h(x) \in D(B)$; funcția $\Psi_h(x)$ este indefinit derivabilă și se anulează pentru $x = 0$ (mai mult, pentru orice $x < \delta/2$); în sfîrșit, numărul a_u poate fi luat egal cu $N + \delta/2$. Deci

$$\|u - \Psi\|^2 = \int_0^\infty (u(x) - \Psi(x))^2\, dx = \int_0^{N+\delta/2} (u(x) - \Psi(x))^2\, dx =$$

$$= \int_0^{N+\delta/2} (\Psi_h(x) - \Psi(x))^2\, dx.$$

Conform teoremei 2.2.3, pentru h suficient de mic, ultima integrală va fi mai mică decît $\varepsilon^2/4$, deci $\|u - \Psi\| < \varepsilon/2$. Conform inegalității triunghiului avem $\|u - \varphi\| \leqslant \|u - \Psi\| + \|\Psi - \varphi\| < \varepsilon$ și afirmația este demonstrată.

Este ușor de arătat că operatorul B este simetric. Pentru aceasta, fie $u, v \in D(B)$, adică fiecare din funcțiile u, v satisfac condițiile 1) — 3).

Să considerăm funcționala biliniară

$$(Bu, v) = -\int_0^\infty v \frac{d^2u}{dx^2}\, dx = -\int_0^N v \frac{d^2u}{dx^2}\, dx.$$

Aici N este un număr oarecare, mai mare decît a_u și a_v; pentru $x = N$ atît funcțiile u și v, cît și toate derivatele lor se anulează.

Integrînd prin părți, obținem

$$(Bu, v) = \int_0^N u'(x)v'(x)\, dx = \int_0^\infty u'(x)v'(x)\, dx. \qquad (9)$$

În mod analog,

$$(Bv, u) = \int_0^\infty u'(x)v'(x)\, dx,$$

și prin urmare

$$(Bu, v) = (Bv, u) = (u, Bv),.$$

adică B este un operator simetric.

Să arătăm că B este un operator strict pozitiv. Conform formulei (9), avem

$$(Bu, u) = \int_0^\infty u'^2(x)\, dx \geqslant 0.$$

Dacă $(Bu, u) = 0$, atunci

$$\int_0^\infty u'^2(x)\, dx = 0 ;$$

Cum funcția de sub integrală este nenegativă, atunci $u'(x) \equiv 0$, adică $u(x) \equiv \text{const}$; dar $u(0) = 0$, deci $u(x) \equiv 0$.

Operatorul B nu este pozitiv definit. Pentru a dovedi acest lucru să demonstrăm că

$$\inf \frac{(Bu, u)}{\|u\|^2} = 0 .$$

Să considerăm șirul de funcții

$$u_n(x) = \begin{cases} x(n-x)^3 & \text{dacă } 0 \leqslant x \leqslant n, \\ 0 & \text{dacă } x > n. \end{cases}$$

Se observă ușor că $u_n \in D(B)$. Să aflăm norma lui u_n. Avem

$$\|u_n\|^2 = \int_0^\infty u_n^2(x)\,dx = \int_0^n x^2 (n-x)^6\,dx .$$

Punînd $x = nt$, obținem

$$\|u_n\|^2 = n^9 \int_0^1 t^2 (1-t)^6\,dt.$$

Ultima integrală este o constantă pozitivă care nu depinde de n; să o notăm cu c_1; atunci $\|u_n\|^2 = c_1 n^9$. Pe de altă parte,

$$(Bu_n, u_n) = \int_0^\infty u_n'^2(x)\,dx = \int_0^n (n-4x)^2 (n-x)^4\,dx.$$

Punînd $x = nt$, obținem

$$(Bu_n, u_n) = n^7 \int_0^1 (1-t)^4 (1-4t)^2\,dt = c_2 n^7, \; c_2 = \text{const}.$$

Deci

$$\frac{(Bu_n, u_n)}{\|u_n\|^2} = \frac{c_2}{c_1 n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

prin urmare

$$\inf \frac{(Bu, u)}{\|u\|^2} = 0.$$

§ 3. SPAȚIUL ENERGETIC

Fiecărui operator strict pozitiv i se poate asocia un anumit spațiu Hilbert pe care îl vom numi spațiul energetic al operatorului dat.

Fie H un spațiu Hilbert și A un operator strict pozitiv în acest spațiu. Construim un nou spațiu Hilbert. Acesta trebuie să conțină printre elementele sale elementele mulțimii $D(A)$. De aceea să înzestrăm mulțimea $D(A)$ cu un nou produs scalar, și anume

$$[u, v]_A = (Au, v), \quad u, v \in D(A). \tag{1}$$

După cum se știe, într-un spațiu Hilbert noul produs scalar trebuie să satisfacă trei axiome:

A. *Simetria.* Dacă (u, v) este produsul scalar al elementelor u și v, atunci $(u, v) = (v, u)$.

B. *Liniaritatea.* Dacă λ_1 și λ_2 sînt numere reale arbitrare, atunci $(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda_1(u_1, v) + \lambda_2(u_2, v)$.

C. *Pozitivitatea.* $(u, u) \geqslant 0$ și $(u, u) = 0$, dacă și numai dacă $u = 0$ (adică u este elementul nul al spațiului).

Să arătăm că expresia $[u, v]_A$, definită de egalitatea (1), satisface axiomele A — C.

A. *Simetria.* Avem $[u, v]_A = (Au, v) = (u, Av) = (Av, u) = [v, u]_A$. Aici am folosit simetria operatorului A și simetria produsului scalar în spațiul H dat.

B. *Liniaritatea.* Ținînd seama de liniaritatea operatorului A, obținem succesiv.

$$[\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v]_A = (A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2), v) =$$

$$= (\lambda_1 Au_1 + \lambda_2 Au_2, v) = \lambda_1(Au_1, v_A + \lambda_2(Au_2, v) =$$

$$= \lambda_1 [u_1, v]_A + \lambda_2, [u_2, v]_A .$$

C. *Pozitivitatea.* Operatorul A este strict pozitiv, deci $[u, u]_A = (Au, u) \geqslant 0$. Prin urmare, dacă $[u, u]_A = 0$, atunci $(Au, u) = 0$;

de aici rezultă că $u = 0$. Reciproca este adevărată. Dacă $u = 0$, rezultă $(Au, u) = 0$, adică $[u, u]_A = 0$.

Aşadar, expresia (1) satisface toate axiomele produsului scalar. Considerînd $[u, v]_A$ drept produs scalar, organizăm mulţimea $D(A)$ ca spaţiu Hilbert. Acest spaţiu poate să nu fie complet—caz în care îl completăm. Spaţiul completat se va numi *spaţiul energetic* şi va fi notat cu H_A.

Noul produs scalar generează o nouă normă pe care o notăm $|\ |_A$:

$$|u|_A = \sqrt{[u, u]_A}.$$

Dacă $u \in D(A)$, atunci $|u|_A = \sqrt{(Au, u)}$ şi dacă operatorul dat este pozitiv definit, atunci ţinînd seama de inegalitatea de pozitivă definire avem

$$\|u\| \leqslant \frac{1}{\gamma}|u|_A, \quad u \in D(A). \tag{3}$$

Mărimile $[u, v]_A$ şi $|u|_A$ se vor numai *produsul energetie* al elementelor u şi v, respectiv *norma energetică* a elementului u.

În unele cazuri, cînd nu există pericol de confuzie, vom neglija indicele A scriind, simplu, $[u, v]$ şi $|u|$.

În spaţiul energetic H_A vom face o distincţie între elementele „vechi" — elementele mulţimii $D(A)$ şi elementele „noi" sau ideale obţinute prin completare. Din teoreme cunoscute ale analizei funcţionale rezultă următoarele.

Dacă u este un element ideal din H_A, atunci există un şir de elemente $\{u_n\} \in D(A)$ ce converge la u în norma energetică, adică $|u - u_n| \to 0$, $n \to \infty$. Evident, şirul $\{u_n\}$ este un şir fundamental în metrica energetică. Mulţimea elementelor din $D(A)$ este densă în spatiul energetic.

Teorema 4.3.1. *Spaţiul energetic al unui operator pozitiv definit este scufundat în spaţiul iniţial H, aplicaţia de scufundare fiind mărginită.*

Fie A un operator pozitiv definit. Să arătăm că între elementele spaţiului energetic H_A şi o parte a elementelor spaţiului H putem stabili un izomorfism care păstrează operaţiile liniare şi norma. Aceasta înseamnă că:

1) fiecărui element $u \in H_A$ îi corespunde un element şi numai unul $u' \in H$;

2) dacă elementelor u, $v \in H_A$ le corespund respectiv elementele u', $v' \in H$, atunci combinaţiei liniare $\lambda u + \mu v \in H_A$ îi corespunde $\lambda u' + \mu v' \in H$;

3) la elemente diferite din H_A corespund respectiv elemente diferite din H.

Pentru orice element u al spaţiului energetic se poate construi un şir $\{u_n\}$ de elemente din $D(A)$ astfel încît $|u_n - u| \to \infty$, $n \to \infty$. Într-adevăr, pentru elemente ideale această afirmaţie a fost justificată mai sus; dacă însă $u \in D(A)$ atunci este suficient să considerăm $u_n = u$, $\forall n \in R$. Evident, $u_n - u_m \in D(A)$ şi $|u_n - u_m| \to 0$ pentru $n, m \to \infty$. Conform relaţiei (3) între cele două norme avem

$$\|u_n - u_m\| \leqslant \frac{1}{\gamma}|u_n - u_m|$$

şi deci $\{u_n\}$ este un şir fundamental şi în sensul normei iniţiale. Deoarece H este complet există $u' \in H$, astfel încît $\|u' - u_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. În acest mod am asociat oricărui element $u \in H_A$ un element $u' \in H$.

Să arătăm că u' este unic. Fie $\{v_n\} \in D(A)$ astfel încît $|u - v_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Raţionînd în mod analog, deducem că există un element $v' \in H$ astfel încît $\|v' - v_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Să arătăm că $u' = v'$. Conform inegalităţii triunghiului

$$|u_n - v_n| = |(u_n - u) - (v_n - u)| \leqslant |u_n - u| + |v_n - u| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Deoarece $(u_n - v_n) \in D(A)$, atunci

$$\|u_n - v_n\| \leqslant \frac{1}{\gamma}|u_n - v_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Trecînd la limită pentru $n \to \infty$, obţinem $\|u' - v'\| = 0$ şi astfel unicitatea este demonstrată.

Fie elementele u_1, $u_2 \in H_A$ şi u_{1n}, $u_{2n} \in D(A)$ şirurile corespunzătoare, adică $|u_1 - u_{1n}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $|u_2 - u_{2n}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Fie, mai departe, u_1', u_2' elementele corespunzătoare lui u_1, $u_2 \in H$, adică $\|u_1' - u_{1n}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ şi $\|u_2' - u_{2n}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
Din inegalitatea triunghiului obţinem

$$|(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) - (\lambda_1 u_{1n} + \lambda_2 u_{2n})| = |\lambda_1 (u_1 - u_{1n}) +$$

$$+ \lambda_2 (u_2 - u_{2n})| \leqslant |\lambda_1|\,|u_1 - u_{1n}| + |\lambda_2|\,|u_2 - u_{2n}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$\|(\lambda_1 u_1' + \lambda_2 u_2') - (\lambda_1 u_{1n} + \lambda_2 u_{2n})\| = \|\lambda_1 (u_1 - u_{1n}) +$$

$$+ \lambda_2 (u_2 - u_{2n})\| \leqslant |\lambda_1|\,\|u_1' - u_{1n}\| + |\lambda_2|\,\|u_2' - u_{2n}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

ceea ce arată că elementului $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in H_A$ îi corespunde elementul $\lambda_1 u_1' + \lambda_2 u_2' \in H$. În acest mod s-a demonstrat și liniaritatea corespondenței stabilite $u \to u'$.

Să arătăm acum că la elemente diferite $u_1, u_2 \in H_A$ corespund, respectiv, elemente diferite $u_1', u_2' \in H$.

Fie $u_1' = u_2'$ și să arătăm că aceasta implică $u_1 = u_2$, de unde proprietatea va rezulta. Fie $u_1 - u_2 = v$. Evident, $v \in H_A$ și deoare cecorespondența este liniară, lui v îi corespunde elementul nul al spațiului H; există prin urmare un șir $v_n \in D(A)$, astfel încît

$$\| v_n - 0 \| = \| v_n \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad |v - v_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Fie η un element arbitrar al mulțimii $D(A)$. Din continuitatea produsului scalar avem $[v_n, \eta] \xrightarrow[n\to\infty]{} [v, \eta]$. Pe de altă parte, $[v_n, \eta] = (v_n, A\eta)$. Deoarece $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, atunci $(v_n, A\eta) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0, A\eta) = 0$ și prin urmare $[v, \eta] = 0$. Ultima egalitate arată că în metrica lui H_A elementul v este ortogonal mulțimii $D(A)$, care este densă în H_A. Rezultă astfel că v este elementul nul al spațiului energetic, adică $u_1 = u_2$. Existența izomorfismului dintre H_A și o parte a lui H a fost astfel stabilită.

Identificînd fiecare element din H_A cu elementul corespunzător lui din H, demonstrăm că H_A se scufundă în H. Între $D(A)$, H_A, H au loc relațiile $D(A) \subset H_A \subset H$. Incluziunea $D(A) \subset H_A$ rezultă din faptul că H_A s-a obținut prin completarea lui $D(A)$, iar incluziunea $H_A \subset H$ a fost caracterizată din cele ce s-au arătat mai sus.

Mulțimea $D(A)$ este densă în H. De aici și din relația (4) rezultă că mulțimea elementelor care formează spațiul energetic al operatorului pozitiv definit este densă în spațiul inițial H.

Mai sus am obținut inegalitatea (3) care stabilește legătura dintre cele două norme ale elementelor mulțimii $D(A)$. Să arătăm că această inegalitate este adevărată și pentru orice element din spațiul energetic. Fie $u \in H_A$. Există un șir de elemente $u_n \in D(A)$ astfel încît

$$|u_n - u| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \| u_n - u \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Pentru elementele u_n inegalitatea (3) este adevărată:

$$\| u_n \| \leqslant \frac{1}{\gamma} |u_n|.$$

Trecînd la limită pentru $n \to \infty$ și ținînd seama de continuitatea normelor, obținem

$$\| u \| \leqslant \frac{1}{\gamma} |u|, \quad u \in H_A, \tag{5}$$

de unde rezultă că H_A se scufundă mărginit în H. Afirmația a fost demonstrată.

Am introdus produsul energetic cu ajutorul egalității (1) : $[u, v] = (Au, v)$, $u, v \in D(A)$. Să arătăm că această egalitate este adevărată și în cazul mai general cînd $u \in D(A)$ iar $v \in H_A$. Dacă $v \in H_A$, atunci există un șir $\{v_n\}$,

$$v_n \in D(A), \quad |v_n - v| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \| v_n - v \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Pentru elementele u și v_n egalitatea (1) este adevărată: $[u, v_n] = (Au, v_n)$. Din continuitatea produsului scalar rezultă

$$[u, v_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} [u, v], \quad (Au, v_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (Au, v).$$

Comparînd membrii din dreapta, obținem

$$[u, v] = (Au, v); \quad u \in D(A), \quad v \in H_A. \tag{6}$$

Teorema 4.3.2. *Fie A un operator pozitiv definit care acționează în spațiul Hilbert H. Pentru ca elementul $u \in H$ să aparțină spațiului energetic H_A este necesar și suficient să existe un șir $u_n \in D(A)$, $n = 1, 2, \ldots$, astfel încît*

$$|u_n - u_m|_A \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0, \qquad \| u_n - u \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{7}$$

Necesitatea. Fie $u \in H_A$. Mulțimea $D(A)$ fiind densă în H_A, există un șir $u_n \in D(A)$, $n = 1, 2, \ldots$, astfel încît $|u_n - u|_A \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Șirul fiind convergent, este fundamental, de unde rezultă prima din relațiile (7). A doua relație se deduce din inegalitatea (3):

$$\| u_n - u \| \leqslant \frac{1}{\gamma} |u_n - u|_A \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Suficiența. Să presupunem că sînt îndeplinite condițiile (7). Spațiul H_A fiind complet, există un element $\tilde{u} \in H_A$ astfel încît

$|u_n - \widetilde{u}|_A \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Dar atunci din izomorfismul stabilit la teorema 4.3.1, rezultă că $u = \widetilde{u}$ și prin urmare $u \in H_A$.

Ca exemplu, să găsim spațiul energetic al operatorului A, § 2. Să arătăm că în acest caz H_A coincide cu $\mathring{W}_2^{(1)}(0,1)$; cu alte cuvinte, că H_A se compune din acele funcții și numai din acelea ce satisfac următoarele condiții:

1) sînt absolut continue pe segmentul $[0,1]$;

2) derivatele lor de ordinul întîi sînt de pătrat integrabil pe $[0, 1]$;

3) în punctele $x = 0$ și $x = 1$ aceste funcții se anulează.

După cum s-a văzut în § 2,

$$[u, v]_A = \int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx; \quad u, v \in D(A).$$

Punînd $v = u$, obținem

$$|u|_A^2 = \int_0^1 u'^2(x)\, dx, \quad u \in D(A). \tag{8}$$

Fie u un element arbitrar din H_A. Conform teoremei 4.3.2, $u \in L_2(0,1)$ și există un șir $\{u_n\}$, $u_n \in D(A)$, astfel încît

$$|u_n - u_m| \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0, \qquad \|u_n - u\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Dar $u_n - u_m \in D(A)$ și de aceea putem aplica formula (8), de unde

$$\int_0^1 (u_n'(x) - u_m'(x))^2\, dx \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0.$$

Relația de mai sus poate fi pusă sub forma $\|u_n' - u_m\|^2 \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$, de unde reiese că șirul derivatelor $\{u_n'\}$ este un șir Cauchy în metrica lui $L_2(0,1)$. Spațiul $L_2(0,1)$ fiind complet, există o funcție $w \in L_2(0,1)$ astfel încît $\|u_n' - w\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Relațiile $\|u_n - u\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\|u_n' - w\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ împreună cu teorema 2.5.1 arată că funcția $u(x)$ are derivata generalizată de ordinul întîi $u'(x) = w(x)$; fiind deci element din $L_2(0,1)$, această derivată este de pătrat integrabil pe segmentul

$[0, 1]$. Din teorema 2.6.1 rezultă că funcția $u(x)$ este absolut continuă pe același segment.

Rămîne să arătăm că $u(0) = u(1) = 0$. Conform teoremei 3.3.1 spațiul $W_2^{(1)}(0,1)$ se scufundă mărginit în $C[0,1]$, adică ($B = \text{const}$),

$$|u(0) - u_n(0)| \leqslant \|u - u_n\|_C \leqslant B\, \|u - u_n\|_{2,1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Deci $u(0) = 0$. În mod analog se arată că $u(1) = 0$.

Fie acum $u \in \mathring{W}_2^{(1)}(0,1)$. Să demonstrăm că $u \in H_A$. În baza teoremei 4.3.2 este suficient să arătăm că există un șir $\{u_n\}$ de funcții din $D(A)$ care are proprietățile (7). Funcția $u(x)$ are derivata $u'(x) \in L_2(0,1)$. Dezvoltăm derivata în serie Fourier după cosinusuri. Termenul liber din această serie lipsește deoarece

$$a_0 = \int_0^1 u'(x)\, dx = u(1) - u(0) = 0,$$

adică

$$u'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\pi x.$$

Integrăm egalitatea de mai sus între 0 și x. Deoarece seria converge în medie, ea poate fi integrată termen cu termen. Avînd în vedere faptul că $u(0) = 0$, obținem

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi x,$$

unde $b_k = a_k/k\pi$.

Să construim șirul de funcții

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin k\pi x.$$

Evident, $u_n \in D(A)$. În baza convergenței seriei Fourier, $\|u_n - u\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Trebuie să arătăm că $\|u_n - u_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$. Fără a restrînge generalitatea se poate considera că $n > m$. Atunci

$$u_n(x) - u_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} b_k \sin k\pi x.$$

Scriind patratul normei energetice a diferenței $u_n - u_m$, obținem

$$\|u_n - u_m\|^2 = \int_0^1 \left(\sum_{k=m+1}^{n} a_k \cos k\pi x \right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \sum_{k=m+1}^{n} a_k^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

și deci $u \in H_A$.

§ 4. FUNCȚIONALA ENERGETICĂ ȘI PROBLEMA MINIMULUI ACESTEIA

Fie A un operator pozitiv definit care acționează într-un spațiu Hilbert H și fie f un element din H. Funcționala pătratică

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f) \tag{1}$$

se numește *funcționala energetică* a operatorului A. Evident, $D(F) = D(A)$.

Să formulăm problema minimului funcționalei energetice pe mulțimea $D(A)$. Să demonstrăm următoarea teoremă.

Teorema 4.4.1. *Pentru ca $u_0 \in D(A)$ să realizeze minimul funcționalei energetice este necesar și suficient ca acesta să satisfacă ecuația*

$$Au_0 = f. \tag{2}$$

Dacă un astfel de element există, el este unic.

Necesitatea. Să presupunem că $u_0 \in D(A)$ realizează minimul funcționalei (1). Fie η un element arbitrar din $D(A)$ și t un număr real arbitrar, atunci

$$F(u_0 + t\eta) \geqslant F(u_0). \tag{3}$$

Fixăm elementul η. Din inegalitatea (3) rezultă că funcția de t egală cu $F(u_0 + t\eta)$ atinge minimul pentru $t = 0$. Atunci $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(u_0 + t\eta)|_{t=0} = 0$ sau, dacă se aplică formei pătratice (Au, u) relația (1.4), avem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \{F(u_0) + 2t(Au_0 - f, \eta) + t^2 (A\eta, \eta)\}|_{t=0} =$$

$$= 2(Au_0 - f, \eta) = 0, \qquad \forall \eta \in D(A), \tag{4}$$

de unde ținînd seama că $Au_0 - f$ este ortogonal mulțimii $D(A)$, care este densă în H, rezultă $Au_0 - f = 0$.

Suficiența. Să presupunem că u_0 satisface ecuația (2). Dacă u este un element arbitrar din $D(A)$, $u \neq u_0$, atunci se poate pune $u = u_0 + \eta$, $\eta \neq 0$. Conform formulei (1.4) obținem $F(u) = F(u_0) + 2(Au_0 - f, \eta) + (A\eta, \eta)$, care cu ajutorul ecuației (2) capătă forma $F(u) = F(u_0) + (A\eta, \eta)$. Dar A este un operator pozitiv definit, iar $\eta \neq 0$; de unde $(A\eta, \eta) > 0$ și prin urmare $F(u) > F(u_0)$. Aceasta înseamnă că în punctul u_0 funcționala (1) își atinge minimul.

Rămîne să demonstrăm unicitatea elementului u_0. Să presupunem că există încă un element, u_1, în care F își atinge minimul. Conform celor demonstrate mai înainte $F(u_1) > F(u_0)$. În același mod ca mai sus se poate arăta că $F(u_0) > F(u_1)$. Din contradicția obținută rezultă că funcționala (1) își poate atinge minimul numai într-un singur punct.

Remarcăm că am stabilit echivalența între problema rezolvării ecuației $Au = f$ și aceea a aflării minimului funcționalei energetice $F(u) = (Au, u) - 2(u, f)$; dacă una din aceste probleme este rezolvabilă, atunci și cealaltă este rezolvabilă și soluția uneia dintre ele este și soluția celeilalte. Teorema 4.4.1. nu stabilește dacă aceste probleme au soluție. Mai mult, după cum vom vedea în exemplul următor, este posibil să nu avem soluție pentru problema formulată.

Fie $H = L_2(0,1)$ și să presupunem că în ecuația (2) A este operatorul analizat în § 2. A rezolva ecuația $Au = f$ înseamnă în exemplul nostru următoarele: $f(x)$ este o funcție dată de pătrat integrabil ; trebuie să găsim o funcție $u(x)$ ce satisface condițiile (2.4) și are derivata de ordinul al doilea continuă, care diferă de $f(x)$ numai prin semn. Dar acest lucru este imposibil dacă $f(x)$ este discontinuă.

Același exemplu arată că problema poate deveni rezolvabilă dacă se extinde domeniul de definiție al operatorului A : în exemplul nostru este suficient să adăugăm lui $D(A)$ funcțiile cu derivatele de ordinul întîi absolut continue și cu derivatele de ordinul al doilea de pătrat integrabil; condiția (2.7) trebuie, evident, păstrată.

Dacă $f \in L_2(0,1)$, atunci ecuația $Au = f$ are în aceste condiții soluție. Aceasta înseamnă că $u(x)$ satisface condițiile (2.4) și ecuația diferențială $(-d^2u/dx^2) = f(x)$. O astfel de funcție există și este egală cu

$$u(x) = x \int_x^1 (1 - t) f(t)\mathrm{d}t + (1 - x) \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t;$$

se verifică ușor că această funcție aparține domeniului de definiție extins al operatorului nostru.

Se dovedește însă că este mai simplu și mai comod să extindem nu domeniul de definiție al operatorului A, ci cel al funcționalei energetice atașat lui. De aceasta ne vom ocupa în paragraful următor.

§ 5. SOLUȚIE GENERALIZATĂ

Fie, ca și mai înainte, A un operator pozitiv definit, care acționează în spațiul Hilbert H, f un element dat din acest spațiu și F — funcționala energetică corespunzătoare:

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f). \tag{1}$$

Formula (1) definește funcționala F pe mulțimea $D(A)$; este ușor de prelungit această funcțională la tot spațiul energetic H_A. Pentru aceasta este suficient să admitem că $(Au, u) = |u|_A^2$ și deci

$$F(u) = |u|_A^2 - 2(u, f). \tag{2}$$

În relația (2) primul termen din dreapta este definit pentru $u \in H_A$. Al doilea termen este definit pentru $u \in H$ și deci cu atît mai mult pentru $u \in H_A$. Acum este clar că formula (2) permite să se definească funcționala F pe tot spațiul energetic H_A.

Revenind la exemplul

$$Au = -\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}, \quad u \in C^{(2)}[0, 1], \quad u(0) = u(1) = 0,$$

vedem că funcționala F poate fi scrisă sub forma

$$F(u) = -\int_0^1 u \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 fu\,\mathrm{d}x,$$

precum și sub forma

$$F(u) = \int_0^1 u'^2\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 fu\,\mathrm{d}x,$$

ultima arătînd că funcționala are sens pentru orice $u \in H_A$. Deci aceasta permite să extindem funcționala energetică la tot spațiul energetic.

Acum vom căuta minimul funcționalei F, nu în $D(A)$, ci în H_A. Să demonstrăm teorema următoare.

Teorema. 4.5.1. *În spațiul energetic există un element și numai unul pentru care funcționala energetică își atinge minimul.*

Conform inegalității lui Cauchy, avem

$$|(u, f)| \leqslant \|u\|\,\|f\|, \tag{3}$$

iar din relația între norma veche și cea nouă (inegalitatea (3.3)) $\|u\| \leqslant \frac{1}{\gamma}|u|$, de unde rezultă că

$$|(u, f)| \leqslant c|u|, \quad c = \frac{\|f\|}{\gamma}, \tag{4}$$

și deci funcționala (u, f) este mărginită în H_A. Conform cunoscutei teoreme a lui Riesz, există un element $u_0 \in H_A$, și numai unul, astfel încît

$$(u, f) = [u, u_0], \quad u \in H_A. \tag{5}$$

Ținînd seama de expresia (5), funcționala F poate fi pusă sub forma

$$F(u) = |u|^2 - 2[u, u_0] = [u, u] - 2[u, u_0] +$$

$$+ [u_0, u_0] - [u_0, u_0] = [u - u_0, u - u_0] - [u_0, u_0],$$

sau, mai simplu,

$$F(u) = |u - u_0|^2 - |u_0|^2, \quad u \in H_A. \tag{6}$$

Din relația (6) rezultă imediat că minimul funcționalei F pe spațiul H_A se atinge pentru $u = u_0$ și numai pentru acest element. Mai mult, avem

$$\min F(u) = -|u_0|^2. \tag{7}$$

Elementul $u_0 \in H_A$ care realizează minimul funcționalei (2) se numește *soluție generalizată a ecuației*

$$Au = f. \tag{8}$$

Dacă $u_0 \in D(A)$ atunci, conform teoremei 4.4.1, u_0 este soluția clasică a ecuației (8).

Soluția generalizată se poate defini și independent de problema minimului funcționalei energetice. Să presupunem că ecuația (8)

are soluția $u \in D(A)$. Înmulțim scalar ambele părți ale acestei ecuații cu un element arbitrar $\eta \in H_A$. Aplicînd egalitatea (3.6), găsim că soluția u satisface identitatea

$$[u, \eta]_A = (f, \eta)\,; \ \forall \eta \in H_A, \tag{5a}$$

care diferă de identitatea (5) numai prin notație. Reciproc, dacă $u \in D(A)$ satisface identitatea (5a), atunci, cu ajutorul aceleiași egalități (3.6), ea poate fi pusă sub forma $(Au - f, \eta) = 0$, $\forall \eta \in H_A$, de unde $Au = f$. Prin urmare, ecuația (8) și identitatea (5a) sînt echivalente. Astfel soluția generalizată a ecuației (8) se poate defini ca un element al spațiului energetic care satisface identitatea (5a); evident, definițiile date în acest paragraf soluției generalizate sînt echivalente.

Să estimăm norma soluției generalizate. Punînd în (5) $u = u_0$ și aplicînd apoi inegalitatea lui Cauchy, găsim $|u_0|^2 \leqslant \|f\| \cdot \|u_0\|$. Conform inegalității (3.3), avem $\|u_0\| \leqslant \gamma^{-1}|u_0|$; substituind aceasta în inegalitatea de mai sus, obținem pentru norma energetică a soluției generalizate:

$$|u_0| \leqslant \frac{1}{\gamma}\|f\|. \tag{9}$$

Din aceeași inegalitate (3.3), utilizînd evaluarea lui $|u_0|$, găsim

$$\|u_0\| \leqslant \frac{1}{\gamma^2}\|f\|. \tag{10}$$

Dacă spațiul energetic este separabil, atunci se poate da o cale simplă de construire a soluției generalizate a ecuației (8). Într-un spațiu Hilbert separabil există un sistem complet, numărabil, ortonormat $\{\omega_n\}$:

$$[\omega_j, \omega_k] = \delta_{jk} = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k, \end{cases} \quad j, k = 1, 2, \ldots$$

Fie u_0 soluția generalizată a ecuației (8). Să dezvoltăm u_0 în serie Fourier după sistemul $\{\omega_k\}$:

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} [u_0, \omega_k]\omega_k.$$

Această serie converge în norma energetică: dacă notăm

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} [u_0, \omega_k]\omega_k,$$

atunci $|u_0 - \varphi_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Coeficienții Fourier $[u_0, \omega_k]$ se calculează ușor după formula (5): punînd în (5) $u = \omega_k$, obținem $[u_0, \omega_k] = (f, \omega_k)$, de unde

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \omega_k)\,\omega_k. \tag{11}$$

După cum s-a menționat, seria (11) converge în norma spațiului energetic H_A; ea converge și în norma spațiului inițial H. Într-adevăr, notînd ca mai sus prin φ_n suma parțială a seriei (11), conform inegalității (3.3), avem

$$\|u_0 - \varphi_n\| \leqslant \frac{1}{\gamma}|u_0 - \varphi_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

În legătură cu teorema 4.5.1 se pune problema condițiilor în care spațiul energetic este separabil. Această problemă va fi rezolvată în paragraful următor.

§ 6. DESPRE SEPARABILITATEA SPAȚIULUI ENERGETIC

Ca și pînă acum vom înțelege prin A un operator pozitiv definit care acționează într-un spațiu Hilbert.

Lema 4.6.1. *Dacă șirul $\{f_n\}$ este complet în spațiul inițial H și dacă $\{\varphi_n\}$ este soluția generalizată a ecuației $A\varphi_n = f_n$, atunci șirul $\{\varphi_n\}$ este complet în spațiul energetic H_A.*

Fie $u \in D(A)$. Notînd $Au = v$, avem $v \in H$. Introducem notațiile

$$\sum_{k=1}^{N} a_k f_k = s_N, \quad \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k = \sigma_N. \tag{1}$$

Să estimăm pătratul normei diferențelor

$$|u - \sigma_N|^2 = [u - \sigma_N, u - \sigma_N].$$

Notăm $u - \sigma_N = \eta$, atunci

$$[u - \sigma_N, u - \sigma_N] = [u - \sigma_N, \eta] = [u, \eta] - [\sigma_N, \eta].$$

Deoarece $u \in D(A)$, $\eta \in H_A$, atunci $[u, \eta] = (Au, \eta) = (v, \eta)$. Deci

$$[\sigma_N, \eta] = \sum_{k=1}^{N} a_k [\varphi_k, \eta]$$

și conform formulei (5.10), $[\varphi_k, \eta] = (f_k, \eta)$; atunci $[\sigma_N, \eta] = \sum_{k=1}^{N} a_k (f_k, \eta) = (S_N, \eta)$ și

$$|u - \sigma_N|^2 = (v - S_N, \eta). \tag{2}$$

Sistemul $\{f_n\}$ este complet în H, deci pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr N și coeficienții a_k, astfel încît $\|v - S_N\| < \varepsilon$. Din identitatea (2) obținem

$$|u - \sigma_N|^2 = (v - s_N, \eta) \leqslant \|v - s_N\| \, \|\eta\| < \frac{\varepsilon}{\gamma} |\eta| =$$

$$= \frac{\varepsilon}{\gamma} |u - \sigma_N|.$$

Dacă $|u - \sigma_N| \neq 0$, atunci avem

$$|u - \sigma_N| < \frac{\varepsilon}{\gamma}; \tag{3}$$

această inegalitate are loc evident și pentru $|u - \sigma_n| = 0$. Prin urmare, dacă $u \in D(A)$, atunci el poate fi aproximat oricît de bine prin combinații liniare de elemente ale sistemului $\{\varphi_n\}$.

Fie acum $u \in H_A$. Mulțimea $D(A)$ este densă în H_A, de aceea există $u' \in D(A)$, astfel încît $|u - u'| < \varepsilon/2$. Pe de altă parte, după cum s-a arătat, există un număr natural N și numerele $a_1, a_2, \ldots, a_N$ astfel încît

$$\left| u' - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Deci, conform inegalității triunghiului, obținem

$$\left| u - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k \right| < \varepsilon.$$

Teorema 4.6.1. *Pentru ca spațiul energetic al unui operator pozitiv definit să fie separabil, este necesar și suficient ca spațiul inițial să fie separabil.*

Necesitatea. Fie A un operator pozitiv definit într-un spațiu Hilbert H și fie că spațiul energetic H_A este separabil. Atunci în H_A există o mulțime densă numărabilă $\{\varphi_n\}$. Să arătăm că această mulțime este densă și în spațiul inițial H. Fie u un element arbitrar din H. Mulțimea elementelor spațiului energetic este densă în spațiul inițial și deci pentru $\varepsilon > 0$ există $u' \in H_A$ astfel încît $\|u - u'\| < \varepsilon/2$. Apoi, putem alege elementul ψ_ν astfel încît $|u' - \psi_\nu| < \varepsilon\gamma/2$; aici γ este constanta de pozitivă definire ce apare în inegalitatea (2.7). Din relația dintre norma veche și cea nouă (inegalitatea (3.3)), avem $\|u' - \psi_\nu\| < \varepsilon/2$, iar conform inegalității triunghiului $\|u - \psi_\nu\| \leqslant \|u - u'\| + \|u' - \psi_\nu\| < \varepsilon$. Ultima inegalitate arată că spațiul H conține mulțimea numărabilă densă $\{\psi_n\}$ și prin urmare el este separabil.

Suficiența. Fie H un spațiu separabil și $\{f_n\}$ un șir numărabil, complet în H. Construim elementele $\varphi_n \in H_A$ — soluții generalizate ale ecuațiilor $A\varphi_n = f_n$. Conform lemei 4.6.1 șirul $\{\varphi_n\}$ este complet în H_A. Construim elemente de tipul

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, \tag{4}$$

unde α_k sînt numere raționale. Mulțimea acestor elemente este numărabilă. Să arătăm că ea este densă în H_A.

Într-adevăr, pentru $\varepsilon > 0$ și $u \in H_A$ există un număr natural N și numerele reale a_k, astfel încît

$$\left| u - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alegem acum numerele raționale α_k suficient de apropiate de numerele reale a_k, astfel încît

$$\sum_{k=1}^{N} |\alpha_k - a_k| \, |\varphi_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Atunci, din inegalitatea triunghiului, avem

$$\left| u - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k \right| < \varepsilon$$

și deci mulțimea (4) este densă în H_A.

§ 7. EXTENSIA UNUI OPERATOR POZITIV DEFINIT

Fie A un operator pozitiv definit care acționează într-un spațiu Hilbert H. Relația (5.5) pune în corespondență fiecărui element $f \in H$ un element și numai unul $u_0 \in H_A$ care realizează minimul funcționalei energetice $F(u)$. Prin urmare această relație definește un anumit operator liniar G:

$$u_0 = Gf, \tag{1}$$

care acționează în spațiul H. Domeniul de definiție al acestui operator este $D(G) = H$, iar mulțimea valorilor $R(G)$ este o parte a mulțimii elementelor care formează spațiul energetic H_A, adică $R(G) \subset H_A$.

Lema 4.7.1 *Operatorul G este simetric și mărginit.*

Să scriem relația (5.5) sub forma

$$(u, f) = [u, Gf], \quad u \in H_A. \tag{2}$$

Fie h un element arbitrar din H și $u = Gh$; atunci $u \in H_A$. Din relația (2) obținem $(Gh, f) = [Gh, Gf] = [Gf, Gh]$. Schimbînd locurile lui f și h, obținem $[Gf, Gh] = [(Gf, h) = (h, Gf)$. În final,

$$(Gh, f) = (h, Gf), \tag{3}$$

adică operatorul G este simetric. Să punem acum în relația (2) $u = Gf$; obținem $|Gf|_A^2 = (Gf, f)$. Aplicînd părții din dreapta inegalitatea lui Cauchy și minorînd cu mărimea $\gamma^2 \|Gf\|^2$, găsim $\gamma^2 \|Gf\|^2 \leqslant \|Gf\| \, \|f\|$, de unde $\|Gf\| \leqslant \frac{1}{\gamma^2} \|f\|$. Din această inegalitate rezultă că operatorul G este mărginit și deci

$$\|G\| \leqslant \frac{1}{\gamma^2}. \tag{4}$$

Lema 4.7.2. *Operatorul G este inversabil.*

Este suficient să arătăm că ecuația $Gf = 0$ are soluția unică $f = 0$. Fie $Gf = 0$. Din relația (2) obținem $(u, f) = 0$, $\forall u \in H_A$. Elementul f este deci ortogonal pe o mulțime densă din H, și anume pe mulțimea elementelor spațiului energetic. Aceasta implică $f = 0$.

Operatorul G^{-1}, inversul operatorului G, se va nota cu $\widetilde{A}$. Evident, $D(\widetilde{A}) = R(G) \subset H_A$ și $R(\widetilde{A}) = D(G) = H$.

Teorema 4.7.1. *Operatorul $\widetilde{A}$ este o extensie pozitiv definită a operatorului A. Marginile inferioare ale rapoartelor*

$$\frac{(Au, u)}{\|u\|^2}, \quad \frac{(\widetilde{A}u, u)}{\|u\|^2} \tag{5}$$

sînt egale. Ecuația

$$\widetilde{A}u = f \tag{6}$$

are o soluție și numai una pentru orice $f \in H$.

Fie $u_0 \in D(A)$ și $Au_0 = f$. Conform teoremei 5.4.1 elementul u_0 realizează minimul funcționalei $F(u) = (Au, u) - 2(f, u)$. Din relația (1) avem $u_0 = Gf$ și prin urmare $\widetilde{A}u_0 = f$. De aici rezultă că:

1) $u_0 \in D(\widetilde{A})$ și cum u_0 este un element arbitrar al mulțimii $D(A)$, avem $D(A) \subset D(\widetilde{A})$;

2) dacă $u_0 \in D(A)$, atunci $Au_0 = \widetilde{A}u_0$.

Condițiile 1) și 2) arată că $\widetilde{A}$ este o extensie a operatorului A.

Să arătăm acum că $\widetilde{A}$ este un operator simetric. Înainte de toate domeniul său de definiție este dens în H, deoarece $D(\widetilde{A}) \supset D(A)$. Fie u, v elemente arbitrare din $D(A)$ și fie $\widetilde{A}u = f$, $\widetilde{A}v = h$. Atunci $u = Gf$, $v = Gh$. Substituind în relația (3), obținem egalitatea $(v, \widetilde{A}u) = (u, \widetilde{A}v)$, ceea ce probează simetria operatorului $\widetilde{A}$.

Operatorul $\widetilde{A}$ este o extensie a lui A, de aceea mulțimea valorilor raportului $(\widetilde{A}u, u) / \|u\|^2$ este mai largă decît aceea a lui $(Au, u) / \|u\|^2$ și prin urmare

$$\inf_{u \in D(\widetilde{A})} \frac{(\widetilde{A}u, u)}{\|u\|^2} \leqslant \inf_{u \in D(A)} \frac{(Au, u)}{\|u\|^2}. \tag{7}$$

Pe de altă parte, notînd

$$\inf_{u \in D(A)} \frac{(Au, u)}{\|u\|^2} = \gamma_0^2, \quad \gamma_0^2 > 0, \tag{8}$$

avem $(Au, u) \geqslant \gamma_0^2 \|u\|^2$ și deci $|u|_A \geqslant \gamma_0 \|u\|$, $u \in H_A$. Să folosim în identitatea (2) pentru $u = Gf$, $f = \widetilde{A}u$:

$$(u, \widetilde{A}u) = (\widetilde{A}u, u) = [Gf, Gf]_A = |u|_A^2 \geqslant \gamma_0^2 \|u\|^2.$$

De aici rezultă $(\widetilde{A}u, u) \diagup \|u\|^2 \geqslant \gamma_0^2$ și deducem

$$\inf_{u \in D(\widetilde{A})} \frac{(\widetilde{A}u, u)}{\|u\|^2} \geqslant \gamma_0^2 = \inf_{u \in D(A)} \frac{(Au, u)}{\|u\|^2}. \tag{9}$$

Comparînd relațiile (7) și (9) deducem că

$$\inf_{u \in D(\widetilde{A})} \frac{(\widetilde{A}u, u)}{\|u\|^2} = \inf_{u \in D(A)} \frac{(Au, u)}{\|u\|^2}. \tag{10}$$

Rezolvabilitatea ecuației (6) pentru orice $f \in H$ este numai o altă formulare a faptului menționat mai sus că $R(\widetilde{A}) = H$. Într-adevăr, dacă $f \in H$, atunci $f \in R(\widetilde{A})$, adică există un element u_0 astfel încît $\widetilde{A}u_0 = f$. Unicitatea soluției este consecința pozitivei definiri a operatorului $\widetilde{A}$ (vezi teoremele 4.4.1 și 4.5.1).

Din rezolvabilitatea ecuației (6) pentru orice $f \in H$ rezultă că soluția generalizată a acestei ecuații este soluția clasică. În acest fel putem spune că soluția generalizată a ecuației $Au = f$ este soluție clasică a ecuației $\widetilde{A}u = f$.

Extensia $\widetilde{A}$ a operatorului pozitiv definit A, descrisă în acest paragraf, a fost construită de K. Friedrichs. Mai jos vom numi $\widetilde{A}$ *extensia după Friedrichs a operatorului* A sau, mai simplu, *extensia Friedrichs*.

Observație. Pentru cititorii familiarizați cu noțiunea de operator autoadjunct, menționăm că extensia Friedrichs $\widetilde{A}$ a unui operator pozitiv definit A este extensia autoadjunctă a acestui operator. Demonstrația acestei afirmații poate fi găsită în [10] și [30].

Mărimea γ_0 (relația (8)) se numește *marginea inferioară* a operatorului pozitiv definit A. În felul acesta se ajunge la teorema lui K. Friedrichs.

Teorema 4.7.2. *Un operator pozitiv definit poate fi extins la un operator autoadjunct cu păstrarea marginii interioare.*

Teorema 4.7.3. *Spațiile energetice ale unui operator pozitiv definit și ale extensiei sale Friedrichs coincid.*

Fie A un operator pozitiv definit în spațiul Hilbert H și $\widetilde{A}$ extensia Friedrichs a operatorului A. Trebuie să arătăm că spațiile H_A și $H_{\widetilde{A}}$ se compun din unele și aceleași elemente și că

$$|u_0|_{\widetilde{A}} = |u_0|_A, \qquad u_0 \in H_A. \tag{11}$$

Orice element din H_A aparține și lui $H_{\widetilde{A}}$ și normele corespunzătoare sînt identice. Afirmația este evidentă pentru elementele din domeniul $D(A)$. Dacă $u_0 \in D(A)$, atunci $u_0 \in D(\widetilde{A}) \subset H_{\widetilde{A}}$. În acest caz, $|u_0|_A^2 = (Au_0, u_0) = (\widetilde{A}u_0, u_0) = |u_0|_{\widetilde{A}}^2$. Conform teoremei 4.3.2, relația $u_0 \in H_A$ înseamnă că există un șir $\{u_n\}$, $u_n \in D(A)$, cu proprietățile (3.7). Dacă însă $u_n, u_m \in D(A)$, atunci $u_n, u_m \in D(\widetilde{A})$ și avem

$$|u_n - u_m|_A^2 = (A(u_n - u_m), \ u_n - u_m) = (\widetilde{A}(u_n - u_m), \ u_n - u_m) =$$

$$= |u_n - u_m|_{\widetilde{A}}^2. \tag{12}$$

Prin urmare există un șir $\{u_n\}$, $u_n \in D(\widetilde{A})$, cu proprietățile

$$\|u_n - u_0\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \ |u_n - u_m|_{\widetilde{A}} \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0; \tag{13}$$

de aici, conform aceleiași teoreme 4.3.2, rezultă că $u_0 \in H_{\widetilde{A}}$. Ținînd seama de definiția elementelor ideale avem

$$|u_n - u_0|_A \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \quad |u_n - u_0|_{\widetilde{A}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

de unde

$$|u_0|_{\widetilde{A}} = \lim_{n \to \infty} |u_n|_{\widetilde{A}} = \lim_{n \to \infty} |u_n|_{\widetilde{A}} = |u_0|_{\widetilde{A}}.$$

Să arătăm acum că din relația $u \in H_{\widetilde{A}}$ rezultă $u \in H_A$ și egalitatea (11). Dacă $u \in H_{\widetilde{A}}$, atunci există un șir $\{u_n\}$, $u_n \in D(\widetilde{A})$ cu proprietățile (13). Mai sus am văzut că $D(\widetilde{A}) \subset H_A$, deci $u_n \in H_A$ și, după cum am arătat la punctul 1, avem $|u_n - u_m|_{\widetilde{A}} = |u_n - u_m|_A$, proprietățile (13) fiind echivalente cu (3.7), ceea ce implică $u \in H_A$. Pentru elementele $u \in H_A$ egalitatea (11) s-a stabilit la punctul 1.

Mai înainte am stabilit relația (3.6)

$$[u, v]_A = (Au, v), \quad u \in D(A), \quad v \in H_A.$$

Este adevărată și următoarea relație mai generală:

$$[u, v]_A = (\widetilde{A}u, v), \quad u \in D(\widetilde{A}), \ v \in H_A. \tag{14}$$

Într-adevăr, dacă $u \in D(\tilde{A})$, $v \in H_A = H_{\tilde{A}}$, atunci conform relației (3.6) avem

$$[u, v]_{\tilde{A}} = (\tilde{A}u, v). \tag{15}$$

În spațiile H_A și $H_{\tilde{A}}$ normele coincid, ceea ce implică că și produsele scalare coincid:

$$[u, v]_{\tilde{A}} = \frac{1}{4}\{|u + v|^2_{\tilde{A}} - |u - v|^2_{\tilde{A}}\} =$$

$$= \frac{1}{4}\{|u + v|^2_A - |u - v|^2_A\} = [u, v]_A.$$

Înlocuind în egalitatea (15) pe $[u, v]_{\tilde{A}}$ cu $[u, v]_A$, obținem relația (14).

§ 8. O PROBLEMĂ LA LIMITĂ ELEMENTARĂ PENTRU ECUAȚIA DIFERENȚIALĂ ORDINARĂ

Fie ecuația diferențială ordinară de ordinul al doilea

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + q(x)u(x) = f(x) \tag{1}$$

și să formulăm următoarea problemă: să se găsească soluția acestei ecuații pe segmentul $[a, b]$ ce satisface condițiile la limită

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{2}$$

Presupunem că $p, p', q \in C[a, b]$, $f \in L_2(a, b)$, $p(x) \geqslant p_0 = \text{const} > 0$, $q(x) \geqslant 0$. Deoarece funcțiile $p(x)$ și $q(x)$ sînt și continue pe segmentul $[a, b]$, atunci

$$p_0 \leqslant p(x) \leqslant p_1, \quad 0 \leqslant q(x) \leqslant q_1, \quad x \in [a, b],$$

unde p_1 și q_1, ca și p_0, sînt constante pozitive. Să considerăm $H = L_2(a, b)$. Drept domeniu de definiție al operatorului

$$Au = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)u(x) \tag{3}$$

considerăm mulțimea funcțiilor $u(x)$ care satisface condițiile $u \in C^{(2)}[a, b]$, $u(a) = u(b) = 0$.

Să demonstrăm că operatorul A este pozitiv definit. Domeniul său de definiție este dens în $L_2(a, b)$. Aceasta rezultă din corolarul 2.3.1. Să verificăm că A este simetric. Fie $u, v \in D(A)$, atunci

$$(Au, v) = -\int_a^b v\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}x + \int_a^b q(x)u(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

Integrînd primul termen prin părți și ținînd seama că funcția $v(x)$ satisface condițiile la limită (2), obținem expresia simetrică

$$(Au, v) = \int_a^b \left[p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + q(x)uv\right]\mathrm{d}x, \tag{4}$$

care arată că $(Au, v) = (u, Av)$, adică operatorul A este simetric.

Punînd în relația (4) $v = u$, obținem

$$(Au, u) = \int_a^b \left[p(x)\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2 + q(x)u^2(x)\right]\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Ținînd seama de mărginirea coeficienților, deducem de aici

$$(Au, u) \geqslant p_0\int_a^b \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x. \tag{5a}$$

Din inegalitatea lui Friedrichs (formula (6.10)), avem

$$\|u\|^2 = \int_a^b u^2(x)\mathrm{d}x \leqslant (b - a)^2\int_a^b u'^2(t)\ \mathrm{d}t. \tag{*}$$

În final, avem

$$(Au, u) \geqslant \frac{p_0}{(b - a)^2}\|u\|^2,$$

ceea ce demonstrează pozitiva definire; se poate pune $\gamma = \frac{\sqrt{p_0}}{b - a}$. Operatorul A este deci pozitiv definit și se poate introduce spațiul energetic H_A.

Să arătăm că H_A coincide cu $\mathring{W}_2^{(1)}(a, b)$ și că normele în aceste două spații sînt echivalente. Să presupunem că $u \in H_A$. Conform teoremei 4.3.2, există un șir $\{u_n\}$, $u_n \in D(A)$, care are proprietățile (3.7).

Dacă $u \in D(A)$, atunci

$$|u|^2 = (Au, u) = \int_a^b \left[p(x) \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + q(x)u^2(x) \right] dx.$$

Prin urmare, avem

$$|u_n - u_m|^2 = \int_a^b [p(x)(u_n' - u_m')^2 + q(x)(u_n - u_m)^2]\, dx \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

și cum ambii termeni de sub integrală sînt nenegativi, atunci

$$\int_a^b p(x)(u_n' - u_m')^2 dx \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0. \tag{6}$$

Folosind mărginirea lui p, obținem

$$p_0 \int_a^b (u_n' - u_m')^2 dx \leqslant \int_a^b p(x)(u_n' - u_m')^2 dx \leqslant p_1 \int_a^b (u_n' - u_m')^2\, dx$$

și deci relația (6) este echivalentă cu

$$\int_a^b (u_n' - u_m')^2 dx \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0. \tag{6a}$$

Deci șirul $\{u_n'\}$ este șir Cauchy în metrica lui $L_2(a, b)$. Spațiul $L_2(a, b)$ este complet și prin urmare șirul converge către o anumită funcție $v \in L_2(a, b)$.

În identitatea

$$\int_a^x u_n'(t)dt = u_n(x) - u_n(a) = u_n(x)$$

se poate trece la limită și avem

$$u(x) = \int_a^x v(t)dt.$$

Ultima egalitate arată absoluta convergență a funcției $u(x)$ și prin urmare $u' = v \in L_2(a, b)$. Este evident astfel că $u(a) = 0$; rămîne de arătat că $u(b) = 0$. Acest lucru se poate face, de exemplu, astfel: în identitatea

$$\int_x^b u_n'(t)dt = u_n(b) - u_n(x) = -u_n(x)$$

trecem la limită

$$u(x) = -\int_x^b v(t)dt$$

și, evident, obținem $u(b) = 0$.

Am văzut mai sus că pentru $u \in D(A)$ are loc relația

$$|u|^2 = \int_a^b \left[p(x) \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + q(x)u^2(x) \right] dx. \tag{7}$$

Să arătăm că această relație rămîne adevărată pentru orice funcție din spațiul energetic. Fie $u \in H_A$. Alegem șirul $u_n \in D(A)$ cu proprietățile (3.7): $|u_n - u| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\|u_n - u\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Din relația (6a) mai rezultă $\|u_n' - u'\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Dar norma limitei este egală cu limita normei, deci avem

$$\|u_n\|^2 \to \|u\|^2,\ |u_n|^2 \to |u|^2,\ \|u_n'\|^2 \to \|u'\|^2. \tag{8}$$

Pentru funcțiile u_n relația (7) este adevărată:

$$|u_n|^2 = \int_a^b [pu_n'^2 + qu_n^2] dx.$$

Din relația (8) rezultă că pentru $n \to \infty$ membrul stîng al ultimei egalități are limita $|u|^2$. Să arătăm că limita membrului drept este egală cu

$$\int_a^b [pu'^2 + qu^2] dx.$$

În acest sens avem inegalitatea

$$\left|\int_a^b [pu_n'^2 + qu_n^2]\mathrm{d}x - \int_b^a [pu'^2 + qu^2]\,\mathrm{d}x\right| \leqslant$$

$$\leqslant p_1\int_a^b |u_n'^2 - u'^2|\mathrm{d}x + q_1\int_a^b |u_n^2 - u^2|\mathrm{d}x.$$

Conform inegalității lui Buniakovski

$$\int_a^b |u_n'^2 - u'^2|\mathrm{d}x \leqslant \left\{\int_a^b (u_n' + u')^2\mathrm{d}x\right\}^{1/2}\left\{\int_a^b (u_n' - u')^2\mathrm{d}x\right\}^{1/2} =$$

$$= \|u_n' + u'\|\,\|u_n' - u'\|.$$

Dar $\|u_n'\| \to \|u'\|$ și atunci $\|u_n' + u'\| \leqslant \|u_n'\| + \|u'\|$ este mărginită, adică

$$\int_a^b |u_n'^2 - u'^2|\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

În mod analog se arată că

$$\int_a^b |u_n^2 - u^2|\mathrm{d}x \to 0$$

și relația (7) este deci demonstrată pentru orice funcție din H_A.

Să demonstrăm acum reciproca: dacă $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(a, b)$, atunci $u \in H_A$. Conform teoremei 4.3.2. este suficient să se arate că există un șir $\{u_n\}$, $u_n \in D(A)$ cu proprietățile (3.7). Pentru a arăta aceasta, dezvoltăm derivata funcției u în serie Fourier după cosinusuri

$$u'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi(x-a)}{b-a}.$$

Termenul liber lipsește deoarece

$$a_0 = \frac{1}{b-a}\int_a^b u'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}[u(b) - u(a)] = 0.$$

Integrînd prin părți, obținem

$$u(x) \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi(x-a)}{b-a}, \quad b_k = \frac{a_k(b-a)}{k\pi}.$$

Drept u_n este suficient să se ia suma parțială a ultimei serii.

Se poate arăta ușor echivalența normelor în H_A și $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(a, b)$ Norma în $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(a, b)$ se poate defini prin relația (6.5)

$$\|u\|_{2;1}^2 = \int_a^b [u'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

Apoi, din formulele (7) și (*) rezultă că

$$\sqrt{p_0}\|u\|_{2,1} \leqslant |u| \leqslant \sqrt{p_1 + \frac{q_1}{(b-a)^2}}\|u\|_{2;1};\ q_1 = \max q(x) \qquad (9)$$

și echivalența normelor este astfel demonstrată.

Soluția generalizată $u_0(x)$ a problemei (1)—(2) există și este unică: această funcție realizează minimul funcționalei energetice $F(u) = |u|^2 - 2(u, f)$ în spațiul energetic. După cum se vede din relația (7), în cazul nostru

$$F(u) = \int_a^b [p(x)u'^2 + q(x)u^2 - 2f(x)u]\mathrm{d}x;$$

devenind un element al spațiului energetic, funcția $u(x)$ trebuie să satisfacă condițiile (2).

Să clarificăm acum ce funcții formează domeniul $D(\tilde{A})$, unde $\tilde{A}$ este extensia Friedrichs a operatorului A. Observăm mai întîi că din formula (7) pentru norma energetică, rezultă formula pentru produsul energetic:

$$[u, v] = \int_a^b (pu'v' + quv);\ u, v \in H_A. \qquad (10)$$

Fie $u \in D(\tilde{A})$, atunci există o funcție $f \in L_2(a, b)$, care împreună cu u satisface identitatea (5.5a), identitate cu ajutorul căreia relația (10) capătă forma

$$\int_a^b pu'\eta' \mathrm{d}x = \int_a^b w\eta \, \mathrm{d}x; \; w = f - qu, \forall \eta \in H_A. \tag{11}$$

Evident, $w \in L_2(a, b)$. Notăm $v(x) = -\int_a^x w(t)\mathrm{d}t$; funcția $v(x)$ este absolut continuă pe segmentul $[a, b]$, $v'(x) = -w(x)$ și $v(a) = 0$. Mai mult,

$$\int_a^b w\eta \, \mathrm{d}x = -\int_a^b v'\eta \, \mathrm{d}x = -v\eta\Big|_a^b + \int_a^b v\eta' \mathrm{d}x = \int_a^b v\eta' \mathrm{d}x,$$

deoarece $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Introducînd aceasta în (11), obținem identitatea

$$\int_a^b (pu' - v)\eta' \mathrm{d}x = 0, \quad \forall \eta \in H_A.$$

Considerînd aici $\eta(x) = \sin \dfrac{n\pi(x-a)}{b-a}$, $n = 1, 2, \ldots$, observăm că funcția $pu' - v$ este ortogonală funcțiilor $\cos \dfrac{n\pi(x-a)}{b-a}$, $n = 1, 2, \ldots$, de unde rezultă că $pu' = v + c$, $c = \text{const}$. Funcția pu' este deci absolut continuă; ea are aproape peste tot derivata

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) = v'(x) = -w(x) = q(x)u(x) - f(x).$$

Ultima relație arată că dacă $u \in D(\tilde{A})$ și $f = \tilde{A}u$, atunci u satisface aproape peste tot ecuația diferențială (1). Integrînd prin părți se verifică ușor că

$$u'(x) = u'(a) + \int_a^x \left[\frac{v'(t)}{p(t)} - \frac{v(t)+c}{p^2(t)} p'(t)\right] \mathrm{d}t.$$

Funcția de sub integrală este de pătrat integrabil, deci $u'(x)$ este absolut continuă pe segmentul $[a, b]$ și aproape peste tot există derivata de ordinul al doilea $u''(x) \in L_2(a, b)$. Am ajuns la următoarea concluzie: dacă $u \in D(\tilde{A})$, atunci u' este absolut continuă pe $[a, b]$, $u'' \in L_2(a, b)$ și $u(a) = u(b) = 0$. Afirmația reciprocă este de asemenea adevărată: dacă $u(x)$ are proprietățile enumerate, atunci $u \in D(\tilde{A})$. Într-adevăr, în acest caz $u(x)$ este soluția generalizată a ecuației $Au = f$, în care

$$f(x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + q(x)u(x).$$

§ 9. PROBLEMA GENERALĂ A MINIMULUI UNEI FUNCȚIONALE PĂTRATICE

În paragraful 4 s-a formulat problema variațională pentru funcționala pătratică de forma $F(u) = (Au, u) - 2(u, f)$. Important este faptul că partea sa liniară $2(u, f)$ este mărginită în spațiul inițial; acest fapt a fost folosit în § 5 pentru demonstrarea existenței soluției generalizate a problemei variaționale.

Să examinăm problema minimului unei funcționale pătratice de forma generală

$$F(u) = (Au, u) - 2l(u), \tag{1}$$

unde A este un operator pozitiv definit care acționează în spațiul Hilbert H, iar l o funcțională liniară (nu neapărat mărginită) în același spațiu; coeficientul 2 a fost introdus din motive de comoditate. Introducînd spațiul energetic H_A al operatorului A, funcționala (1) se poate scrie sub forma

$$F(u) = |u|^2 - 2l(u). \tag{2}$$

Aceasta poate fi considerată ca o funcțională dată pe elemente (o parte sau toate) ale spațiului energetic. Prezintă interes cazul cînd $D(l)$, domeniul de definiție al funcționalei l, este dens în H_A; evident, $D(F) = D(l)$.

Se pot prezenta două posibilități.

1) Funcționala l nu este mărginită în spațiul energetic. În acest caz, funcționala F nu este mărginită inferior. Într-adevăr, există un șir $\{u_n\}$ cu proprietățile $|u|_n = 1$, $|l(u_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Modificînd în mod corespunzător semnele elementelor u_n, putem obține atunci că

$l(u_n) \to +\infty$ și deci $F(u_n) = 1 - 2l(u_n) \to -\infty$. Problema minimului funcționalei (2) este în acest caz lipsită de sens.

2) Funcționala l este mărginită în spațiul energetic. Atunci ea poate fi prelungită prin continuitate pe tot acest spațiu; prin aceasta funcționala (2) va fi și ea prelungită pe tot spațiul H_A. Conform teoremei lui Riesz există un element și numai unul $u_0 \in H_A$, care satisface identitatea $l(u) = [u, u_0]$; deci $F(u) = |u|^2 - 2[u, u_0]$. Aplicînd întocmai raționamentul de la § 5, constatăm că elementul u_0 realizează minimul funcționalei (2).

Dacă spațiul H_A este separabil, atunci se deduce o formulă, analoagă formulei (5.11), ce dă soluția problemei de minim al funcționalei (2). Fie ω_n, $n = 1, 2, \ldots$, un șir complet și ortonormat în spațiul energetic, atunci

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} [u_0, \omega_n]\omega_n.$$

În relația $l(u) = [u, u_0]$ de mai sus, fie $u = \omega_n$. Atunci $[u_0, \omega_n] = [\omega_n, u_0] = l(\omega_n)$ și prin urmare

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} l(\omega_n)\omega_n. \tag{3}$$

Fie A operatorul examinat în paragraful precedent (relațiile (3) și (2)); presupunem satisfăcute aceleași ipoteze cu privire la coeficienții $p(x)$ și $q(x)$, precum și la funcțiile ce alcătuiesc domeniul de definiție al operatorului A. Să formulăm problema minimului funcționalei pătratice

$$F(u) = |u|^2 - 2u(c) =$$

$$= \int_a^b \left[p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + q(x)u^2 \right] dx - 2u(c) \qquad a < c < b, \tag{4}$$

în spațiul energetic al operatorului A. În particular, aceasta înseamnă că funcția u trebuie să satisfacă condițiile la limită

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{5}$$

Se observă ușor că funcționala liniară $l(u) = u(c)$ este mărginită în metrica energetică. Într-adevăr, conform inegalității lui Buniakovski, avem

$$|u(c)|^2 = \left| \int_a^c u'(x)dx \right|^2 \leqslant (c-a)\int_a^c u'^2(x)\,dx \leqslant (c-a)\int_a^b u'^2(x)dx.$$

După formula (8.7)

$$|u|^2 = \int_a^b [p(x)u'^2(x) + q(x)u^2(x)]\,dx \geqslant p_0 \int_a^b u'^2(x)\,dx,$$

deci

$$|u(c)| \leqslant \sqrt{\frac{c-a}{p_0}}\,|u|. \tag{6}$$

Relația (6) arată că în cazul considerat funcționala l este mărginită deoarece $|l| \leqslant \sqrt{\frac{c-a}{p_0}}$.

Soluția problemei noastre variaționale există; cu ajutorul formulei (3) ea poate fi reprezentată prin seria

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(c)\omega_n(x), \tag{7}$$

unde $\{\omega_n\}$ este un sistem complet și ortogonal în H_A. Seria (7) converge în metrica lui H_A și prin urmare și în metrica lui $L_2(a, b)$.

Exemplu. Să examinăm cazul particular $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$, pentru $Au = -\frac{d^2u}{dx^2}$. În acest caz sistemul complet și ortonormat din spațiul energetic este alcătuit din funcțiile

$$\omega_n(x) = \sqrt{\frac{2(b-a)}{n\pi}} \sin \frac{n\pi(x-a)}{b-a}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Lăsăm demonstrația în seama cititorului.

Minimul funcționalei

$$\int_a^b u'^2\,dx - 2u(c), \quad u(a) = u(b) = 0, \tag{8}$$

este realizat de funcția

$$u_0(x) = \frac{2(b-a)}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi(c-a)}{b-a} \sin \frac{n\pi(x-a)}{b-a}.$$

Ultima serie se află ușor dacă, de exemplu, se rezolvă ecuația lui Euler pentru funcționala (8). Lăsăm și această demonstrație în seama cititorului.

§ 10. CAZUL UNUI OPERATOR STRICT POZITIV

Pentru un operator strict pozitiv se poate construi spaţiul energetic în acelaşi mod cum s-a procedat pentru un operator pozitiv definit. Totuşi, în acest caz apare o deosebire esenţială : se poate arăta că printre elementele ideale ale spaţiului energetic vor fi în mod obligatoriu unele care nu aparţin spaţiului Hilbert iniţial.

Să analizăm, spre exemplu, operatorul B studiat în § 2. Se arată uşor că spaţiul energetic H_B este alcătuit din funcţii cu proprietăţile :

1) pe segmentul $[0, a]$, unde a este un număr pozitiv arbitrar, funcţia $u \in H_B$ este absolut continuă;

2) $u(0) = 0$;

3) $u' \in L_2(0, \infty)$.

Astfel funcţia $u(x) = \ln(1 + x)$ aparţine spaţiului H_B, dar nu aparţine spaţiului iniţial $L^2(0, \infty)$.

Teorema 4.6.1 rămîne valabilă şi în cazul unui operator strict pozitiv.

Dacă A este un operator strict pozitiv, iar l este o funcţională liniară, atunci problema minimului funcţionalei

$$F(x) = (Au, u) - 2l(u), \quad u \in D(A),$$

se rezolvă absolut în acelaşi mod ca în paragraful precedent : cum $(Au, u) = |u|^2$, funcţionala F se scrie sub forma $F(u) = |u|^2 - 2l(u)$. Dacă l nu este mărginită în H_A, atunci problema noastră variaţională nu are sens ; dacă însă l este mărginită în H_A şi definită pe o mulţime densă în H_A, atunci există $u_0 \in H_A$ unic, astfel definit încît $l(u) = [u, u_0]$; acest element realizează minimul lui F în spaţiul energetic.

Capitolul 5

SPECTRUL PUNCTUAL AL UNUI OPERATOR POZITIV DEFINIT

§ 1. NOŢIUNEA DE SPECTRU PUNCTUAL AL UNUI OPERATOR

Fie A un operator liniar în spaţiul Hilbert H. Numărul λ şi elementul u se numesc *valoare proprie* (sau *număr propriu*) şi, respectiv, *vector propriu* (sau *element propriu*) al operatorului A, dacă $u \neq 0$ şi

$$Au - \lambda u = 0. \tag{1}$$

Se observă că dacă H este, de exemplu, spaţiul L_2, atunci condiţia $u \neq 0$ este echivalentă cu $u(x) \not\equiv 0$.

Se spune că u este vector propriu corespunzător valorii proprii λ. Din ecuaţia (1) se deduce relaţia ce permite aflarea valorii proprii, dacă se cunoaşte vectorul propriu corespunzător. Anume, înmulţind scalar ambii membri ai ecuaţiei (1) cu u, obţinem $(Au, u) - \lambda \|u\|^2 = 0$, de unde

$$\lambda = \frac{(Au, u)}{\|u\|^2}, \tag{2}$$

În spaţiul complex valorile proprii pot fi, evident, atît reale, cît şi complexe. În spaţiul real înmulţirea elementelor este definită numai pentru numerele reale ; din această cauză în spaţiul real ar urma să analizăm numai valori proprii reale. Dar exemple dintre cele mai simple arată că această restrîngere nu este indicată. Astfel, o matrice pătrată reală de ordinul m generează un operator liniar în spaţiul euclidian m-dimensional ; valorile proprii ale acestui operator coincid cu valorile proprii ale matricii corespunzătoare, care, după cum este bine cunoscut, pot fi şi complexe. De aceea lărgim întrucîtva definiţia valorilor proprii în aşa fel încît ele să poată fi şi complexe.

Plecînd de la un spaţiu Hilbert real H dat, să construim spaţiul Hilbert complex H^*. Pentru aceasta procedăm astfel : drept mulţime a elementelor noului spaţiu H^* considerăm mulţimea tuturor sumelor formale posibile de tipul $U = u' + iu''$, unde $i = \sqrt{-1}$, iar u', $u'' \in H$. Pe această nouă mulţime introducem, prin procedee obişnuite, adunarea şi înmulţirea cu numere complexe ; aceste două

operaţii sînt închise în H^*, ce devine astfel spaţiu liniar. Elementul nul în această mulţime este elementul $0 + i0$, unde 0 reprezintă elementul nul al spaţiului H; în locul lui $0 + i0$ vom scrie simplu 0; în general în locul lui $u + iu$ şi $0 + iv$ vom scrie u, respectiv iv. Introducem în H^* înmulţirea scalară conform următoarei reguli: dacă $U = u' + iu''$, $V = v' + iv''$, unde $u', u'', v', v'' \in H$, atunci

$$(U, V)^* = (u', v') + (u'', v'') + i[(u'', v') - (u', v'')]. \tag{3}$$

Se observă uşor că înmulţirea scalară astfel definită satisface toate axiomele înmulţirii într-un spaţiu complex, şi anume:

A) $(U, V)^* = \overline{(V, U)^*}$.

B) $(\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2, V)^* = \alpha_1 (U_1, V)^* + \alpha_2 (U_2, V)^*$.

C) $(U, U)^* \geqslant 0$ şi $(U, U^*) = 0$, dacă şi numai dacă $U = 0$.

Prelungim operatorul A la elemente de tipul $U = u' + iu''$, unde $u', u'' \in D(A) \subset H$, după formula

$$AU = Au' + iAu''. \tag{4}$$

După această nouă definiţie se poate arăta că operatorul A, care iniţial a fost definit în spaţiul real H, are în H^* valorile proprii complexe $\lambda = \lambda' + i\lambda''$ şi vectorii proprii corespunzători $u' + iu''$; egalitatea

$$A(u' + iu'') = (\lambda' + i\lambda'')(u' + iu'')$$

este echivalentă cu sistemul de egalităţi

$$Au' = \lambda' u' - \lambda'' u'', \quad Au'' = \lambda'' u' + \lambda' u''. \tag{5}$$

Este posibil ca unei aceleiaşi valori proprii să-i corespundă mai mulţi vectori proprii; dacă $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sînt astfel de vectori, atunci orice combinaţie liniară $\sum_{k=1}^{n} c_k u_k \neq 0$ este de asemenea un vector propriu corespunzător aceleiaşi valori proprii. Aceasta permite să se examineze numai vectorii proprii, liniar independenţi, corespunzători unei valori proprii date, fiecare vector propriu putînd fi presupus normat.

Numărul vectorilor proprii, liniar independenţi, corespunzători unei valori proprii se numeşte *multiplicitatea* (sau *rangul*) valorii proprii respective. Într-un spaţiu separabil multiplicitatea oricărei valori proprii este finită sau numărabilă.

Mulţimea valorilor proprii ale unui operator se numeşte *spectrul* operatorului.

§ 2. VALORI PROPRII ŞI VECTORI PROPRII PENTRU UN OPERATOR SIMETRIC

Teorema 5.2.1. *Valorile proprii ale unui operator simetric sînt reale.*

Înmulţind scalar prima din egalităţile (1.5) cu u'', iar pe a doua cu u' şi scăzînd pe prima din a doua, obţinem

$$(Au'', u') - (Au', u'') = \lambda''(\|u'\|^2 + \|u''\|^2); \tag{1}$$

deoarece operatorul A este simetric, membrul întîi este egal cu zero. Vectorul propriu $u' + iu'' \neq 0$. Atunci, sau $u' \neq 0$ sau $u'' \neq 0$ şi paranteza din (1) este pozitivă. De aici rezultă că $\lambda'' = 0$, deci valorile proprii sînt reale. Sistemul (1.5) capătă forma

$$Au' = \lambda' u', \quad Au'' = \lambda' u''$$

şi fiecare din elementele nenule u', u'' este vector propriu corespunzător valorii proprii λ'.

Teorema 5.2.2. *Vectorii proprii ai unui operator simetric corespunzători la valori proprii distincte sînt ortogonali.*

Fie λ_1 şi λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, valori proprii ale operatorului simetric A. Să presupunem că u_1, u_2 sînt vectori proprii corespunzători lui λ_1, respectiv λ_2. Avem

$$Au_1 = \lambda_1 u_1, \; Au_2 = \lambda_2 u_2.$$

Înmulţind scalar prima identitate cu u_2 iar pe a doua cu u_1 şi scăzînd pe a doua din prima, obţinem

$$(Au_1, u_2) - (Au_2, u_1) = (\lambda_1 - \lambda_2)(u_1, u_2).$$

Deoarece A este un operator simetric, membrul din stînga este egal cu zero şi prin urmare $(\lambda_1 - \lambda_2)(u_1, u_2) = 0$. Dar $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, deci $(u_1, u_2) = 0$.

Corolarul 5.2.1. *Într-un spaţiu Hilbert separabil mulţimea valorilor proprii ale unui operator simetric este cel mult numărabilă.*

Dacă unei valori proprii îi corespund mai mulţi vectori proprii liniar independenţi, atunci vectorilor proprii corespunzători li se

poate aplica procedeul de ortogonalizare. Vectorii proprii se pot, de asemenea, și norma. Se ajunge astfel la următorul rezultat important: *se poate considera întotdeauna că vectorii proprii ai unui operator simetric formează un sistem ortonormat.*

§ 3. SPECTRUL PUNCTUAL GENERALIZAT AL UNUI OPERATOR POZITIV DEFINIT

Orice operator pozitiv definit este simetric și prin urmare toate afirmațiile de la paragraful precedent sînt valabile și pentru operatorii pozitiv definiți. Dar pentru acești operatori este indicat să se introducă și noțiunea de *spectru punctual generalizat*, mai exact de *valoare proprie generalizată* și *vector propriu generalizat* corespunzător acestei valori proprii. Aceasta se va face prin analogie cu noțiunea de soluție generalizată.

Fie A un operator pozitiv definit, λ o valoare proprie a lui A și u vectorul propriu corespunzător valorii proprii λ. Aceasta înseamnă că $u \neq 0$, $u \in D(A)$ și

$$Au = \lambda u. \tag{1}$$

Să considerăm un element arbitrar $\eta \in H_A$. Înmulțind scalar cu η ambii membrii ai egalității (1), obținem $(Au, \eta) = \lambda(u, \eta)$, unde $u \in D(A)$, $\eta \in H_A$. Atunci, conform formulei (3.6) cap. 4, avem $(Au, \eta) = [u, \eta]_A$. Am găsit astfel că valoarea proprie λ și vectorul propriu corespunzător u satisfac identitatea

$$[u, \eta]_A = \lambda(u, \eta), \quad \forall \eta \in H_A. \tag{2}$$

Reciproc, fie $u \in D(A)$, $u \neq 0$, și λ astfel încît să avem identitatea (2). Conform formulei (3.6) cap. 4, avem $[u, \eta]_A = (Au, \eta)$ și deci din identitatea (2), obținem $(Au - \lambda u, \eta) = 0$, $\forall\ \eta \in H_A$. Astfel, elementul $Au - \lambda u$ al spațiului H este ortogonal pe orice element $\eta \in H_A$; dar mulțimea elementelor spațiului H_A este densă în spațiul inițial H, iar elementul ortogonal pe o mulțime densă este numai elementul nul. De aici rezultă că $Au - \lambda u = 0$ și prin urmare u este un vector propriu și λ o valoare proprie a operatorului A.

Elementul $u \in H_A$, $u \neq 0$, și numărul λ se vor numi *vector propriu generalizat* și, respectiv, *valoare proprie generalizată pentru operatorul* A, atunci cînd satisfac identitatea (2).

Teorema 5.3.1. *Valorile proprii generalizate și vectorii proprii generalizați ai unui operator pozitiv definit coincid cu valorile proprii, respectiv vectorii proprii ai extensiei Friedrichs a acestui operator.*

Dacă λ și u sînt valoare proprie generalizată, respectiv vector propriu generalizat pentru operatorul A, atunci acestea satisfac

identitatea (2). Fie $\lambda u = f$; astfel identitatea (2) capătă forma $[u, \eta]_A = (f, \eta)$, $\forall \eta \in H_A$, care coincide cu identitatea (5.5a) cap. 4. De aici rezultă că elementul u realizează minimul funcționalei

$$F(v) = |v|_A^2 - 2(f, v), \quad \forall v \in H_A.$$

Dar atunci $u \in D(\tilde{A})$, unde $\tilde{A}$ este extensia Friedrichs a operatorului A și $\tilde{A}u = f = \lambda u$, ceea ce trebuia demonstrat.

Reciproc, fie λ și u valoare proprie, respectiv vector propriu pentru operatorul $\tilde{A}$, adică $\tilde{A}u = \lambda u$. Înmulțind scalar această identitate cu un element arbitrar $\eta \in H_A$, obținem

$$[u, \eta]_{\tilde{A}} = \lambda(u, \eta). \tag{3}$$

În § 7 cap. 4 s-a arătat că spațiile H_A și $H_{\tilde{A}}$ sînt alcătuite din aceleași elemente și deci produsele lor energetice coincid. În acest caz identitățile (3) și (2) sînt echivalente și, prin urmare, λ și u sînt valoare proprie generalizată, respectiv vector propriu generalizat pentru operatorul A.

Operatorul A este simetric, deci pentru valorile proprii generalizate și vectorii proprii generalizați sînt adevărate teoremele 5.2.1 și 5.2.2. Menționăm încă două proprietăți ale valorilor proprii generalizate și vectorilor proprii generalizați ai unui operator pozitiv definit; în cele ce urmează, pentru prescurtare, vom omite cuvîntul „generalizate".

Teorema 5.3.2. *Dacă sistemul de vectori proprii $\{u_n\}$ ai unui operator pozitiv definit A este ortonormat în spațiul inițial H, atunci el este ortogonal și în spațiul energetic H_A corespunzător și avem*

$$|u_n|_A = \sqrt{\lambda_n}, \tag{4}$$

unde λ_n este valoarea proprie corespunzătoare vectorului propriu u_n.

Dacă în identitatea (2) punem $u = u_k$, $\eta = u_n$, $\lambda = \lambda_k$, atunci

$$[u_k, u_n]_A = \lambda_k(u_k, u_n) = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ \lambda_n, & k = n. \end{cases}$$

Teorema 5.3.3. *Orice valoare proprie a unui operator pozitiv definit nu este mai mică decît marginea inferioară a acestui operator.*

Fie γ_0^2 marginea inferioară a operatorului A. Conform teoremei 4.7.1, marginea inferioară a operatorului $\tilde{A}$, obținut prin extensia Friedrichs a operatorului A, este de asemenea egală cu γ_0^2. Dacă λ

și u sînt valoarea proprie, respectiv vectorul propriu corespunzător pentru operatorul A, atunci conform formulei (1.2) și teoremei 5.3.1, avem

$$\lambda = \frac{(Au, u)}{\|u\|^2} \geqslant \gamma_0^2. \tag{5}$$

Folosind relația (1.2), remarcăm că seria (5) poate fi pusă sub forma

$$\lambda = \frac{|u|_A^2}{\|u\|^2}. \tag{6}$$

Membrul drept rămîne nemodificat dacă se înmulțește u cu o constantă diferită de zero. Alegem această constantă astfel încît vectorul propriu u să fie normat în metrica spațiului inițial, adică $\|u\| = 1$. Atunci pentru valoarea proprie corespunzătoare se obține formula relativ mai comodă:

$$\lambda = |u|_A^2, \quad \|u\|^2 = 1. \tag{7}$$

§ 4. FORMULAREA VARIAȚIONALĂ A PROBLEMEI SPECTRULUI PUNCTUAL

Începem cu următoarea observație: dacă γ_0^2 este marginea inferioară a operatorului pozitiv definit A, atunci

$$\inf_{\substack{u \in H_A \\ u \neq 0}} \frac{|u|_A^2}{\|u\|^2} = \gamma_0^2. \tag{1}$$

Să demonstrăm acest lucru. Întrucît $D(A) \subset H_A$, atunci

$$\inf_{\substack{u \in H_A \\ u \neq 0}} \frac{|u|_A^2}{\|u\|^2} \leqslant \inf_{\substack{u \in D(A) \\ u \neq 0}} \frac{|u|_A^2}{\|u\|^2} = \inf_{\substack{u \in D(A) \\ u \neq 0}} \frac{(Au, u)}{\|u\|^2} = \gamma_0^2.$$

Pe de altă parte, $D(A)$ este dens în H_A. Dacă $u \in H_A$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $v \in D(A)$ astfel încît $|v - u|_A < \varepsilon$ și $\|v - u\| < \varepsilon$. Dar atunci $||v|_A - |u|_A| < \varepsilon$, $|\|v\| - \|u\|| < \varepsilon$. Dacă am arăta că pentru un anumit element $u \in H_A$ avem

$$\frac{|u|_A^2}{\|u\|^2} < \gamma_0^2,$$

atunci pentru ε suficient de mic am avea de asemenea

$$\frac{|v|_A^2}{\|v\|^2} = \frac{(Av, v)}{\|v\|^2} < \gamma_0^2,$$

ceea ce contrazice definiția marginei inferioare.

Teorema 5.4.1. *Dacă există un element u_1 pentru care relația* (1) *își atinge marginea inferioară, atunci γ_0^2 este cea mai mică valoare proprie generalizată a lui A, iar u_1 vectorul propriu corespunzător.*

Prin înmulțirea elementului u cu o constantă, relația

$$\Psi(u) = \frac{|u|_A^2}{\|u\|^2} \tag{2}$$

nu se modifică, de aceea elementul u poate fi considerat normat; atunci

$$\Psi(u) = |u|_A^2, \quad \|u\| = 1. \tag{3}$$

Să notăm $\gamma_0^2 = \lambda_1$. Faptul că marginea inferioară se atinge pentrn elementul u_1 înseamnă că

$$u_1 \in H_A, \quad \|u_1\|^2 = 1, \quad |u_1|^2 = \lambda_1.$$

Pentru $\eta \in H_A$ oarecare și α real arbitrar considerăm relația

$$\frac{|u_1 + \alpha\eta|^2}{\|u_1 + \alpha\eta\|^2}. \tag{4}$$

Dacă fixăm pe η, atunci relația (4) este o funcție de α care își atinge minimul pentru $\alpha = 0$. Dar în acest caz derivata în raport cu α trebuie să se anuleze pentru $\alpha = 0$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \frac{[u_1, u_1] + 2\alpha[u_1, \eta] + \alpha^2[\eta, \eta]}{(u_1, u_1) + 2\alpha(u_1, \eta) + \alpha^2(\eta, \eta)} \bigg|_{\alpha=0} = 0.$$

Derivînd, obținem

$$2(u_1, u_1)[u_1, \eta] - 2(u_1, \eta)[u_1, u_1] = 0. \tag{5}$$

Remarcăm că

$$(u_1, u_1) = \|u_1\|^2 = 1, \quad [u_1, u_1] = |u_1|^2 = \lambda_1.$$

Substituind aceasta în relația (5), obținem $[u_1, \eta] - \lambda_1(u_1, \eta) = 0$, care arată că λ_1 și u_1 sînt valoare proprie, respectiv vector propriu pentru operatorul A. Faptul că λ_1 este cea mai mică valoare proprie rezultă din teorema 5.3.3.

Să presupunem că s-a găsit cea mai mică valoare proprie λ_1 și vectorul propriu corespunzător u_1 pentru operatorul A. Cum se poate găsi valoarea proprie λ_2 și vectorul propriu u_2 corespunzător? Evident că λ_2 trebuie căutat printre valorile date de relația (2) pentru funcțiile ortogonale pe u_1 atît în metrica spațiului H, cît și a lui H_A.

Fie $H^{(1)}$ subspațiul lui H, ortogonal la elementul u_1, și $H_A^{(1)}$ subspațiul lui H_A, ortogonal la u_1 în noua metrică: $[u, u_1], = 0$, $u \in H_A^{(1)}$. Să arătăm că $H_A^{(1)} = H_A \cap H^{(1)}$. Fie $u \in H_A^{(1)}$. Scriem identitatea care definește prima valoare proprie $[u_1, \eta] = \lambda_1(u_1, \eta)$. Fie $\eta = u$, adică $(u_1, u) = \dfrac{1}{\lambda_1}[u_1, u] = 0$. Aceasta înseamnă că $u \in H^{(1)}$ și prin urmare $u \in H_A \cap H^{(1)}$.

Reciproc, fie $u \in H_A \cap H^{(1)}$. Atunci $u \in H_A$ și $(u_1, u) = 0$. În mod analog se ajunge la egalitatea $[u_1, u] = \lambda_1(u_1, u) = 0$, de unde rezultă că $u \in H_A^{(1)}$.

Dacă sînt cunoscuți vectorii proprii ortogonali $u_1, u_2, \ldots, u_n$, atunci putem introduce subspațiile $H^{(n)}$ și $H_A^{(n)}$, ortogonale corespunzător (fiecare în metrica sa) la $u_1, u_2, \ldots, u_n$, ale lui H, respectiv H_A. În mod analog se arată că $H_A^{(n)} = H_A \cap H^{(n)}$.

Teorema 5.4.2. *Să presupunem că pentru un operator A pozitiv definit sînt cunoscute primele n valori proprii $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ și vectorii proprii corespunzători $u_1, u_2, \ldots, u_n$ presupuși ortonormați. Fie λ_{n+1} marginea inferioară a lui $|u|^2$ pentru $u \in H_A^{(n)}$ normați. Dacă aceasta este atinsă, atunci λ_{n+1} este prima valoare proprie a operatorului A imediat următoare după λ_n, iar elementul ce realizează marginea inferioară este vectorul propriu corespunzător valorii proprii λ_{n+1}.*

Aplicînd același raționament ca în cazul demonstrației teoremei precedente, obținem identitatea

$$[u_{n+1}, \zeta] - \lambda_{n+1}(u_{n+1}, \zeta) = 0, \quad \forall \zeta \in H_A^{(n)}. \tag{6}$$

Fie η un element arbitrar din H_A și fie

$$\zeta = \eta - \sum_{k=1}^{n} (\eta, u_k)\, u_k. \tag{7}$$

Atunci $\zeta \in H^{(n)}$ și prin urmare $\zeta \in H_A^{(n)}$. Pentru elementul ζ astfel construit identitatea (6) este adevărată. Substituind expresia (7) în această identitate și ținînd seama că $[u_{n+1}, u_k] = (u_{n+1}, u_k) = 0$, găsim

$$[u_{n+1}, \eta] - \lambda_{n+1}(u_{n+1}, \eta) = 0, \quad \forall \eta \in H_A.$$

§ 5. CEA MAI MICĂ VALOARE PROPRIE

Teorema 5.4.1 are caracter condițional, adică se afirmă că $\lambda_1 = \gamma_0^2$, marginea inferioară a funcționalei

$$\Psi(u) = |u|_A^2, \quad \|u\| = 1, \tag{1}$$

este cea mai mică valoare proprie a operatorului A, dacă respectiva margine inferioară se atinge. De aceea mai jos vom stabili o anumită condiție suficientă.

Teorema 5.5.1. *Fie $\{w_n\}$ un șir minimizant al funcționalei (1). Dacă din acest șir se poate extrage un subșir convergent în metrica spațiului inițial H, atunci $\lambda_1 = \inf \Psi(u)$ este cea mai mică valoare proprie a operatorului dat, iar limita subșirului extras este vectorul propriu corespunzător.*

Conform condițiilor teoremei, din șirul $\{w_n\}$ se poate extrage un subșir convergent $\{w_{n_k}\}$. Pentru prescurtare, notăm $w_{n_k} = \varphi_k$. Se observă ușor că subșirul $\{\varphi_k\}$ este de asemenea șir minimizant. De aceea vom considera șirul minimizant $\{\varphi_k\}$ ce converge în H. Elementele φ_k satisfac proprietățile: 1) $\varphi_k \in H_A$; 2) $\|\varphi_k\| = 1$; 3) $\lim |\varphi_k|_A^2 = \lambda_1$; 4) există $u_1 \in H$, astfel încît $\|\varphi_k - u_1\| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$.

Se observă că

$$\|\varphi_k - \varphi_m\| \xrightarrow[k,m \to \infty]{} 0. \tag{2}$$

Trebuie să arătăm că $u_1 \in H_A$ și $|u_1|_A^2 = \lambda_1$.

Fie $\eta_k \in H_A$ și $t \in R$ arbitrare. Elementul $\varphi_k + t\eta_k$ aparține lui H_A și, în general, este diferit de zero. Introducîndu-l în relația (4.2), obținem

$$\frac{|\varphi_k + t\eta_k|_A^2}{\|\varphi_k + t\eta_k\|^2} \geqslant \inf \frac{|u|_A^2}{\|u\|^2} = \lambda_1,$$

ceea ce conduce la

$$[\varphi_k + t\eta_k, \varphi_k + t\eta_k]_A - \lambda_1(\varphi_k + t\eta_k, \varphi_k + t\eta_k) \geqslant 0,$$

de unde

$$t^2\{|\eta_k|_A^2 - \lambda_1\|\eta_k\|^2\} + 2t\{[\varphi_k, \eta_k]_A - \lambda_1(\varphi_k, \eta_k)\} + |\varphi_k|_A^2 - \lambda_1\|\varphi_k\|^2 \geqslant 0.$$

Trinomul din membrul stîng este nenegativ pentru $\forall t \in R$, ceea ce implică condiția ca discriminantul să fie negativ, adică

$$|[\varphi_k, \eta_k]_A - \lambda_1(\varphi_k, \eta_k)| \leqslant \sqrt{|\eta_k|_A^2 - \lambda_1\|\eta_k\|^2}\,\sqrt{|\varphi_k|_A^2 - \lambda_1},$$

unde am utilizat faptul că $\|\varphi_k\| = 1$.

Prin majorare în primul radical întărim inegalitatea, obținută sub forma

$$|[\varphi_k, \eta_k]_A - \lambda_1(\varphi_k, \eta_k)| \leqslant |\eta_k|_A \sqrt{|\varphi_k|_A^2 - \lambda_1}. \tag{3}$$

Elementele $\eta_k \in H_A$ sînt arbitrare. Vom presupune acum că pentru orice k, există C astfel încît

$$|\eta_k|_A \leqslant C, \quad C = \text{const}. \tag{4}$$

Atunci din inegalitatea (3) rezultă

$$|[\varphi_k, \eta_k]_A - \lambda_1(\varphi_k, \eta_k)| \leqslant C\sqrt{|\varphi_k|_A^2 - \lambda_1}. \tag{5}$$

Deoarece în inegalitatea (5) membrul drept converge la zero, rezultă că și membrul stîng converge la zero, uniform în raport cu η_k care satisfac inegalitatea (4). Avînd în vedere aceasta alegem

$$\eta_k = \varphi_k - \varphi_m,$$

cu m oarecare. O astfel de alegere a lui η_k este posibilă din următoarele considerente : șirul numeric $|\varphi_n|_A$ este convergent și de aceea mărginit : există deci o constantă C, astfel încît $|\varphi_n|_A \leqslant C$, adică $|\eta_k|_A \leqslant 2C$.

Astfel, din inegalitatea (5) rezultă că

$$\lim_{k\to\infty} \{[\varphi_k, \varphi_k - \varphi_m]_A - \lambda_1(\varphi_k, \varphi_k - \varphi_m)\} = 0,$$

unde convergența către zero este uniformă în raport cu m, ceea ce conduce pentru $m \to \infty$ la

$$\lim_{k,m\to\infty} \{[\varphi_k, \varphi_k - \varphi_m]_A - \lambda_1(\varphi_k, \varphi_k - \varphi_m)\} = 0. \tag{6}$$

Permutînd k și m (de aceeași valoare), obținem

$$\lim_{k,m\to\infty} \{[\varphi_m, \varphi_m - \varphi_k]_A - \lambda_1(\varphi_m, \varphi_m - \varphi_k)\} = 0. \tag{7}$$

Adunînd egalitățile (6) și (7), deducem

$$\lim_{k,m\to\infty} \{|\varphi_k - \varphi_m|_A^2 - \lambda_1 \|\varphi_k - \varphi_m\|^2\} = 0, \tag{8}$$

adică, în baza relației (2), avem

$$|\varphi_k - \varphi_m|_A^2 \xrightarrow[k,m\to\infty]{} 0. \tag{9}$$

Așadar, șirul minimizant este fundamental în H_A. Dar acest spațiu este complet, prin urmare șirul $\{\varphi_k\}$ converge în H_A la același element la care converge în H. În acest fel deducem că $u_1 \in H_A$ și

$$|\varphi_k - u_1\|_A \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Dar atunci

$$|u_1|_A^2 = \lim_{k\to\infty} |\varphi_k|_A^2 = \lambda_1;$$

mai mult,

$$\|u_1\| = \lim_{k\to\infty} \|\varphi_k\| = 1.$$

Deci există $u_1 \in H_A$ astfel încît $\|u_1\| = 1$ și $|u_1|_A^2 = \lambda_1$, ceea ce înseamnă că marginea inferioară a funcționalei (1) este atinsă. Conform teoremei 5.4.1 această margine inferioară λ_1 și u_1 corespunzător ei reprezintă cea mai mică valoare proprie, respectiv vectorul propriu corespunzător pentru operatorul A.

§ 6. DESPRE CARACTERUL DISCRET AL SPECTRULUI

Înainte de a formula și demonstra teorema de bază facem următoarea observație.

Să presupunem construite primele n valori proprii $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ ale operatorului A și vectorii proprii corespunzători $u_1, u_2, \ldots, u_n$, presupuși ortonormați în metrica spațiului H. Să examinăm funcționala[1]

$$\Psi_n(u) = |u|_A^2, \quad u \in H_A^{(n)}, \quad \|u\| = 1. \tag{1}$$

Ea diferă de funcționala (5.1) prin faptul că este definită pe o mulțime mai restrînsă. Notăm

$$\lambda_{n+1} = \inf \Psi_n(u) = \inf |u|_A^2,$$

unde $u \in H_A^{(n)}$, $\|u\| = 1$. Să construim pentru funcționala (1) un șir minimizant. Dacă din el se poate extrage un subșir convergent în metrica spațiului H, atunci λ_{n+1} este a $(n+1)$-a valoare proprie,

[1] Definiția subspațiului $H_A^{(n)}$ a fost dată în § 4.

iar limita subșirului extras este al $(n+1)$-lea vector propriu al operatorului A.

Demonstrația acestei afirmații este analoagă cu aceea de la teorema 5.5.1.

Se spune că operatorul simetric A are *spectru discret* dacă:

1) operatorul A are un șir infinit de valori proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ al cărui singur punct limită este la infinit;

2) șirul $\{u_n\}$ al vectorilor proprii este complet în spațiul H.

Existența unui singur punct limită la infinit înseamnă că valorile proprii pot fi ordonate în ordine crescîndă după valorile lor absolute

$$|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_n| \leqslant \ldots$$

și de aceea $|\lambda_n| \to \infty$. Dacă un operator pozitiv definit are spectru discret, atunci valorile sale proprii pot fi ordonate, pur și simplu, într-un șir crescător,

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots, \quad \lambda_n \to \infty.$$

Teorema 5.6.1. *Fie un operator pozitiv definit astfel încît orice mulțime mărginită în metrica energetică este compactă în metrica spațiului inițial. Atunci spectrul generalizat al acestui operator este discret.*

Condițiile acestei teoreme se mai pot formula și în felul următor: *spațiul energetic se scufundă compact în spațiul inițial.*

Demonstrație. 1) Examinăm numărul

$$\lambda_1 = \inf |u|^2, \quad u \in H_A, \quad \|u\| = 1.$$

Construim șirul minimizant $\{\omega_k\}$. Aceasta înseamnă că

$$\text{a)}\ \omega_k \in H_A;\ \text{b)}\ \|\omega_k\| = 1;\ \text{c)}\ \lim_{k\to\infty} |\omega_k|^2 = \lambda_1.$$

Șirul numeric avînd limită este mărginit, deci există o constantă C astfel încît $|\omega_k| \leqslant C$. Prin urmare șirul minimizant este mărginit în metrica lui H_A. Conform condițiilor teoremei acest șir este compact în metrica inițială și atunci, în baza teoremei 5.5.1, λ_1 este cea mai mică valoare proprie a operatorului dat; desemnăm prin u_1 vectorul propriu corespunzător.

2) Să presupunem că am construit deja primele n valori proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ și vectorii proprii corespunzători lor $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Notăm $\lambda_{n+1} = \inf |u|^2$, $u \in H_A^{(n)}$, $\|u\| = 1$ și construim șirul minimizant $\{\omega_k^{(n)}\}(k=1, 2, \ldots)$. Atunci $|\omega_k^{(n)}|^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda_{n+1}$, prin urmare, există o constantă C astfel încît $|\omega_k^{(n)}| \leqslant C$. Șirul $\{\omega_k^{(n)}\}$, $k = 1, 2, \ldots$, este

compact în metrica inițială; atunci, conform observației făcute la începutul acestui paragraf, λ_{n+1} este a $(n+1)$-a valoare proprie a operatorului A și există u_{n+1}, vector propriu corespunzător acestei valori proprii.

Procesul se întrerupe dacă condițiile $\|u\| = 1$ și $u \in H_A^{(n)}$ devin contradictorii. Acest lucru poate avea loc cînd spațiul $H_A^{(n)}$ este alcătuit doar din elementul nul, ceea ce se poate întîmpla cînd H_A este finit-dimensional. Dar H_A este dens în H și deci va fi finit-dimensional, atunci și numai atunci cînd H însăși este finit-dimensional. Excludem acest caz, adică vom presupune că spațiul H, deci și H_A, este infinit-dimensional. În acest caz procesul nu se întrerupe, obținîndu-se un șir infinit de valori proprii

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots \tag{2}$$

și corespunzător lor șirul vectorilor proprii

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots, \tag{3}$$

ortogonali în H și în H_A și normați în H.

3) Arătăm că valorile proprii converg la infinit. Presupunem prin absurd că șirul $\{\lambda_n\}$ este mărginit, adică $\lambda_n \leqslant K = \text{const}$. Atunci $|u_n| = \sqrt{\lambda_n} \leqslant \sqrt{K}$; vectorii proprii sînt deci mărginiți în H_A și de aceea șirul lor este compact în metrica lui H. Obținem astfel că șirul ce era normat în H este și compact în H, ceea ce, după cum se știe, este imposibil.

4) Arătăm acum că sistemul vectorilor proprii este complet în H_A. Să presupunem prin absurd contrariul. Să analizăm subspațiul $H_A^{(\infty)}$ al lui H_A, ortogonal pe toți vectorii proprii $u_n = 1, 2, \ldots$ Acest spațiu conține elemente nenule ce pot fi presupuse prin urmare normate. Notăm $\lambda_\infty = \inf |u|^2$, $u \in H_A^{(\infty)}$, $\|u\| = 1$. Repetînd întocmai raționamentele de mai sus, găsim că λ_∞ este valoare proprie pentru operatorul A. Comparăm λ_∞ cu λ_n. Acestea sînt fiecare margini inferioare ale aceleiași expresii $|u|_A^2/\|u\|^2$ pe mulțimile $H_A^{(\infty)}$, respectiv $H_A^{(n)}$. Prima mulțime este mai restrînsă decît a doua și deci marginea ei inferioară este mai mare (cel mult egală) cu a doua. Dar atunci $\lambda_\infty \geqslant \lambda_n$, ceea ce este absurd, deoarece mulțimea λ_n nu este mărginită. Din contradicția obținută rezultă că șirul $\{u_n\}$ este complet în H_A.

5) Arătăm că șirul vectorilor proprii este complet în H. Fie $u \in H_A$. Sistemul (3) este complet în H_A: pentru orice $\varepsilon > 0$ există N natural și $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N \in R$ astfel încît

$$\left| u - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k \right|_A < \varepsilon.$$

Dar atunci din inegalitatea (3.3) cap. 4 obținem

$$\left\| u - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k \right\| < \frac{\varepsilon}{\gamma}.$$

În acest mod, fiecare element al spațiului energetic se poate aproxima prin combinații liniare de elemente (3) în metrica inițială.

Fie acum $u \in H$. Spațiul H_A este dens în H, adică pentru orice $\varepsilon > 0$, există $u' \in H_A$ astfel încît $\|u - u'\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Alegem pe N și coeficienții $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ astfel încît să aibă loc inegalitatea

$$\left\| u' - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Inegalitatea triunghiului conduce la

$$\left\| u - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k \right\| < \varepsilon$$

și teorema este demonstrată.

§ 7. DEZVOLTAREA DUPĂ SPECTRU PUNCTUAL A UNUI OPERATOR POZITIV DEFINIT

Fie în spațiul Hilbert H un operator pozitiv definit A care satisface condițiile teoremei 5.6.1, adică spectrul său este discret. Fie λ_n și u_n valorile proprii (generalizate), respectiv vectorii proprii (generalizați) ai operatorului A. Vom presupune că sistemul $\{u_n\}$ este ortonormat în H, adică sistemul $\{u_n/\sqrt{\lambda_n}\}$ este ortonormat în spațiul energetic H_A. Sistemul $\{u_n\}$ este complet în H, de aceea pentru orice element $u \in H$ are sens dezvoltarea în serie ortogonală, convergentă în metrica spațiului H, dată de

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, u_n)\, u_n. \tag{1}$$

Dacă $u \in H_A$, atunci seria (1) converge și în metrica energetică la același element u. Într-adevăr, conform celor demonstrate în § 6,

sistemul $\{u_n/\sqrt{\lambda_n}\}$, ortonormat în H_A, este complet în acest spațiu și are sens dezvoltarea în serie convergentă în metrica lui H_A, adică

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left[u, \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}} \right] \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[u, u_n]}{\lambda_n} u_n. \tag{2}$$

Dar seriile (1) și (2) sînt identice deoarece conform formulei (3.2) avem $[u, u_n] = \lambda_n (u, u_n)$ și afirmația este demonstrată.

Fie acum $u \in D(A)$, deci $Au \in H$ și prin urmare

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} (Au, u_n) u_n.$$

Din relațiile (3.6) cap. 4 și (3.2) avem $(Au, u_n) = [u, u_n] = \lambda_n (u, u_n)$, de unde se obține expresia operatorului pozitiv definit cu spectrul discret prin intermediul valorilor și vectorilor săi proprii sub forma

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (u, u_n) u_n. \tag{3}$$

§ 8. PROBLEMA STURM-LIOUVILLE

Vom analiza operatorul

$$Au = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \right] + q(x) u \tag{1}$$

pe mulțimea $D(A)$ a funcțiilor u, continue pe segmentul $[a, b]$, care au derivata de ordinul întîi absolut continuă și derivata de ordinul al doilea de pătrat integrabil și care satisface condițiile la limită

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{2}$$

Funcțiile $p(x)$ și $q(x)$ verifică aceleași condiții ca în § 8, cap. 4. Amintim de asemenea că operatorul A analizat aici a fost notat cu $\tilde{A}$.

Să arătăm că operatorul A are în $L_2(a, b)$ spectru discret. Se știe că acest operator este pozitiv definit. În § 8, cap. 4 s-a arătat că normele în H_A și $\mathring{W}_2^{(1)}(a, b)$ sînt echivalente și că aceste spații sînt alcătuite din aceleași funcții. În acest caz, în virtutea teoremei 3.3.1, H_A se scufundă compact în $L_2(a, b)$; după teorema 5.6.1, spectrul operatorului va fi discret, deci operatorul are un șir infinit de valori proprii de forma

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots, \quad \lambda_n \to \infty \tag{3}$$

și corespunzător lor funcțiile proprii

$$u_1(x),\ u_2(x),\ldots,u_n(x),\ldots, \tag{4}$$

despre care putem presupune că $\|u\| = 1$ și $(u_k, u_m) = 0$ $(k \neq m)$; sistemul (4) este complet în fiecare din spațiile $L_2(a, b)$ și H_A. În metrica energetică funcțiile proprii sînt, ca și mai înainte, ortogonale: $[u_k, u_m] = 0$ $(k \neq m)$, dar nu sînt normate deoarece $|u_n| = \sqrt{\lambda_n}$.

Amintim că aflarea spectrului operatorului A, analizat aici, este echivalentă cu următoarea problemă numită problema Sturm-Liouville: să se găsească λ pentru care ecuația

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) - q(x)u + \lambda u = 0 \tag{5}$$

are soluții nebanale, care satisfac condițiile la limită (2).

Sistemul de funcții proprii $\{u_n(x)\}$ al problemei Sturm-Liouville este complet în $L_2(a, b)$ și orice funcție $u \in L_2(a, b)$ admite dezvoltarea

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x),\quad c_n = (u, u_n), \tag{6}$$

convergentă în metrica lui $L_2(a, b)$. Să arătăm că seria (6) converge uniform pe segmentul $[a, b]$ dacă $u \in H_A$, adică dacă $u(x)$ este absolut continuă pe segmentul considerat, $u(a) = u(b) = 0$ și $u' \in L_2(a, b)$. Într-adevăr, după cum s-a demonstrat în § 7, seria (6) converge în metrica lui H_A, atunci, pentru $\varepsilon > 0$ dat, există $N_0(\varepsilon)$ natural astfel încît

$$\left|\sum_{n=N+1}^{N+r} c_n u_n\right| < \varepsilon,\ N \geqslant N_0(\varepsilon). \tag{7}$$

Conform inegalității (8.9) cap. 4, avem

$$\int_a^b \left(\sum_{n=N+1}^{N+r} c_n u_n'(x)\right)^2 \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon^2}{p_0}.$$

Dar $u_n(a) = 0$ și din inegalitatea lui Buniakovski rezultă

$$\left|\sum_{n=N+1}^{N+r} c_n\, u_n(x)\right| = \left|\int_a^x \sum_{n=N+1}^{N+r} c_n u_n'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{b-a}\left\{\int_a^b \left(\sum_{n=N+1}^{N+r} c_n u_n'(t)\right)^2 \mathrm{d}t\right\}^{1/2} < \varepsilon\sqrt{\frac{b-a}{p_0}}; \tag{8}$$

ultima inegalitate arată că seria (6) converge uniform pe segmentul $[a, b]$.

Se poate formula o problemă mai generală. Să examinăm ecuația

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) - q(x)u + \lambda r(x)u = 0 \tag{9}$$

cu condițiile la limită (2); coeficienții $p(x)$ și $q(x)$ verifică condițiile anterioare și în plus $r \in C(a, b)$ și $r(x) \geqslant r_0 = \text{const} > 0$. Studiul spectrului acestei probleme se face după schema generală dată în capitolul de față.

Împărțind ecuația (9) la $r(x)$, obținem

$$\frac{1}{r(x)}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) - q(x)u\right] + \lambda u = 0. \tag{9a}$$

Introducem spațiul $L_2(r; a, b)$ al funcțiilor de pătrat integrabil care pe intervalul (a, b) au ponderea $r(x)$; în acest spațiu norma și produsul scalar se definesc prin formulele

$$\|u\|^2 = \int_a^b r(x)\,u^2(x)\mathrm{d}x,\quad (u, v) = \int_a^b r(x)\,u(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x. \tag{10}$$

În spațiul $L_2(r; a, b)$ analizăm operatorul B, dat de

$$Bu = \frac{1}{r(x)}\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + q(x)u\right]. \tag{11}$$

Definim acest operator pe aceeași mulțime de funcții ca și operatorul A analizat mai sus. Astfel, $D(B)$ este mulțimea funcțiilor continue pe segmentul $[a, b]$ și care satisfac condițiile (2); derivatele de ordinul întîi ale acestor funcții sînt absolut continue pe segmentul respectiv, iar cele de ordinul al doilea sînt de pătrat integrabil.

Operatorul B este pozitiv definit în spațiul $H = L_2(r; a, b)$. Într-adevăr, el este simetric: dacă $u, v \in D(B)$, atunci

$$(Bu, v) = \int_a^b v\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + qu\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b \left(p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + quv\right)\mathrm{d}x = (u, Bv).$$

Mai mult, el este pozitiv definit, ceea ce se arată în felul următor. Mai întîi observăm că

$$(Bu, u) = \int_a^b (pu'^2 + qu^2)\,\mathrm{d}x \geqslant p_0\int_a^b u'^2\,\mathrm{d}x. \tag{12}$$

Funcția $u(x)$ se anulează la capetele segmentului $[a, b]$, deci $u(a) = 0$, ceea ce conduce la

$$\sqrt{r(x)}\,u(x) = \sqrt{r(x)}\int_a^x u'(t)\mathrm{d}t.$$

Fiind continuă pe segmentul $[a, b]$, funcția $r(x)$ este mărginită. Fie $r(x) \leqslant r_1$, atunci

$$r(x)\,u^2(x) \leqslant r_1\left(\int_a^x u'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant r_1(x-a)\int_a^x u'^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant r_1(b-a)\int_a^b u'^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Integrînd după x de la a la b, obținem

$$\int_a^b u'^2(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{r_1(b-a)^2}\int_a^b r(x)\,u^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r_1(b-a)^2}\,\|u\|^2$$

și, în final, avem

$$(Bu, u) \geqslant \frac{p_0}{r_1(b-a)^2}\int_a^b r(x)\,u^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{p_0}{r_1(b-a)^2}\,\|u\|^2,$$

ceea ce demonstrează pozitiva definire a operatorului nostru.

Arătăm, în sfîrșit, că scufundarea lui H_B în $H = L_2(r\,;\,a, b)$ este compactă. Se arată ușor că spațiile H_B și $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(a, b)$ sînt alcătuite din aceleași funcții și că normele lor sînt echivalente. Mai departe, din formula (10) rezultă că aceeași concluzie este adevărată și pentru spațiile H și $L_2(a, b)$.

Fie mulțimea infinită $M \subset H_B$ mărginită în norma lui H_B, adică

$$\forall u \in M,\ |u|_B \leqslant C = \text{const}. \tag{13}$$

Atunci au loc și relațiile

$$\forall u \in M,\ \|u\|_{2,1} \leqslant C' = \text{const}. \tag{14}$$

Scufundarea lui $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(a, b)$ în $L_2(a, b)$ este compactă și de aceea putem extrage din M șirul $\{u_n\}$ Cauchy în $L_2(a, b)$: $\|u_n - u_m\|_2 \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$. Din echivalența normelor lui H și $L_2(a, b)$ rezultă că $\|u_n - u_m\|_H \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$. Prin urmare, din orice mulțime finită, mărginită în H_B, se poate extrage un șir Cauchy în H. Aceasta înseamnă că H_B se scufundă compact în H.

Conform teoremei 5.6.1 operatorul B are spectru discret, altfel spus, există o mulțime numărabilă de valori $\lambda_n > 0$, $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, pentru care problema (9), (2) are soluții nebanale și mulțimea acestor soluții este completă atît în $L_2(r\,;\,a, b)$, cît și în H_B. Dacă aceste soluții le notăm, ca mai înainte, cu $u_n(x)$, atunci ele sînt ortonormate în $L_2(r\,;\,a, b)$ și ortogonale în H_B:

$$\int_a^b r(x)u_n(x)u_m(x)\,\mathrm{d}x = \delta_{mn},$$

$$\int_a^b [p(x)u_n'(x)u_m'(x) + q(x)u_m(x)\,u_n(x)]\,\mathrm{d}x = 0,\quad m \neq n.$$

În afară de aceasta,

$$\int_a^b [p(x)\,u_n'^2(x) + q(x)u_n^2(x)]\,\mathrm{d}x = \lambda_n.$$

Valorile proprii λ_n sînt toate simple, ceea ce rezultă din faptul că ecuația diferențială (9) este de ordinul al doilea. Într-adevăr, să presupunem că valorii λ_n îi corespund două funcții proprii liniar independente: $u_n(x)$ și $u_m(x)$. Remarcăm că $u_n'(0) \neq 0$; în caz contrar, funcția $u_n(x)$ neidentic nulă ar fi o soluție a problemei Cauchy pentru ecuația omogenă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) - qu + \lambda_n ru = 0 \tag{15}$$

cu condiții inițiale omogene: $u_n(0) = u_n'(0) = 0$, ceea ce contrazice teorema de unicitate a problemei Cauchy. În mod analog, $u_m'(0) \neq 0$. Dar funcția

$$u(x) = \frac{u_n(x)}{u_n'(0)} - \frac{u_m(x)}{u_m'(0)},$$

neidentic nulă este soluție a aceleiași probleme Cauchy omogene, ceea ce este imposibil.

§ 9. CAZURI ELEMENTARE

Determinarea efectivă a valorilor proprii și a funcțiilor proprii pe baza teoremelor §§4—6 întîmpină dificultăți tehnice mari și de aceea prezintă interes acele cazuri particulare cînd spectrul operatorului poate fi găsit prin mijloace elementare. În cele ce urmează vom prezenta trei astfel de cazuri; vezi de asemenea § 3 cap. 18.

1. Vom examina operatorul A § 8 în cazul particular $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$. Problema se reduce la căutarea valorilor λ pentru care ecuația diferențială

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + \lambda u = 0 \tag{1}$$

are soluția nebanală ce satisface condițiile

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{2}$$

Soluția generală a ecuației (1) se poate scrie sub forma

$$u(x) = C\,\sin\sqrt{\lambda}(x-a) + C_1\cos\sqrt{\lambda}(x-a).$$

Condiția $u(a) = 0$ implică $C_1 = 0$ și deci $u(x) = C \sin \sqrt{\lambda}(x - a)$. Din condiția $u(b) = 0$ găsim $C \sin \sqrt{\lambda}(b - a) = 0$. De aceea este necesar ca $C \neq 0$. În caz contrar se obține soluția banală $u = 0$. Dar atunci $\sin \sqrt{\lambda}(b - a) = 0$, de unde găsim valorile proprii

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

și funcțiile proprii

$$u_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi(x-a)}{b-a}. \tag{4}$$

Constanta C_n se obține din condiția de normare

$$\| u_n \|^2 = C_n^2 \int_a^b \sin^2 n\pi \frac{x-a}{b-a} \, dx = 1,$$

de unde $C_n = \sqrt{\frac{2}{b-a}}$ și

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin \frac{n\pi(x-a)}{b-a}. \tag{4a}$$

2. Să se afle soluția nebanală a ecuației (1) în cazul condițiilor la limită

$$u'(a) = u'(b) = 0. \tag{5}$$

Ca mai înainte, soluția generală este

$$u(x) = C \sin \sqrt{\lambda}(x - a) + C_1 \cos \sqrt{\lambda}(x - a).$$

Din condiția $u'(a) = 0$ rezultă $C = 0$, iar din condiția $u'(b) = 0$ rezultă $\sin \sqrt{\lambda}(b - a) = 0$, de unde găsim valorile proprii

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

și funcțiile proprii normate

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos \frac{n\pi(x-a)}{b-a}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Formulele (6) și (7) dau valorile proprii și funcțiile proprii ale operatorului $-d^2/dx^2$ pentru condițiile la limită (5). Acest operator nu este strict pozitiv deoarece valoarea sa proprie cea mai mică nu

este pozitivă, ci zero. Dar operatorul $-d^2/dx^2 + I$ pentru aceleași condiții (5) este pozitiv definit; funcțiile sale proprii se determină, ca mai înainte, cu formula (7), iar valorile proprii corespunzătoare sînt egale cu $1 + n^2\pi^2/(b-a)^2$.

3. Într-o serie de probleme din fizica matematică un rol important îl joacă valorile proprii și funcțiile proprii ale operatorului diferențial

$$Bu = -\frac{1}{x}\left[\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right) - \frac{\nu^2}{x}u\right]; \quad \nu^2 = \text{const} \geqslant 0, \quad 0 < x < 1. \tag{8}$$

Îl vom analiza ca operator în spațiul $H = L_2(x; 0, 1)$ al funcțiilor de pătrat integrabil, cu ponderea x în intervalul $(0, 1)$. Domeniul de definiție al operatorului B este dat în modul următor: $u \in D(B)$, dacă $u(x)$ și $u'(x)$ sînt absolut continue pe orice segment de forma $[\varepsilon, 1]$, $0 < \varepsilon < 1$; produsul $\sqrt{x}\,u'(x)$ este continuu pe segmentul $[0, 1]$ și se anulează pentru $x = 0$; $Bu \in H$ și, în plus,

$$u(1) = 0. \tag{9}$$

În cele ce urmează simbolurile $(,)$ și $\| \ \|$ vor desemna produsul scalar, respectiv norma în H.

Să arătăm că B este un operator pozitiv definit în H. Notăm cu $\sqrt{x}D(B)$ mulțimea funcțiilor de forma $v(x) = \sqrt{x}\,u(x)$, unde $u \in D(B)$. Evident, $\sqrt{x}\,D(B) \subset L_2(0, 1)$; mai mult chiar, $\sqrt{x}\,D(B)$ conține mulțimea funcțiilor finite pe segmentul $[0, 1]$ și de aceea ea este densă în $L_2(0, 1)$.

Fie $\bar{u}(x)$ o funcție arbitrară din H. Atunci $\bar{v}(x) = \sqrt{x}\,\bar{u}(x) \in L_2(0, 1)$ și pentru orice $\varepsilon > 0$ dat, există $u_0 \in D(B)$ astfel încît $\| \sqrt{x}\,\bar{u}(x) - \sqrt{x}\,u_0(x) \|_2 < \varepsilon$. Dar

$$\| \sqrt{x}\,\bar{u} - \sqrt{x}\,u_0 \|_2 = \int_0^1 x[\bar{u}^2(x) - u_0^2(x)]dx = \| \bar{u} - u_0 \|^2,$$

deci $\| \bar{u} - u_0 \| < \varepsilon$ și *mulțimea $D(B)$ este densă în H.*

Definim funcționala biliniară (Bu, v), $u, v \in D(B)$ prin

$$(Bu, v) = -\int_0^1 v\left[\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right) - \frac{v^2 u}{x}\right]dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + \frac{v^2 uv}{x}\right)dx. \tag{10}$$

Partea din dreapta egalității (10) este simetrică relativ la u și v, de aceea $(Bu, v) = (u, Bv)$ și cum este definit pe o mulțime densă operatorul B *este simetric.*

Din relația (10) obținem că

$$(Bu, u) = \int_0^1 \left[xu'^2(x) + \frac{v^2}{x} u^2(x) \right] \mathrm{d}x \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^1 xu'^2(x)\, \mathrm{d}x = \|u'\|^2. \tag{11}$$

Condiția (10) conduce la notația

$$u(x) = -\int_x^1 u'(t)\, \mathrm{d}t, \tag{12}$$

din care rezultă

$$xu^2(x) \leqslant x(1-x)\int_x^1 [u'(t)]^2\, \mathrm{d}t \leqslant x\int_x^1 [u'(t)]^2\, \mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant \int_x^1 t[u'(t)]^2\, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t[u'(t)]^2\, \mathrm{d}t = \|u'\|^2.$$

Integrînd în raport cu x de la 0 la 1, obținem $\|u\|^2 \leqslant \|u'\|^2$. Din inegalitatea (11) rezultă că $(Bu, u) \geqslant \|u\|^2$; astfel am arătat că *operatorul B este pozitiv definit în H.*

Produsul energetic și norma corespunzătoare sînt respectiv:

$$[u, v]_B = \int_0^1 \left[xu'(x)\, v'(x) + \frac{\nu^2}{x} u(x)\, v(x) \right] \mathrm{d}x \tag{13}$$

și

$$|u|_B^2 = \int_0^1 \left[xu'^2(x) + \frac{\nu^2}{x} u^2(x) \right] \mathrm{d}x. \tag{14}$$

Se arată ușor că spațiul energetic H_B este alcătuit din funcțiile absolut continue pe orice segment de forma $[\varepsilon, 1]$, $0 < \varepsilon < 1$, satisfăcînd condiția la limită (9) și care au integrala (14) finită.

Să arătăm acum că operatorul B are spectru discret. Scriem identitatea (12) sub forma

$$v(x) = \int_0^1 K(x, t)\, w(t)\, \mathrm{d}t, \tag{15}$$

unde

$$v(x) = \sqrt{x}\, u(x),\ w(t) = \sqrt{t}\, u'(t),$$

$$K(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < x, \\ -\sqrt{x/t}, & x \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \tag{16}$$

Nucleul $K(x, t)$ este mărginit: $|K(x, t)| \leqslant 1$; prin urmare nucleul este de *tip Fredholm*; operatorul (15) este compact în $L_2(0, 1)$ și transformă orice mulțime mărginită în $L_2(0, 1)$ într-o mulțime compactă din același spațiu.

Fie $\mathfrak{M}$ o mulțime oarecare mărginită în H_B, adică $|u| \leqslant C$, $\forall u \in \mathfrak{M}$. Din (14) și (16) rezultă că $\|w\|_2 \leqslant C$. Mulțimea funcțiilor corespunzătoare $\{v(x)\}$ este compactă în $L_2(0,1)$: din această mulțime putem extrage șirul $\{v_n(x)\} = \{\sqrt{x}\, u_n(x)\}$, convergent în $L_2(0,1)$, adică

$$0 = \lim_{n,m\to\infty} \|v_n - v_m\|_2^2 = \lim_{n,m\to\infty} \int_0^1 x[u_n(x) - u_m(x)]^2\, \mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{n,m\to\infty} \|u_n - u_m\|^2.$$

Astfel, s-a arătat că din mulțimea $\mathfrak{M}$, mărginită în H_B, putem întotdeauna extrage un șir convergent în H. Atunci, conform teoremei 5.6.1 operatorul B are spectru discret.

Determinarea valorilor proprii și funcțiilor proprii ale operatorului B se reduce la integrarea ecuației

$$\frac{1}{x}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \right) - \frac{\nu^2}{x} u \right] + \lambda u = 0 \tag{17}$$

pentru condițiile $u \not\equiv 0$, $u \in H_B$. Ultima înseamnă, în particular, că $u(x)$ satisface condițiile (9) și valoarea integralei (14) este finită.

Introducînd o nouă variabilă $\xi = \sqrt{\lambda}x$, ecuația (17) se transformă în ecuația Bessel

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{du}{d\xi} + \left(1 - \frac{\nu^2}{\xi^2}\right)u = 0,$$

soluția generală a ecuației (17) este de forma [1]

$$u = CJ_\nu(\sqrt{\lambda}x) + C_1Y_\nu(\sqrt{\lambda}x),$$

unde J_ν și Y_ν sînt funcțiile Bessel de indice ν, respectiv de prima și a doua speță. Condiția ca integrala (14) să fie convergentă implică $C_1 = 0$. Deci $u = CJ_\nu(x)$, $C \neq 0$. Condiția (9) dă $J_\nu(\sqrt{\lambda}) = 0$. În acest fel,

$$\lambda = \lambda_n = j_{\nu,n}^2, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{18}$$

unde $j_{\nu,n}$ este *a* n-a rădăcină pozitivă a funcției Bessel $J_\nu(x)$; funcția proprie corespunzătoare este $u_n(x) = CJ_\nu(j_{\nu,n}\,x)$. Dacă C este determinat din condiția $\|u_n\| = 1$, atunci

$$u_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{J_{\nu+1}(j_{\nu,n})}J_\nu(j_{\nu,n}\,x), \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{19}$$

§ 10. PRINCIPIUL DE MINIMAX

Fie A un operator pozitiv definit care satisface condițiile teoremei 5.6.1: orice mulțime mărginită în metrica energetică este compactă în metrica spațiului inițial. Atunci spectrul acestui operator este discret. Fie λ_n și u_n, $n = 1,2,\ldots$, valorile proprii ale operatorului A, respectiv vectorii proprii corespunzători, presupuși ortonormați în spațiul inițial. Să formulăm următoarea problemă: să se găsească minimul funcționalei

$$\Phi_A(u) = |u|_A^2 \tag{1}$$

pe mulțimea elementelor spațiului energetic H_A ce satisface condițiile suplimentare

$$\|u\|^2 = 1 \tag{2}$$

[1] Notațiile privind funcțiile Bessel sînt cele din lucrarea [54].

și

$$(u, v_1) = 0, \quad (u, v_2) = 0, \ldots, (u, v_{k-1}) = 0, \tag{3}$$

unde $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ sînt elemente fixate din spațiul inițial H. Mulțimea elementelor descrisă mai sus va fi considerată ca domeniu de definiție al funcționalei Φ_A și desemnată prin $D(\Phi_A)$.

Să arătăm că pe mulțimea $D(\Phi_A)$ minimul lui $\Phi_A(u)$ se atinge. Observăm mai întîi că funcționalele (u, v_j) sînt mărginite în spațiul energetic H_A:

$$|(u, v_j)| \leqslant \|u\| \cdot \|v_j\| \leqslant \frac{\|v_j\|}{\gamma_0}|u|_A,$$

unde γ_0 este marginea inferioară a operatorului A. Conform teoremei lui Riesz, există $w_j \in H_A$ astfel încît

$$(u, v_j) = [u, w_j]_A; \; j = 1, 2, \ldots, k-1; \qquad u \in H_A.$$

Condițiile suplimentare (3), care pot fi puse acum sub forma

$$[u, w_1] = 0, \; [u_1, w_2] = 0, \ldots, [u, w_{k-1}] = 0,$$

definesc subspațiul lui H_A ortogonal pe $w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}$, pe care îl notăm cu $\mathfrak{H}_k$.

Problema noastră variațională se poate formula astfel: să se găsească minimul funcționalei (1) în mulțimea elementelor subspațiului $\mathfrak{H}_k$, satisfăcînd condiția suplimentară (2). Este suficient să repetăm raționamentele teoremei 5.5.1 ca să deducem că în $\mathfrak{H}_k$ există un element w, $\|w\| = 1$, care realizează minimul funcționalei noastre. Să notăm acest minim prin $\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$.

Principiul de minimax constă în identitatea

$$\max\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) = \lambda_k; \tag{4}$$

maximul se ia după toate posibilitățile de alegere ale elementelor $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$, care aparțin spațiului inițial H. Demonstrarea principiului de minimax se reduce la stabilirea următoarelor afirmații:

1) $\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) \leqslant v_k$;

2) există $v_j^{(0)} \in H$, astfel încît $\lambda(v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, \ldots, v_{k-1}^{(0)} = \lambda_k$.

Să stabilim aceste afirmații.

Fie u arbitrar în spaţiul energetic H_A. Sistemul $\{u_n\}$ este ortonormat şi complet în spaţiul H; dezvoltăm pe u şi v_j după acest sistem:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n, \tag{5}$$

$$v_j = \sum_{n=1}^{\infty} b_{jn} u_n, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Sistemul $\{u_n\}$ este ortogonal şi complet în H_A; în acest caz $|u_n|_A^2 = \lambda_n$. Dar atunci sistemul $\{u_n/\sqrt{\lambda_n}\}$ este ortonormat şi complet în H_A; dezvoltăm pe $u \in H_A$ după acest sistem şi avem, evident,

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}\, a_n \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}. \tag{6}$$

Conform ecuaţiei de închidere putem scrie

$$|u|_A^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n^2. \tag{7}$$

Notăm, în particular, cu $\bar{u}$ suma finală

$$\bar{u} = \sum_{n=1}^{k} a_n u_n, \tag{8}$$

unde numerele a_n sînt arbitrare. Dacă impunem ca elementul (8) să satisfacă condiţiile (3), atunci obţinem un sistem de $k-1$ ecuaţii liniare omogene în cele k necunoscute $a_1, a_2, \ldots, a_k$

$$\sum_{n=1}^{k} b_{jn} a_n = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{9}$$

Numărul ecuaţiilor este mai mic decît cel al necunoscutelor, deci sistemul (9) are o infinitate de soluţii. Dintre ele putem alege una, astfel încît $\|\bar{u}\|^2 = \sum_{n=1}^{k} a_k^2 = 1$. Atunci $\bar{u} \in D(\Phi_A)$. În acest caz, conform formulei (7) avem $|\bar{u}|_A^2 = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n a_n^2$; înlocuind aici toţi λ_n cu cel mai mare dintre ei, λ_k, obţinem

$$|\bar{u}|_A^2 \leqslant \lambda_k \sum_{n=1}^{k} a_k^2 = \lambda_k.$$

Dar $\bar{u}$ este un element al mulţimii $D(\Phi_A)$ şi ca atare avem

$$\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) = \min_{u \in D(\Phi_A)} \Phi_A(u) \leqslant \lambda_k.$$

Faptul că egalitatea este realizată se arată foarte simplu: este suficient să luăm $v_j^0 = u_j$, $j = 1,2,\ldots,k$. Într-adevăr, principiul de minimax este astfel demonstrat.

Din principiul de minimax rezultă o teoremă importantă care permite în multe cazuri să se compare valorile proprii a doi operatori. Înainte de a enunţa această teoremă, să introducem o noţiune nouă.

Fie A şi B doi operatori pozitivi definiţi care acţionează în spaţiul Hilbert H. Vom spune că *operatorul A nu este mai mic decît operatorul B* şi vom scrie $A \geqslant B$ sau $B \leqslant A$ dacă:

1) orice element din H_A aparţine lui H_B;

2) pentru orice element $u \in H_A$ are loc inegalitatea

$$|u|_A \geqslant |u|_B. \tag{10}$$

Teorema 5.10.1. *Fie A şi B operatori pozitivi definiţi satisfăcînd condiţiile teoremei* 5.6.1 *şi fie $A \geqslant B$. Dacă λ_k şi μ_k sînt valorile proprii corespunzătoare operatorilor A şi B, atunci*

$$\lambda_k \geqslant \mu_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Notăm cu $\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ şi $\mu(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ minimul funcţionalelor $|u|_A^2$ şi $|u|_B^2$ cu condiţiile (2) şi (3).

Notăm cu $\tilde{u}$ acel element în care se realizează primul minim. Conform inegalităţii (10), avem

$$\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) = |\tilde{u}|_A^2 \geqslant |\tilde{u}|_B^2 \geqslant \min |u|_B^2 = \mu(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}).$$

Dar atunci

$$\max \lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) \geqslant \max \mu(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}),$$

ceea ce este identic cu inegalitatea (11).

§ 11. DESPRE ORDINUL DE CREŞTERE AL VALORILOR PROPRII ALE PROBLEMEI STURM-LIOUVILLE

Notăm cu λ_n valorile proprii ale operatorului Sturm-Liouville

$$Au = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + qu, \quad u(a) = u(b) = 0. \tag{1}$$

Impunem coeficienților $p(x)$ și $q(x)$ aceleași restricții ca mai sus: $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ sînt continui, $p(x) \geqslant p_0$, $q(x) \geqslant 0$ pe segmentul $[a, b]$. În § 8 cap. 4 am văzut că mulțimea funcțiilor care alcătuiesc spațiul energetic al operatorului (1) nu depinde de coeficienții $p(x)$ și $q(x)$ și că

$$|u|_A^2 = \int_a^b \left[p(x) \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + q(x) u^2 \right] dx. \tag{2}$$

Din continuitatea lui $p(x)$ și $q(x)$ rezultă mărginirea lor: $p(x) \leqslant p_1$, $q(x) \leqslant q_1$, $x \in [a, b]$. Notăm

$$A_0 u = -p_0 \frac{d^2u}{dx^2}, \quad u(a) = u(b) = 0,$$

$$A_1 u = -p_1 \frac{d^2u}{dx^2} + q_1 u, \; u(a) = u(b) = 0.$$

Operatorii A_0 și A_1 sînt cazuri particulare ale operatorului A obținute pentru $p(x) \equiv p_0$, $q(x) \equiv 0$ și, respectiv, $p(x) \equiv p_1$, $q(x) \equiv q_1$. Din formula (2) rezultă

$$|u|_{A_0}^2 = p_0 \int_a^b \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx, \quad |u|_{A_1}^2 = p_1 \int_a^b \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx + q_1 \int_a^b u^2 \, dx.$$

Este clar că $|u|_{A_0}^2 \leqslant |u|_A^2 \leqslant |u|_{A_1}^2$ și prin urmare $A_0 \leqslant A \leqslant A_1$. Dacă μ_k și ν_k sînt valorile proprii ale operatorilor A_0, respectiv A_1, atunci, conform teoremei 5.10.1, avem

$$\mu_k \leqslant \lambda_k \leqslant \nu_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Numerele μ_k și ν_k se deduc ușor.

Numerele μ_k sînt valorile proprii ale problemei

$$p_0 \frac{d^2u}{dx^2} + \mu u = 0, \quad u(a) = u(b) = 0.$$

Presupunînd $\frac{\mu}{p_0} = \lambda$, regăsim problema de la § 9, punctul 1. În acest caz,

$$\mu_k = \frac{p_0 \pi^2 k^2}{(b-a)^2}. \tag{4}$$

Exact la fel numerele ν_k sînt valorile proprii ale problemei

$$p_1 \frac{d^2u}{dx^2} + (\nu - q_1) u = 0, \; u(a) = u(b) = 0,$$

și comparînd cu rezultatele de la § 9, obținem

$$\nu_k = \frac{p_1 \pi^2 k^2}{(b-a)^2} + q_1. \tag{5}$$

Relațiile (3) — (5) dau inegalitatea care definește ordinul de creștere al valorilor proprii ale problemei lui Sturm-Liouville

$$\frac{p_0 \pi^2 k^2}{(b-a)^2} \leqslant \lambda_k \leqslant \frac{p_1 \pi^2 k^2}{(b-a)^2} + q_1, \tag{6}$$

Capitolul 6

ECUAȚII ÎN SPAȚII BANACH ȘI ECUAȚII SINGULARE UNIDIMENSIONALE

§ 1. NOȚIUNI INTRODUCTIVE

Fie A un operator liniar închis ce acționează din spațiul Banach B_0 în spațiul Banach B_1. Ca de obicei, presupunem că domeniul $D(A)$ este dens în B_0. Se spune că operatorul A admite regularizare la stînga, dacă există un operator mărginit R_s din B_1 în B_0 astfel încît [1]

$$R_s A = I_0 + T_0, \tag{1}$$

unde I_0 este operatorul identic, iar T_0 un operator compact în spațiul B_0.

Operatorul R_s se numește *regularizatorul la stînga al operatorului* A. În mod analog, operatorul A admite regularizare la dreapta, dacă există un operator mărginit R_d, din B_1 în B_0, denumit *regularizatorul la dreapta al lui* A, astfel încît

$$A R_d = I_1 + T_1, \tag{2}$$

unde I_1 și T_1 sînt operatorul identic, respectiv un operator compact în B_1. În sfîrșit, se spune că A admite regularizare bilaterală, dacă admite simultan regularizare la dreapta și la stînga.

Menționăm cîteva consecințe ale definițiilor date.

a) *Dacă operatorul A admite regularizare la stînga (la dreapta), atunci operatorul adjunct A^* admite regularizare la dreapta (la stînga).* Într-adevăr, din egalitatea (1), de exemplu, rezultă $A^* R_s^* = I_0^* + T_0^*$ (I_0^* este operatorul identic în spațiul B_0^*, adjunctul lui B_0) și deci R_s^* este regularizatorul la dreapta al operatorului A^*.

b) *Dacă există simultan R_s și R_d, atunci diferența lor este compactă.* Într-adevăr, să înmulțim egalitatea (1), la dreapta, cu R_d și egalitatea (2), la stînga, cu R_s; scăzînd, obținem

$$R_d - R_s = R_s T_1 - R_d T_0.$$

[1] Peste tot în acest capitol T, cu sau fără indice, va indica un operator compact.

După cum se știe, produsul a doi operatori mărginiți și compacți este compact, deci membrul din dreapta ultimei egalități este compact.

c) *Dacă A este un operator mărginit ce admite pe R_s ca regularizator la stînga, atunci $R_s + T$, unde T este un operator compact este, de asemenea, regularizator la stînga pentru A.* Un rezultat similar este adevărat și pentru regularizatorul la dreapta. De aici, în particular, rezultă că dacă un operator mărginit admite regularizare bilaterală, atunci putem considera că $R_s = R_d$.

Să amintim acum cîteva noțiuni din analiza funcțională. Fie A un operator liniar închis ce acționează din B_0 în B_1. Soluțiile ecuației $Au = 0$ se numesc *zerourile operatorului* A; mulțimea acestor zerouri formează un subspațiu ce se numește *nucleul operatorului* A și se notează cu $\operatorname{Ker} A$. Dimensiunea nucleului operatorului A o vom nota cu $\alpha(A)$. Dacă se presupune, ca de fiecare dată, că domeniul $D(A)$ este dens în B_0, atunci operatorul adjunct A^* există și este închis. Dacă cel puțin unul din numerele $\alpha(A)$ și $\alpha(A^*)$ este finit, atunci diferența lor se numește *indexul operatorului* A și se notează cu $\operatorname{Ind} A$,

$$\operatorname{Ind} A = \alpha(A) - \alpha(A^*). \tag{3}$$

Evident că $\operatorname{Ind} A$ este finit, atunci și numai atunci cînd atît $\alpha(A)$, cît și $\alpha(A^*)$ sînt finite.

Pentru ca ecuația

$$Au = f, f \in B_1, \tag{4}$$

să aibă cel puțin o soluție, este necesar ca termenul liber f să fie ortogonal pe $\operatorname{Ker} A^*$ (altfel spus, ca elementul f să anuleze orice funcțională $v \in \operatorname{Ker} A^*$). Într-adevăr, dacă ecuația (4) are soluția u, iar $v \in \operatorname{Ker} A^*$, atunci

$$(f, v) = (Au, v) = (u, A^* v) = (u, 0) = 0;$$

unde cu paranteze s-a notat valoarea funcționalei în elementul corespunzător.

Dacă condiția de ortogonalitate, amintită mai sus, este suficientă pentru rezolvarea ecuației (4), atunci se spune că operatorul A este normal rezolvabil. Este cunoscută următoarea teoremă a lui Hausdorff: *pentru ca un operator să fie normal rezolvabil este necesar și suficient ca mulțimea valorilor sale să fie închisă.*

Rezultatele de bază ale teoremei lui Fredholm (mai exact, teoria lui Riesz-Schauder) pot fi formulate în termenii de la punctul

b astfel: dacă I este operatorul identic și T un operator compact ce acționează într-un spațiu Banach, atunci operatorul $I + T$ este normal rezolvabil și Ind $(I + T) = 0$.

§ 2. TEOREMELE LUI NOETHER

Teorema 6.2.1. *Dacă un operator admite regularizare bilaterală, atunci indexul său este finit.*

Fie A un operator dat, R_s și R_d — regularizatorii săi. Orice soluție a ecuației $Au = 0$ satisface ecuația $R_sAu = 0$ și de aceea $\alpha(A) \leqslant \alpha(R_sA)$. Dar $\alpha(R_sA) = \alpha(I_0 + T_0) < \infty$; deci cu atît mai mult $\alpha(A) < \infty$. Astfel, dacă operatorul admite regularizare la stînga, atunci dimensiunea nucleului său este finită.

Operatorul A^* admite de asemenea regularizare la stînga; regularizatorul său la stînga este R_d^* și de aceea $\alpha(A^*) < \infty$. Deci rezultă că Ind $A = \alpha(A) - \alpha(A^*)$ este finit.

Teorema 6.2.2. *Dacă un operator admite regularizare la stînga, atunci el este normal rezolvabil.*

În baza teoremei lui Hausdorff este suficient să se arate că mulțimea valorilor operatorului dat este închisă.

a) Fie A operatorul dat și $f \in R(A)$. Atunci există cel puțin un element $u_0 \in D(A)$ care satisface ecuația $Au_0 = f$. După cum s-a arătat pe parcursul demonstrației teoremei 6.2.1, nucleul Ker A este finit-dimensional; fie n dimensiunea sa, $n = \alpha(A)$, și fie $u_1, u_2, \ldots, u_n$ o bază oarecare a sa. Atunci soluția generală a ecuației $Au = f$ are forma

$$u = u_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k u_k, \tag{1}$$

unde c_k sînt constante arbitrare.

b) Să arătăm că printre elementele (1) există cel puțin un element $\tilde{u}$ cu cea mai mică normă, adică

$$\|\tilde{u}\| = \inf \left\| u_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k u_k \right\|; \tag{2}$$

marginea inferioară luîndu-se în raport cu toate posibilitățile de alegere ale numerelor $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Mai întîi, să arătăm că dacă $c^2 = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \to \infty$, atunci și $\|u\| \to \infty$. Să presupunem contrariul: există șirul

$$u^{(m)} = u_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k^{(m)} u_k, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

astfel încît $\|u^m\| \leqslant a = \text{const}$ și

$$c^{(m)} = \left[\sum_{k=1}^{n} (c_k^{(m)})^2 \right]^{1/2} \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} \infty,$$

atunci

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^{(m)} u_k \right\| \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0, \quad \gamma_k^{(m)} = \frac{c_k^{(m)}}{c^{(m)}}. \tag{3}$$

Mărimile $\gamma_k^{(m)}$ formează o mulțime mărginită: $|\gamma_k^{(m)}| \leqslant 1$. Conform teoremei lui Bolzano-Weierstrass se poate extrage un subșir $\{\gamma_k^{(m_j)}\}$ convergent pentru orice k, $1 \leqslant k \leqslant n$. Fie γ_k limita sa. Înlocuind în (3) pe m cu m_j și trecînd la limită, obținem $\sum_{k=1}^{n} \gamma_k u_k = 0$, ceea ce implică $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_n = 0$. Aceasta contrazice relația

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2 = \lim_{j \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (\gamma_k^{(m_j)})^2 = 1$$

și afirmația noastră este demonstrată.

Notăm cu δ partea dreaptă a relației (2) și alegem c_0 astfel încît pentru orice $c > c_0$ să avem $\|u\| > 2\delta$. În sfera n-dimensională $\sum_{k=1}^{n} c_k^2 = c_0^2$ mărimea $\|u\|$ este o funcție continuă de variabilele $c_1, c_2, \ldots, c_n$ și prin urmare în cel puțin un punct al sferei ea își atinge marginea inferioară δ. Afirmația de la punctul b este astfel demonstrată.

c) Să arătăm acum că expresia $\|\tilde{u}\| / \|f\|$ este mărginită:

$$\forall f \in R(A), \quad \|\tilde{u}\| \leqslant C \|f\|; \quad C = \text{const}. \tag{4}$$

Să presupunem contrariul. Atunci există un șir $\{\tilde{u}^{(j)}\}$ astfel încît $\|\tilde{u}^{(j)}\| = 1$ și $\|f^{(j)}\| = \|A\tilde{u}^{(j)}\| \to 0$. Fie R_s regularizatorul la stînga al operatorului A. Atunci avem

$$R_s f^{(j)} = R_s A \tilde{u}^{(j)} = \tilde{u}^{(j)} + T_0 \tilde{u}^{(j)}. \tag{5}$$

Din șirul mărginit $\{\tilde{u}^{(j)}\}$ se poate extrage un subșir $\{\tilde{u}^{(j_m)}\}$ astfel încît $\lim_{m \to \infty} T \tilde{u}^{(j_m)}$ să existe; notăm această limită cu $u^{(0)}$. Totodată, $R_s f^{(j_m)} \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0$, deoarece operatorul R_s este mărginit. Din relația (5)

rezultă că $\tilde{u}^{(j_m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} u^{(0)}$. În același timp, $A\tilde{u}^{(j_m)} = f^{(j_m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. Ținînd seama că operatorul A este închis, $u^{(0)} \in D(A)$ și $Au^{(0)} = 0$; deci $A(\tilde{u}^{(j)} - u^{(0)}) = f^{(j)}$. Dintre toate soluțiile ecuației $Au = f^{(j)}$, soluția $\tilde{u}^{(j)}$ are cea mai mică normă și de aceea $\| \tilde{u}^{(j)} - u^{(0)} \| \geqslant \| \tilde{u}^{(j)} \| = 1$, ceea ce contrazice relația $\tilde{u}^{(j_m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} u^{(0)}$. Inegalitatea (4) este demonstrată.

d) Fie $f \in \overline{R(A)}$. Atunci există un șir $\{f_j\}$ astfel încît $f_j \in R(A)$ și $f_j \xrightarrow[j\to\infty]{} f$. Elementului f_j îi facem să corespundă elementul $\tilde{u}_j$ cu cea mai mică normă, ce satisface ecuația $A\tilde{u}_j = f_j$; deci $R_s A\tilde{u}_j = \tilde{u}_j + T_0 \tilde{u}_j = R_s f_j$. Ținînd seama de inegalitatea (4) și de faptul că $f_j \to f$, normele elementelor $\tilde{u}_j$ sînt mărginite în ansamblu. Atunci se poate alege un șir $\{\tilde{u}_{j_m}\}$ astfel încît $\lim_{m\to\infty} T_0 \tilde{u}_{j_m}$ să existe. Regularizatorul R_s este mărginit și de aceea $R_s f_{j_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} R_s f$ și prin urmare există limita

$$u = \lim_{m\to\infty} \tilde{u}_{j_m} = R_s f - \lim_{m\to\infty} T_0 \tilde{u}_{j_m}.$$

Deci $\tilde{u}_{j_m} \to u$, $A\tilde{u}_{j_m} \to f$ și cum A este închis, rezultă $u \in D(A)$ și $Au = f$, adică $f \in R(A)$ și mulțimea valorilor $R(A)$ este închisă.

Observații. Teoremele din acest paragraf, precum și teorema 6.3.2 (din paragraful următor) au fost stabilite pentru prima oară în anul 1921 de E. Noether pentru cazul ecuațiilor integrale singulare unidimensionale.

§ 3. TEOREMA DE STABILITATE A INDEXULUI

În acest paragraf analizăm numai operatori mărginiți, definiți pe tot spațiul.

Teorema 6.3.1 (F. Atkinson). *Dacă A și B sînt operatori mărginiți, normal rezolvabili și cu indecși finiți, atunci*

$$\operatorname{Ind}(BA) = \operatorname{Ind}(AB) = \operatorname{Ind} A + \operatorname{Ind} B. \tag{1}$$

Fie

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n; \ \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n^*},$$

$$\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m; \ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{m^*},$$

respectiv bazele nucleelor operatorilor A, A^*, B, B^*, adică

$$\alpha(A) = n, \ \alpha(A^*) = n^*, \ \alpha(B) = m, \ \alpha(B^*) = m^*.$$

Să evaluăm pe $\alpha(BA)$. Dacă u satisface ecuația $BAu = 0$, atunci

$$Au = \sum_{k=1}^{m} c_k \chi_k, \ c_k = \text{const.} \tag{2}$$

Operatorul A este normal rezolvabil și de aceea pentru rezolvabilitatea ecuației (2) este necesar și suficient ca

$$\sum_{k=1}^{m} c_k (\chi_k, \psi_j) = 0, \ j = 1, 2, \ldots, n^*. \tag{3}$$

Fie s rangul matricii numerelor

$$(\chi_k, \psi_j); \ k = 1, 2, \ldots, m; \ j = 1, 2, \ldots, n^*.$$

Soluția generală a sistemului (3) depinde de $m - s$ constante arbitrare și de aceea ecuația (2) are $n + m - s$ soluții liniare independente: $\alpha(BA) = n + m - s$.

Avînd în vedere că rangul matricilor numerelor

$$(\psi_j, \chi_k); \ j = 1, 2, \ldots, n^*; \ k = 1, 2, \ldots, m,$$

este de asemenea egal cu s, se constată în acest mod că

$$\alpha((BA)^*) = \alpha(A^* B^*) = n^* + m^* - s$$

și

$$\operatorname{Ind}(BA) = n + m - n^* - m^* = \operatorname{Ind} A + \operatorname{Ind} B.$$

Teorema 6.3.2. *Dacă operatorul mărginit A admite regularizare bilaterală și T este un operator compact oarecare, atunci*

$$\operatorname{Ind}(A + T) = \operatorname{Ind} A. \tag{4}$$

Fie R regularizatorul operatorului A, simultan la stînga și la dreapta (vezi § 1). Din egalitățile $RA = I_0 + T_0$, $AR = I_1 + T_1$ reiese că și operatorul R admite regularizare bilaterală. Din teorema 6.2.1 avem Ind $R < \infty$, iar din teorema 6.2.2 rezultă că ambii operatori A și R sînt normali rezolvabili. Conform teoremei lui Atkinson, Ind $(RA) =$ Ind $R +$ Ind A. Dar Ind $(RA) =$ Ind $(I_0 + T_0) = 0$ și prin urmare

$$\operatorname{Ind} A = -\operatorname{Ind} R. \tag{5}$$

Operatorul R este regularizator bilateral și pentru suma $A + T$, cum se observă din relațiile

$$R(A + T) = I_0 + (T_0 + RT); \qquad (A + T)R = I_1 + (T_1 + TR);$$

deci și pentru suma $A + T$ are loc egalitatea (5) : $\operatorname{Ind}(A + T) = -\operatorname{Ind} R$, de unde rezultă $\operatorname{Ind}(A + T) = \operatorname{Ind} A$.

Teorema 6.3.3. *Fie A și R cu semnificațiile din teorema* 6.3.2 *și fie C un operator ce acționează din B_0 în B_1, astfel încît $\|C\| \leqslant \|R\|^{-1}$. Atunci operatorul $A + C$ admite regularizare bilaterală și*

$$\operatorname{Ind}(A + C) = \operatorname{Ind} A. \tag{6}$$

Conform cunoscutei teoreme a lui Banach, operatorul $(I_0 + RC)^{-1}$ este definit pe tot spațiul B_0 și mărginit; de asemenea, este evident că $\alpha((I_0 + RC)^{-1}) = 0$. Aceste afirmații sînt adevărate și pentru operatorul adjunct $[(I_0 + RC)^*]^{-1} = (I_0^* + C^* R^*)^{-1}$ deoarece $\|C^*R^*\| \leqslant \|C\| \cdot \|R\| < 1$. Deci operatorul $(I_0 + RC)^{-1}$ este normal rezolvabil și indexul său este egal cu zero. Mai mult,

$$(I_0 + RC)^{-1} R(A + C) = (I_0 + RC)^{-1}(I_0 + RC + T_0) =$$
$$= I_0 + (I_0 + RC)^{-1} T_0.$$

Această relație arată că operatorul $A + C$ admite regularizare la stînga, și anume produsul $(I_0 + RC)^{-1} R$. În mod analog, din relația

$$(A + C) R(I_1 + CR)^{-1} = (I_1 + CR + T_1)(I_1 + CR)^{-1} =$$
$$= I_1 + T_1(I_1 + CR)^{-1}$$

se observă că suma $A + C$ admite și regularizare la dreapta. Folosind formula (5) și teorema lui Atkinson, obținem

$$\operatorname{Ind}(A + C) = -\operatorname{Ind}(I_0 + RC)^{-1} R =$$
$$= -\operatorname{Ind}(I_0 + RC)^{-1} - \operatorname{Ind} R = -\operatorname{Ind} R = \operatorname{Ind} A.$$

Observație. Teoremele 6.3.2 și 6.3.3 sînt de obicei formulate astfel: *indexul operatorului ce admite regularizare bilaterală este stabil relativ la o perturbație cu un operator compact arbitrar și, de asemenea, relativ la orice perturbație suficient de mică în normă.*

Fie A_0 și A_1 doi operatori mărginiți, fiecare din ei acționînd din B_0 în B_1. Spunem că acești operatori sînt *omotopici* dacă se poate construi familia de operatori $\{A(t)\}$, $t \in [0,1]$, cu următoarele proprietăți:

i) Funcția $t \to A(t)$ este uniform continuă în normă pe segmentul $[0,1]$; pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît dacă $|t' - t''| < \delta$, atunci $\|A(t') - A(t'')\| < \varepsilon$.

ii) $A(0) = A_0$, $A(1) = A_1$.

iii) Pentru orice $t \in [0,1]$, operatorul $A(t)$ admite regularizare bilaterală.

iv) Există M astfel încît $\|R(t)\| \leqslant M$, $\forall t \in [0,1]$, unde $R(t)$ reprezintă regularizatorul operatorului $A(t)$ simultan la stînga și la dreapta.

Teorema 6.3.4. *Operatorii omotopici au indecși egali.*

Fie $t \in [0,1]$, fixat; pentru $\varepsilon = 1/2\,M$ există δ corespunzător. Punem $A = A(t)$, $R = R(t)$, $C = A(t') - A(t)$, unde t' este astfel încît $|t' - t| < \delta$. Ne aflăm în condițiile teoremei 6.3.3; deci $\operatorname{Ind} A(t') = \operatorname{Ind} A(t)$. Astfel, putem încadra fiecare punct al segmentului $[0,1]$ cu intervalul ce aparține unui deschis pe care mărimea $\operatorname{Ind} A(t)$ este constantă. Conform lemei lui Borel, segmentul $[0,1]$ poate fi acoperit cu un număr finit de astfel de intervale. Fie acestea $I_1, I_2, \ldots, I_{k-1}, I_k$, unde $0 \in I_1$, $1 \in I_k$ și $I_j \cap I_{j+1} \neq \emptyset$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$. Alegînd $t \in I_j \cap I_{j+1}$, rezultă că pe ambele intervale I_j și I_{j+1} indexul operatorului $A(t)$ are aceeași valoare. Rezultă astfel că $\operatorname{Ind} A(t) = \text{const}$ și, în particular, $\operatorname{Ind} A(1) = \operatorname{Ind} A(0)$.

§ 4. NOȚIUNEA DE SIMBOL

Fie $\mathfrak{R}$ inelul operatorilor care acționează din B_0 în B_1 și $\mathfrak{r}$ inelul funcțiilor (scalare sau matriciale) definite într-un spațiu oarecare finit-dimensional. Să presupunem că între elementele lui $\mathfrak{R}$ și $\mathfrak{r}$ s-a stabilit un homomorfism, adică fiecărui operator $A \in \mathfrak{R}$ îi corespunde o funcție și numai una $\Phi_A(\tau) \in \mathfrak{r}$ și fiecărei funcții din $\mathfrak{r}$ îi corespunde cel puțin un operator din $\mathfrak{R}$, astfel încît sumei, respectiv produsului operatorilor, să-i corespundă suma, respectiv produsul funcțiilor:

$$\Phi_{A+B}(\tau) = \Phi_A(\tau) + \Phi_B(\tau); \quad \Phi_{AB}(\tau) = \Phi_A(\tau)\,\Phi_B(\tau).$$

Funcția $\Phi_A(\tau)$ se va numi *simbolul operatorului* A.

Mulțimea formată doar din funcția nulă reprezintă ea însăși un inel, de aceea se poate pune în corespondență tuturor operatorilor din inelul $\mathfrak{R}$ un același simbol — funcția identic nulă sau simbolul 0. Pentru a exclude această posibilitate adăugăm următoarea ipoteză: în inelul $\mathfrak{R}$ *există un operator al cărui simbol nu se anulează niciodată*. Dacă inelul $\mathfrak{R}$ conține operatorul identic (pentru aceasta este necesar ca $B_1 \equiv B_0$), atunci această ipoteză este echivalentă

cu următoarea: simbolul operatorului identic este funcția identic egală cu unitatea (matricea unitate, dacă r este inel de matrici).

Într-adevăr, prima ipoteză rezultă, evident, din a doua. Reciproca, fie $A_0 \in \mathfrak{R}$ și $\Phi_{A_0}(\tau) \in \mathfrak{r}$, care nu se anulează niciodată. Atunci $\Phi_{A_0}(\tau) = \Phi_{A_0 I}(\tau) = \Phi_{A_0}(\tau)\,\Phi_I(\tau)$ și $\Phi_I(\tau) \equiv 1$.

Exemple. **1)** Fie $\mathfrak{R}$ inelul unor operatori diferențiali liniari obișnuiți cu coeficienți constanți. Drept r se poate lua inelul polinoamelor care depind de variabila ajutătoare k. Drept simbol al operatorului diferențial

$$Au = a_0 \frac{d^n u}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{du}{dx} + a_n u \tag{1}$$

se poate lua polinomul său caracteristic

$$\Phi_A(k) = a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n. \tag{2}$$

2) Fie $\mathfrak{R}$ inelul operatorilor ce acționează în spațiul $L_p(G)$ conform relației

$$(Au)(x) = a(x)\,u(x) + (Tu)(x). \tag{3}$$

Aici G este o mulțime măsurabilă în spațiul euclidian E_m, $a(x)$ este o funcție măsurbilă mărginită, definită aproape peste tot în G, iar T un operator compact în $L_p(G)$. Drept r se poate lua inelul funcțiilor măsurabile și mărginite, definite aproape peste tot în G; simbolul operatorului (3) se poate defini prin formula

$$\tau \equiv x,\ \Phi_A(\tau) = \Phi_A(x) = a(x). \tag{4}$$

Menționăm că prin această definiție simbolul oricărui operator compact este identic nul.

3) Fie $L_p(\tau)$ spațiul funcțiilor vectoriale cu n componente, integrabile în G de ordin p. Fie $\mathfrak{R}$ inelul operatorilor definiți, ca mai înainte, prin relația (3), unde $u(x)$ este o funcție vectorială cu n componente, iar $a(x)$ și T sînt matrici pătrate de ordin n. Simbolul operatorului (3) se poate defini și în acest caz cu ajutorul formulei (4); în cazul dat r este inelul funcțiilor matriciale de ordinul n, ale căror elemente sînt definite aproape peste tot în G, măsurabile și mărginite.

Să ne oprim mai pe larg asupra cazului definit de următoarele condiții:

1) $B_1 \equiv B_0$, unde B_1 și B_0 sînt operatori mărginiți din $\mathfrak{R}$. Inelul $\mathfrak{R}$ conține operatorul identic, precum și toți operatorii compacți care acționează în B_0.

2) Funcțiile inelului r sînt definite și continue pe o mulțime compactă.

3) Dacă simbolul $\Phi(\tau) \in \mathfrak{r}$ reprezintă o matrice nesingulară pentru orice τ (în acest caz vom spune că simbolul este nedegenerat; în cazul scalar aceasta înseamnă că funcția $\Phi(\tau) \neq 0$ oricare ar fi τ), atunci și $[\Phi(\tau)]^{-1} \in \mathfrak{r}$.

4) Simbolul unui operator este identic nul, atunci și numai atunci cînd acest operator este compact.

Teorema 6.4.1. *În cazul ipotezelor* 1) — 4) *operatorul* $A \in \mathfrak{R}$ *admite regularizarea bilaterală din același inel, atunci și numai atunci cînd simbolul operatorului* A *este nedegenerat.*

Suficiența. Să presupunem că simbolul $\Phi(\tau)$ este nedegenerat. Conform ipotezei 3) $[\Phi_A(\tau)]^{-1} \in \mathfrak{R}$. Fie $R \in \mathfrak{R}$ un operator oarecare cu simbolul $\Phi_R(\tau) = [\Phi_A(\tau)]^{-1}$. Atunci

$$\Phi_{RA}(\tau) = \Phi_{AR}(\tau) = 1$$

și prin urmare

$$\Phi_{RA-I}(\tau) = \Phi_{AR-I}(\tau) = 0.$$

În virtutea ipotezei 4) diferențele $RA - I$ și $AR - I$ sînt compacte și deci R este un regularizator bilateral pentru A.

Necesitatea. Dacă $R \in \mathfrak{R}$ este un regularizator bilateral pentru operatorul $A \in \mathfrak{R}$, atunci, spre exemplu, $RA = I + T_0$, unde T_0 este compact. În acest caz,

$$\Phi_R(\tau)\,\Phi_A(\tau) = \Phi_{RA}(\tau) = \Phi_I(\tau) + \Phi_{T_0}(\tau) = 1$$

și deoarece funcțiile $\Phi_R(\tau)$ și $\Phi(\tau)$ sînt continue pe un compact, atunci simbolul $\Phi_A(\tau)$ în mod necesar este nedegenerat.

§ 5. INTEGRALA SINGULARĂ CAUCHY

Să considerăm în planul complex un contur închis Γ fără autointersecții; acest contur poate fi și neconex. Fie t un punct arbitrar pe Γ. Ducem cercul de rază ε și centru t și fie Γ_ε porțiunea din Γ care se află în exteriorul acestui cerc. Dacă limita

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{u(\zeta)}{\zeta - t}\, d\zeta,$$

există, unde $u(\zeta)$ este o funcție oarecare dată pe Γ, atunci această limită se numește integrala singulară Cauchy și se notează cu

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\zeta)}{\zeta - t}\, d\zeta = \frac{1}{\pi i} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{u(\zeta)}{\zeta - t}\, d\zeta. \tag{1}$$

Este ușor de precizat o condiție suficientă de existență a integralei singulare (1). Aceasta constă în aceea că $u \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$; $0 < \alpha \leqslant 1$. Într-adevăr,

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{u(\zeta)}{\zeta - t}\,\mathrm{d}\zeta = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{u(\zeta) - u(t)}{\zeta - t}\,\mathrm{d}\zeta + u(t)\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - t}.$$

Prima integrală din dreapta tinde evident la integrala

$$\int_{\Gamma} \frac{u(\zeta) - u(t)}{\zeta - t}\,\mathrm{d}\zeta,$$

pe cînd a doua integrală poate fi cu ușurință calculată, obținînd

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - t} = \ln(\zeta - t)\Big|_{\Gamma_\varepsilon} = \ln\left|\frac{\zeta_2 - t}{\zeta_1 - t}\right| + \mathrm{i}\,\arg(\zeta - t)\Big|_{\Gamma_\varepsilon},$$

unde ζ_1 și ζ_2 sînt extremitățile arcului Γ_ε. Semnul $|_{\Gamma_\varepsilon}$ înseamnă variația mărimii din fața acestui semn la parcurgerea arcului Γ_ε. Avem $|\zeta_1 - t| = |\zeta_2 - t| = \varepsilon$ și de aceea $\ln|(\zeta_2 - t)/(\zeta_1 - t)| = 0$. Mai departe, presupunînd că conturul Γ se parcurge în sens contrat acelor ceasornicului, se observă ușor că

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \arg(\zeta - t)|_{\Gamma_\varepsilon} = \pi i.$$

Deci integrala singulară de formă particulară

$$\int_{\Gamma} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - t} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - t} = \pi\mathrm{i} \tag{2}$$

există și prin urmare există și

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{u(\zeta)}{\zeta - t}\,\mathrm{d}\zeta = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{u(\zeta)}{\zeta - t}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{u(\zeta) - u(t)}{\zeta - t}\,\mathrm{d}\zeta + u(t). \tag{3}$$

Astfel, dacă $u \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$, atunci limita (1) există pentru orice $t \in \Gamma$ și reprezintă o funcție dată pe Γ; prin urmare, integrala singulară Cauchy poate fi considerată ca un operator care duce funcția $u \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$ în funcția

$$v(t) = \frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma} \frac{u(\zeta)}{\zeta - t}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Acest operator, denumit *operatorul singular Cauchy*, se notează de obicei cu litera S, adică $v(t) = (Su)(t)$. Operatorul singular al lui Cauchy poate fi definit și în alte spații funcționale (vezi, de exemplu, mai jos § 6).

Observație. Este adevărată următoarea teoremă, demonstrată de I.I. Privalov: *dacă $u \in L_1(\Gamma)$, atunci integrala singulară* (1) *există aproape peste tot pe* Γ.

Teorema 6.5.0 (I. I. Privalov). *Dacă* $u \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$, $0 < \alpha < 1$, *atunci avem și* $Su \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$.

Nu vom demonstra această teoremă, importantă pentru cele ce urmează, deoarece ea rezultă direct din teorema mult mai generală a lui Giraud, ce va fi demonstrată mai jos, în § 3 cap. 7.

În cele ce urmează vom presupune că conturul Γ este frontiera unui domeniu mărginit pe care îl vom desemna cu D_i; complementara lui $\bar{D}_i$ o vom desemna cu D_e.

Să analizăm integrala de tip Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta. \tag{4}$$

Ea este olomorfă atît în domeniul D_i, cît și în fiecare din domeniile conținute în mulțimea deschisă D_e. Vom nota integrala (4) cu $F_i(z)$ (resp. cu $F_e(z)$), dacă $z \in D_i$ (resp. $z \in D_e$). Dacă $t \in \Gamma$, atunci notăm prin $F_i(t)$ și $F_e(t)$ limitele (dacă ele există) funcțiilor $F_i(z)$, respectiv $F_e(z)$, cînd z tinde la t pe drumuri netangente la Γ.

Teorema 6.5.1. *Dacă* $u \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$, $\alpha > 0$, *atunci limitele* $F_i(t)$ *și* $F_e(t)$ *există pentru orice* $t \in \Gamma$ *și au loc formulele lui Sohoțki-Plemelj*

$$F_i(t) = \frac{1}{2}[u(t) + (Su)(t)]; \quad F_e(t) = \frac{1}{2}[-u(t) + (Su)(t)]. \tag{5}$$

Să reprezentăm integrala (4) sub forma

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{u(\zeta) - u(t)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta + \frac{u(t)}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{u(\zeta) - u(t)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta + \begin{cases} u(t), & z \in D_i, \\ 0, & z \in D_e. \end{cases} \tag{6}$$

Deoarece z tinde la t pe drumuri care nu sînt tangente la Γ, atunci z rămîne în interiorul unuia din unghiurile verticale formate de două secante AA și BB, ce se intersectează în punctul t (fig. 3).

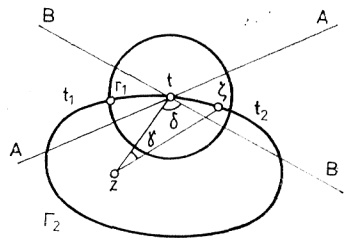

Fig. 3

Să arătăm că pentru $z \to t$, integrala din membrul drept din (6) are limita

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{u(\zeta)-u(t)}{\zeta-t}\,d\zeta.$$

Ducem cercul cu centrul în t, de rază η suficient de mică; fie t_1 și t_2 punctele de intersecție ale acestui cerc cu Γ. Notăm cu Γ_1 arcul t_2tt_1, iar cu Γ_2 cealaltă porțiune a conturului Γ. Fie ζ un punct arbitrar pe Γ_1. Să analizăm cel mai mic dintre unghiurile pe care coarda $t\zeta$ le face cu secantele AA și BB. Luăm raza η astfel încît unghiul respectiv să nu fie mai mic decît o anumită constantă $\lambda > 0$; astfel

$$\left|\int_{\Gamma}\frac{u(\zeta)-u(t)}{\zeta-z}\,d\zeta-\int_{\Gamma}\frac{u(\zeta)-u(t)}{\zeta-t}\,d\zeta\right| \leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{\Gamma_1}\frac{u(\zeta)-u(t)}{\zeta-z}\,d\zeta\right|+\left|\int_{\Gamma_1}\frac{u(\zeta)-u(t)}{\zeta-t}\,d\zeta\right|+$$

$$+\left|\int_{\Gamma_2}\left[\frac{u(\zeta)-u(t)}{\zeta-z}-\frac{u(\zeta)-u(t)}{\zeta-t}\right]d\zeta\right| = I_1+I_2+I_3. \qquad (7)$$

Să evaluăm termenul I_1. Înainte de toate să observăm că

$$\frac{|\zeta-t|}{|\zeta-z|}=\frac{\sin\gamma}{\sin\delta}\leqslant\frac{1}{\sin\delta}.$$

Apoi, $\lambda \leqslant \delta$ și $\lambda \leqslant \pi-\delta$, de aceea $\sin\delta \geqslant \sin\lambda$ și deci

$$\frac{1}{|\zeta-z|}\leqslant\frac{1}{|\zeta-t|\sin\lambda},$$

de unde rezultă

$$I_1 \leqslant \frac{1}{\sin\lambda}\int_{\Gamma_1}\left|\frac{u(\zeta)-u(t)}{\zeta-t}\right|\cdot|d\zeta|.$$

Funcția de sub integrală are ordinul de mărime $O(|\zeta-t|^{\alpha-1})$ și de aceea este integrabilă pe Γ. În acest caz, pentru η suficient de mic vom avea $I_1 < \varepsilon/3$, unde ε este un număr pozitiv arbitrar dat. În mod analog, pentru η suficient de mic vom avea $I_2 < \varepsilon/3$.

Să fixăm pe η. În termenul I_3 funcția de sub integrală este continuă în z, dacă z este suficient de apropiat de t și de aceea dacă mărimea $|z-t|$ este suficient de mică, atunci $I_3 < \varepsilon/3$, adică membrul stîng al egalității (7) este mai mic decît ε și afirmația este demonstrată.

Trecînd la limită în (6), obținem

$$F_i(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{u(\zeta)-u(t)}{\zeta-t}\,d\zeta+u(t),$$

$$F_e(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{u(\zeta)-u(t)}{\zeta-t}\,d\zeta.$$

Dar conform formulei (2) avem

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{u(\zeta)-u(t)}{\zeta-t}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{u(\zeta)}{\zeta-t}\,d\zeta-\frac{u(t)}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{d\zeta}{\zeta-t}=\frac{1}{2}[(Su)(t)-u(t)].$$

Înlocuind aceasta în egalitatea precedentă, obținem relațiile (5).

Să menționăm cîteva consecințe ale formulelor Sohoțki-Plemelj. Dacă funcția $u(\zeta)$ se prelungește analitic în D_i, adică

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{u(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\begin{cases}u(z), & z\in D_i,\\ 0, & z\in D_e,\end{cases}$$

din relațiile (5) rezultă $Su = u$.

Dacă $u(\zeta)$ se prelungește analitic în D_e și se anulează la infinit, atunci

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{u(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\begin{cases}0, & z\in D_i,\\ -u(z), & z\in D_e,\end{cases}$$

iar relațiile (5) dau $Su \equiv -u$.

Adunînd și scăzînd relațiile (5) obținem încă următoarele relații:

$$F_i(t)+F_e(t)=(Su)(t);\quad F_i(t)-F_e(t)=u(t). \qquad (8)$$

Teorema 6.5.2. *Operatorul singular Cauchy satisface ecuația algebrică*

$$S^2 = I, \tag{9}$$

unde I este operatorul identic.

Dacă $u \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$, $0 < \alpha < 1$, atunci conform teoremei 6.5.0, $Su \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$ și expresia S^2u are sens. Utilizînd prima dintre relațiile (8) obținem $S^2u = SF_i + SF_e$. Dar funcția F_i este olomorfă în D_i, iar funcția F_e — în D_e, de aceea $F_e(\infty) = 0$. În aceste condiții $SF_i = F_i$ și $SF_e = -F_e$, de unde rezultă

$$S^2u = F_i - F_e = u.$$

Relația (9) a fost obținută pentru prima dată de Poincaré; ea conținea o greșeală de semn. Eroarea a fost corectată de matematicianul francez J. Bertrand, motiv pentru care relația (9) este denumită *formula lui Poincaré-Bertrand.*

§ 6. OPERATORUL CAUCHY ÎN SPAȚIUL $L_2(\Gamma)$

Lema 6.6.1. *Fie funcția $f(z) = u(z) + iv(z)$, unde $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$, $u(z) = \mathrm{Re}\, f(z)$, $v(z) = \mathrm{Im}\, f(z)$, olomorfă în discul $|z| < 1$ și continuă în discul închis $|z| \leqslant 1$. Fie, de asemenea, $v(0) = 0$. Atunci*

$$\int_0^{2\pi} |v(e^{i\theta})|^2 \, d\theta \leqslant \int_0^{2\pi} |u(e^{i\theta})|^2 \, d\theta. \tag{1}$$

Să dezvoltăm $f(z)$ în serie Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n) \rho^n e^{in\theta}, \quad \beta_0 = 0.$$

Pentru $0 \leqslant \rho < 1$, obținem

$$u(z) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n(\alpha_n \cos n\theta - \beta_n \sin n\theta),$$

$$v(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n(\beta_n \cos n\theta + \alpha_n \sin n\theta).$$

Astfel,

$$\int_0^{2\pi} u^2(\rho e^{i\theta}) \, d\theta = 2\pi\alpha_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{2n}(\alpha_n^2 + \beta_n^2),$$

$$\int_0^{2\pi} v^2(\rho e^{i\theta}) \, d\theta = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{2n}(\alpha_n^2 + \beta_n^2)$$

și prin urmare

$$\int_0^{2\pi} v^2(\rho e^{i\theta}) \, d\theta \leqslant \int_0^{2\pi} u^2(\rho e^{i\theta}) \, d\theta, \quad 0 \leqslant \rho < 1.$$

Ambele funcții de sub integrale sînt continue pentru $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ și de aceea se poate trece la limită sub semnul integralei pentru $\rho \to 1$, obținînd inegalitatea (1).

Teorema 6.6.1. *Dacă conturul închis $\Gamma \in C^{(2)}$, atunci operatorul singular Cauchy este mărginit în $L_2(\Gamma)$.*

Dăm demonstrația în ipoteza că Γ este un contur conex; lăsăm în seama cititorului cazul mai general cînd Γ este multiplu conex.

Ca și mai sus, desemnăm cu D_i un domeniu mărginit din planul complex de frontieră Γ; dacă este conex, atunci domeniul D_i este simplu conex. Fie $u \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$, $0 < \alpha < 1$ și

$$F_i(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta, \quad z \in D_i. \tag{2}$$

Să reprezentăm conform domeniul D_i pe discul $|w| < 1$ și fie funcția $z = \varphi(w)$ ce realizează această reprezentare astfel încît punctul $w = 0$ să corespundă punctului $z_0 \in D_i$. Funcția $F_i(\varphi(w)) - F_i(\varphi 0)) = F_i(z) - F_i(z_0)$ satisface toate condițiile lemei 6.6.1 și de aceea, pentru $w = \rho e^{i\theta}$, avem

$$\int_0^{2\pi} |\mathrm{Im}\, [F_i(\varphi(e^{i\theta})) - F_i(\varphi(0))]|^2 \, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{2\pi} |\mathrm{Re}\, [F_i(\varphi(e^{i\theta})) - F_i(\varphi(0))]|^2 \, d\theta.$$

Fie $\varphi(e^{i\theta}) = t$, atunci $t \in \Gamma$ și

$$\int_\Gamma |\operatorname{Im}[F_i(t) - F_i(z_0)]|^2 \frac{ds}{|\varphi'(e^{i\theta})|} \leqslant$$

$$\leqslant \int_\Gamma |\operatorname{Re}[F_i(t) - F_i(z_0)]|^2 \frac{ds}{|\varphi'(e^{i\theta})|^2}; \qquad (3)$$

aici $ds = |dt|$ este elementul de lungime de arc al conturului Γ. Conturul $\Gamma \in C^{(2)}$ și de aceea derivata $\varphi'(e^{i\theta})$ este mărginită în modul, marginea inferioară fiind strict pozitivă.

Fie $c_1 \leqslant |\varphi'(e^{i\theta})| \leqslant c_2$; $0 < c_1 \leqslant c_2 < \infty$, atunci din inegalitatea (3) rezultă

$$\int_\Gamma |\operatorname{Im}[F_i(t) - F_i(z_0)]|^2 ds \leqslant \frac{c_2}{c_1} \int_\Gamma |\operatorname{Re}[F_i(t) - F_i(z_0)]|^2 ds,$$

sau, notînd cu $\|\ \|$ norma în $L_2(\Gamma)$, avem

$$\|\operatorname{Im}[F_i(t) - F_i(z_0)]\| \leqslant C_1 \|\operatorname{Re}[F_i(t) - F_i(z_0)]\|; \quad C_1 = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}};$$

de unde

$$\|\operatorname{Im} F_i(t)\| \leqslant (1 + C_1)\|F_i(z_0)\| + C_1 \|\operatorname{Re} F_i(t)\|.$$

Conform inegalității lui Buniakovski, avem

$$\|F_i(z_0)\| = |\Gamma|^{1/2} |F_i(z_0)| \leqslant \frac{|\Gamma|^{1/2}}{2\pi\delta} \|u\|,$$

unde δ este distanța de la z_0 la Γ. Astfel,

$$\|\operatorname{Im} F_i\| \leqslant C_1 \|\operatorname{Re} F_i\| + C_2 \|u\|, \quad C_2 = \text{const}$$

și

$$\|F_i\| \leqslant (1 + C_1)\|\operatorname{Re} F_i\| + C_2 \|u\|.$$

Conform formulelor (5.8) găsim mai departe

$$\|Su\| = \|2F_i - u\| \leqslant 2(1 + C_1)\|\operatorname{Re} F_i\| + (1 + C_2)\|u\|. \qquad (4)$$

Să evaluăm mărimea $\|\operatorname{Re} F_i\|$. Admitem pentru început că funcția $u(\zeta)$ este reală. Deci are loc egalitatea

$$\operatorname{Re} F_i(t) = \frac{1}{2} u(t) + \frac{1}{4\pi i} \int_\Gamma u(\zeta) \left[\frac{d\zeta}{\zeta - t} - \frac{d\zeta}{\bar{\zeta} - \bar{t}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} u(t) + \frac{1}{4\pi i} \int_\Gamma u(\zeta)\, d \ln \frac{\zeta - t}{\bar{\zeta} - \bar{t}} =$$

$$= \frac{1}{2} u(t) + \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma u(\zeta) \frac{\partial}{\partial \sigma} \operatorname{arctg} \frac{\eta - y}{\xi - x}\, d\sigma, \qquad (5)$$

unde $t = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, $|d\zeta| = d\sigma$.

Să arătăm că derivata de sub ultima integrală este mărginită. Fie $x = g_1(s)$, $y = g_2(s)$ ecuațiile parametrice ale lui Γ, unde s este lungimea de arc pe conturul Γ între un punct origine și punctul t. Atunci $\xi = g_1(\sigma)$, $\eta = g_2(\sigma)$, unde σ este lungimea de arc a curbei Γ între punctul de origine și punctul ζ. Astfel, g_1, $g_2 \in C^{(2)}$, deoarece $\Gamma \in C^{(2)}$. Atunci

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \operatorname{arctg} \frac{\eta - y}{\xi - x} = \frac{(\xi - x)\, g_2'(\sigma) - (\eta - y)\, g_1'(\sigma)}{|\zeta - t|^2}.$$

Dezvoltînd $x = g_1(s)$ și $y = g_2(s)$ în serie Taylor în vecinătatea punctului σ, găsim că numărătorul ultimei fracții este de ordinul $O(|\sigma - s|^2)$. În plus, $|\sigma - s| = O(|\zeta - t|)$; astfel lungimea de arc și coarda corespunzătoare acestuia au același ordin de mărime. În sfîrșit, $\partial\beta/\partial\sigma = O(1)$, $\beta = \arg(\zeta - t)$, ceea ce trebuia demonstrat.

Fie $\pi^{-1}|\partial\beta/\partial\sigma| \leqslant c_0 = \text{const}$. Din relațiile (5) rezultă $\|\operatorname{Re} F_i\| \leqslant (1 + c_0\sqrt{|\Gamma|})\|u\|$. Înlocuind aceasta în (4), obținem

$$\|Su\| \leqslant C_3 \|u\|, \quad C_3 = \text{const}. \qquad (6)$$

Inegalitatea (6) a fost dedusă în ipoteza că u este funcție reală. Dacă funcția u este complexă, adică $u = u_1 + iu_2$, atunci

$$\|Su\| \leqslant \|Su_1\| + \|Su_2\| \leqslant C_3(\|u_1\| + \|u_2\|).$$

Dar $\|u_1\| \leqslant \|u\|$, $\|u_2\| \leqslant \|u\|$, ceea ce conduce la rezultatul dorit $\|Su\| \leqslant C\|u\|$, $C = 2C_3$.

Corolarul 6.6.1. *Operatorul singular Cauchy poate fi prelungit cu păstrarea normei la tot spațiul* $L_2(\Gamma)$. *Pentru operatorul prelungit are de asemenea loc formula lui Poincaré-Bertrand.*

Demonstrația rezultă ușor din aceea că mulțimea ce satisface pe Γ condiția lui Lipschitz cu exponent pozitiv este densă în $L_2(\Gamma)$.

Facem următoarea convenție : dacă $c(t)$ este o funcție dată pe Γ, atunci vom nota cu aceeași literă c operatorul produs cu $c(t)$.

Teorema 6.6.2. *Dacă funcția* $c(t)$ *este continuă pe* Γ, *atunci operatorul* $V = Sc - cS$ *este compact în* $L_2(\Gamma)$.

Să analizăm mai întîi cazul cînd $c \in \mathrm{Lip}_1(\Gamma)$. Dacă $u \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$, $\alpha > 0$, atunci

$$(Vu)(t) = (S(cu))(t) - c(t)(Su)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{c(\zeta) - c(t)}{\zeta - t}\, u(\zeta)\, d\zeta. \quad (7)$$

Cum $c \in \mathrm{Lip}_1(\Gamma)$, atunci nucleul integralei (7) este mărginit ; această integrală este un operator mărginit în $L_2(\Gamma)$ și putem, cu ajutorul trecerii la limită, să prelungim formula (7) la tot spațiul $L_2(\Gamma)$. Conform teoremei 1.4.1, operatorul (7) este compact.

Dacă funcția $c(t)$ este însă numai continuă, atunci construim șirul de funcții $c_n(t) \in \mathrm{Lip}_1(\Gamma)$, care converge uniform la $c(t)$. Acest lucru se poate face, de exemplu, astfel. Alegem unitatea de lungime astfel încît $|\Gamma| = 2\pi$. Atunci $c(t)$ este o funcție periodică continuă de s, de perioadă 2π. Dezvoltăm această funcție în serie Fourier ; a n-a sumă de tip Fejer a acestei serii poate fi luată drept $c_n(t)$.

Punem $V_n = Sc_n - c_nS$. După cum s-a arătat, operatorul V_n este compact în $L_2(\Gamma)$. Să evaluăm norma diferenței $V - V_n$:

$$\|V - V_n\| = \|S(c - c_n) - (c - c_n)S\| \leqslant$$

$$\leqslant \|S(c - c_n)\| + \|(c - c_n)S\| \leqslant 2\|S\| \max_{t\in\Gamma} |c(t) - c_n(t)|.$$

Dar $c_n(t) \to c(t)$ uniform și de aceea $\max |c(t) - c_n(t)| \to 0$ și $\|V - V_n\| \to 0$. Conform unei cunoscute teoreme din analiza funcțională, operatorul V este compact în $L_2(\Gamma)$.

Teorema 6.6.3. *Dacă funcțiile* $a(t)$ *și* $b(t)$ *sînt continue pe* Γ, *iar operatorul* $aI + bS$ *este compact în* $L_2(\Gamma)$, *atunci* $a(t) = b(t) = 0$.

Să înmulțim la stînga operatorul compact $aI + bS$ cu operatorul mărginit $aI - bS$; produsul va fi compact. Aplicînd teorema 6.6.2 și formula lui Poincaré-Bertrand, găsim că acest produs are forma $(a^2 - b^2)I + T$, unde T este un operator compact. De aici se observă că operatorul produs cu $a^2(t) - b^2(t)$ este compact în $L_2(\Gamma)$; aceasta este adevărat numai dacă $a^2(t) - b^2(t) \equiv 0$,

adică $a(t) = b(t)\,\varepsilon(t)$, $\varepsilon(t) = \pm 1$. Atunci operatorul $b(\varepsilon I + S)$ este compact și el duce orice mulțime mărginită din $L_2(\Gamma)$, într-o mulțime compactă.

Fie $w = \omega(z)$ funcția ce realizează transformarea conformă a interiorului lui Γ pe discul $|w| < 1$. Șirul M al funcțiilor $u_n(t) = \omega^n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, este mărginit în $L_2(\Gamma)$; într-adevăr,

$$\|u_n\|^2 = \int_\Gamma |\omega^n(t)|^2\,|dt| \int_{|w|=1} |w|^{2n}\cdot|\omega'(t)|^{-1}\,|dw| =$$

$$= \int_{|w|=1} |\omega'(t)|^{-1}\cdot|dw| = \text{const}.$$

Să arătăm că acest șir nu este compact în $L_2(\Gamma')$, oricare ar fi arcul Γ' pe Γ. Să presupunem contrariul. Atunci există $\Gamma' \subset \Gamma$ și un șir de indici n_k astfel încît

$$\int_{\Gamma'} |\omega^{n_k}(t) - \omega^{n_l}(t)|^2\,|dt| \xrightarrow[k,l\to\infty]{} 0.$$

Să presupunem că prin reprezentarea $w = \omega(z)$ arcul Γ' trece într-un arc al discului unitate $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, $\theta = \arg w$. Atunci

$$\int_\alpha^\beta |e^{in_k\theta} - e^{in_l\theta}|^2\,|\omega'(t)|^{-1}\,d\theta \xrightarrow[k,l\to\infty]{} 0.$$

Conturul $\Gamma \in C^2$ și, de aceea marginea $|\omega'(t)|^{-1}$ este mărginită în interior de un număr strict pozitiv și din ultima relație rezultă că

$$\lim_{k,l\to\infty} \int_\alpha^\beta \sin^2 \frac{(n_k - n_l)\theta}{2}\, d\theta = 0.$$

Dar ultima integrală nu tinde la zero. Aceasta se poate constata, de exemplu, astfel. Facem mai întîi pe $k \to \infty$ pentru l fixat, iar apoi fie $l \to \infty$. Obținem

$$\lim_{l\to\infty}\lim_{k\to\infty} \int_\alpha^\beta \sin^2 \frac{(n_k - n_l)\theta}{2}\, d\theta =$$

$$= \lim_{l\to\infty}\lim_{k\to\infty} \left(\frac{\beta - \alpha}{2} - \frac{\sin(n_k - n_l)\beta - \sin(n_k - n_l)\alpha}{2(n_k - n_l)}\right) = \frac{\beta - \alpha}{2} \neq 0.$$

Dacă notăm prin $\tilde{\omega}(z)$ funcția ce realizează transformarea conformă a interiorului lui Γ pe exteriorul discului unitate $|w| > 1$, atunci în mod analog se poate arăta că șirul $\tilde{M}: \tilde{\omega}^n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, este mărginit în $L_2(\Gamma)$, dar nu este compact în $L_2(\Gamma')$, oricare ar fi arcul $\Gamma' \subset \Gamma$.

Să presupunem că există un punct $t_0 \in \Gamma$, pentru care $b(t_0) \neq 0$. Atunci, pe un arc oarecare $\Gamma' \subset \Gamma$, funcția $b(t)$ este mărginită în modul, cu marginea inferioară stric pozitivă. Fie, de exemplu, $\varepsilon(t_0) = 1$. Atunci $\varepsilon(t) = 1$, $\forall t \in \Gamma'$. Să analizăm șirul M al funcțiilor $u_n(t) = \omega^n(t)$. Conform formulelor lui Sohoțki-Plemelj, $Su_n = u_n$ și dacă $t \in \Gamma'$, atunci $(\varepsilon I + S)\, u_n = 2u_n$. Rezultă deci că produsul cu funcția $2b(t)$ transformă mulțimea M într-o mulțime compactă în $L_2(\Gamma')$. Fie subșirul $\{2b(t)u_{n_k}(t)\}$ convergent în $L_2(\Gamma')$. Cum pe Γ' funcția $b(t)$ este mărginită în modul, cu marginea inferioară strict pozitivă, atunci șirul $\{u_{n_k}(t)\}$ converge în $L_2(\Gamma')$. De aici rezultă că șirul M este compact în $L_2(\Gamma')$, ceea ce, după cum am văzut mai sus, este fals.

În mod analog se analizează ipoteza că $\varepsilon(t_0) = -1$; în acest caz se folosește șirul de funcții $\tilde{M}$.

Observație. Rezultatele din paragraful de față se pot extinde la spațiul $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$. Dificultatea constă numai în stabilirea lemei 6.6.1; pentru aceasta a se vedea, de exemplu, [55].

§ 7. SIMBOLUL ȘI REGULARIZAREA UNUI OPERATOR SINGULAR

Operatorul de forma

$$A = aI + bS + T, \tag{1}$$

unde $a(t)$ și $b(t)$ sînt funcții date continue pe Γ și T un operator compact în $L_2(\Gamma)$, se va numi *operator singular general* sau, mai simplu, *operator singular*. Este evident că un astfel de operator este mărginit în $L_2(\Gamma)$.

Mulțimea $\mathfrak{R}$ a operatorilor singulari formează un inel în $L_2(\Gamma)$. Într-adevăr, fie $A_k \in \mathfrak{R}$, $k = 1, 2$, astfel încît $A_k = a_k I + b_k S + T_k$, atunci

$$A_1 + A_2 = (a_1 + a_2) I + (b_1 + b_2) S + (T_1 + T_2), \tag{2}$$

adică $(A_1 + A_2) \in \mathfrak{R}$;

$$A_1 A_2 = (a_1 I + b_1 S + T_1)(a_2 I + b_2 S + T_2) =$$
$$= a_1 a_2 I + b_1 S b_2 S + a_1 b_2 S + b_1 S a_2 + \ldots;$$

aici și în cele ce urmează în acest paragraf, punctele desemnează un operator compact. Aplicînd teorema 6.6.2 și formula lui Poincaré-Bertrand, găsim că

$$A_1 A_2 = (a_1 a_2 + b_1 b_2) I + (a_1 b_2 + a_2 b_1) S + \ldots, \tag{3}$$

de unde este clar că $A_1 A_2 \in \mathfrak{R}$.

Din relațiile (2) și (3) rezultă că inelul operatorilor R se poate pune în corespondență cu inelul de simboluri corespunzătoare. Fie Θ o variabilă independentă care ia numai două valori $+1$ și -1, adică $\Theta^2 = 1$. Oricărui operator de forma (1) îi punem în corespondență funcția simbol $\Phi_A(t, \Theta) = a(t) + b(t)\,\Theta$. Atunci $\Phi_I(t, \Theta) \equiv 1$ și

$$\Phi_{A_1 + A_2}(t, \Theta) = a_1(t) + a_2(t) + [b_1(t) + b_2(t)]\,\Theta =$$
$$= \Phi_{A_1}(t, \Theta) + \Phi_{A_2}(t, \Theta);$$
$$\Phi_{A_1 A_2}(t, \Theta) = a_1(t)\, a_2(t) + b_1(t)\, b_2(t) +$$
$$+ [a_1(t)\, b_2(t) + a_2(t)\, b_1(t)]\,\Theta = \Phi_{A_1}(t, \Theta)\, \Phi_{A_2}(t, \Theta).$$

Din definiția dată aici și din teorema 6.6.3. rezultă că pentru un operator singular dat, simbolul se definește în mod unic și că acesta este identic nul, atunci și numai atunci cînd operatorul corespunzător este compact în $L_2(\Gamma)$.

Din cele expuse reiese că simbolul introdus mai sus satisface toate condițiile teoremei 6.4.1. Astfel obținem următoarele consecințe.

Fie că $\Phi_A(t, \Theta)$, simbol al operatorului singular A (formula (1)), este nedegenerat, adică pentru orice $t \in \Gamma$ și pentru $\Theta = \pm 1$, $\Phi_A(t, \Theta) \neq 0$. Altfel spus, să presupunem că pentru $t \in \Gamma$, funcția $a^2(t) - b^2(t)$ este diferită de zero. Atunci:

1) Operatorul A admite regularizare bilaterală ce este de asemenea operator singular. Simbolul regularizatorului este egal cu

$$\Phi_R(t, \Theta) = \frac{1}{\Phi_A(t, \Theta)} = \frac{1}{a(t) + b(t)\,\Theta} = \frac{a(t)}{a^2(t) - b^2(t)} - \frac{b(t)}{a^2(t) - b^2(t)}\,\Theta$$

și prin urmare

$$R = \frac{a(t)}{a^2(t) - b^2(t)}\, I - \frac{b(t)}{a^2(t) - b^2(t)}\, S + T',$$

unde T' este un operator arbitrar compact în $L_2(\Gamma)$;

2) Operatorul A este rezolvabil normal și are indexul finit;

3) Indexul operatorului A nu se modifică la o perturbație cu un operator compact T și la orice perturbație suficient de mică a coeficienților $a(t)$ și $b(t)$.

Pentru cele ce urmează este importantă următoarea remarcă: dacă în relația (1) operatorul $T = 0$, adică $A = aI + bS$ (un astfel de operator singular se numește *simplu*), atunci

$$\|A\| \leqslant K \max |\Phi_A(t, \Theta)|, \quad K = 1 + \|S\|;$$

într-adevăr,

$$\|A\| \leqslant \max |a(t)| + \|S\| \max |b(t)| =$$

$$= \frac{1}{2} \max |\Phi_A(t, +1) + \Phi_A(t, -1)| + \frac{1}{2} \|S\| \max |\Phi_A(t, +1) -$$

$$- \Phi_A(t, -1)| \leqslant (1 + \|S\|) \max |\Phi_A(t, \Theta)|.$$

§ 8. CALCULUL INDEXULUI UNUI OPERATOR SINGULAR

Teorema 6.8.1. *Indexul unui operator singular* (7.1), *al cărui simbol este nedegenerat, este egal cu*

$$\operatorname{Ind} A = \varkappa = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \mathrm{d} \ln \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}. \tag{1}$$

Indexul operatorului singular (7.1) nu depinde de termenul operatorului compact T și prin urmare este complet definit de coeficienții $a(t)$ și $b(t)$. Cu alte cuvinte, indexul unui operator singular este complet definit de simbolul său și în cele ce urmează vom vorbi adesea despre indexul simbolului în loc de indexul operatorului și vom scrie Ind Φ_A în loc de Ind A.

Să considerăm funcțiile

$$\sigma(t) = \Phi_A(t, +1) = a(t) + b(t); \quad \delta(t) = \Phi_A(t, -1) = a(t) - b(t). \tag{2}$$

A da simbolul $\Phi_A(t, \Theta)$ este echivalent cu a da perechea de funcții $\sigma(t)$ și $\delta(t)$; vom scrie deci $\Phi_A(t, \Theta) = \{\sigma(t), \delta(t)\}$. Fiind simboluri particulare, funcțiile $\sigma(t)$, respectiv $\delta(t)$, se comportă la

înmulțirea operatorilor corespunzători după regula: dacă $\Phi_{A_k}(t, \Theta) = \{\sigma_k(t), \delta_k(t)\}$, $k = 1, 2$, atunci $\Phi_{A_1 A_2} = \{\sigma_1\sigma_2, \delta_1\delta_2\}$.

Remarcăm încă faptul că dacă $\delta(t) \equiv \sigma(t)$, atunci $b(t) \equiv 0$, $a(t) = \sigma(t) = \delta(t)$ și operatorul (7.1) va reprezenta produsul cu funcția continuă $a(t)$, care este întotdeauna diferită de zero (amintim că, prin ipoteză, simbolul este nedegenerat). Evident, indexul unui astfel de operator este zero, adică Ind $\{\sigma(t), \sigma(t)\} = 0$.

Să considerăm integralele

$$\varkappa_+ = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \mathrm{d} \ln \sigma(t), \qquad \varkappa = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \mathrm{d} \ln \delta(t);$$

acestea sînt numere întregi, deoarece $\varkappa = \varkappa_- - \varkappa_+$. Să plasăm originea coordonatelor în interiorul lui Γ; avînd în vedere cele ce urmează, să alegem axele de coordonate astfel încît punctul $z=1$ să nu aparțină conturului Γ. Evident,

$$\int_\Gamma \mathrm{d} \ln [t^{-\varkappa_+} \sigma(t)] = 0, \qquad \int_\Gamma \mathrm{d} \ln [t^{-\varkappa_-} \delta(t)] = 0,$$

deoarece funcțiile $\tilde{\sigma}(t) = \ln t^{-\varkappa_+} \sigma(t)$, $\tilde{\delta}(t) = \ln t^{-\varkappa_-} \delta(t)$ sînt univoce și prin urmare continue pe Γ. Fie $\lambda \in [0,1]$. Să analizăm operatorul singular simplu A_λ cu simbolul $\{t^{\varkappa_+} \exp(\lambda \tilde{\sigma}(t)), t^{\varkappa_-} \exp(\lambda \tilde{\delta}(t))\}$. Acest operator satisface toate condițiile teoremei 6.3.4; în particular, în virtutea observației de la sfîrșitul § 7, norma regularizatorului va fi mărginită independent de λ, dacă drept regularizator se ia operatorul singular simplu cu simbolul $\{t^{-\varkappa_+} \exp(-\lambda\tilde{\sigma}(t)), t^{-\varkappa_-} \exp(-\lambda \tilde{\delta}(t))\}$. În acest caz, Ind $A_1 =$ Ind A_0. Dar operatorii A_1 și A diferă numai prin termenul operator compact și de aceea Ind $A =$ Ind $A_1 =$ Ind A_0 și prin urmare este suficient să se calculeze mărimea Ind A_0=Ind $\{t^{\varkappa_+}, t^{\varkappa_-}\}$. Dar $\{t^{\varkappa_+}, t^{\varkappa_-}\} = \{t^{\varkappa_+}, t^{\varkappa_+}\}\{1, t^{\varkappa}\}$; indexul primului factor este zero și, conform teoremei lui Atkinson, Ind $A =$ Ind $\{1, t^{\varkappa}\}$. Se mai disting trei cazuri.

1. Dacă $\varkappa = 0$, atunci Ind $A =$ Ind $\{1, 1\} = 0$; în acest caz teorema este demonstrată deja.

2. Fie $\varkappa > 0$. Atunci $\{1, t^{\varkappa}\} = \{1, t\}^{\varkappa}$; conform teoremei lui Atkinson, Ind $A = \varkappa$ Ind $\{1, t\}$ și problema se reduce la calculul indexului simbolului particular $\{1, t\}$. Operatorul singular simplu corespunzător (să-l notăm cu B) are forma

$$(Bu)(t) = \frac{1 + t}{2} u(t) + \frac{1 - t}{2} (Su)(t). \tag{3}$$

Să aflăm zerourile sale. Aplicăm ambilor membrii ai ecuației

$$2(Bu)(t) = (1+t)\,u(t) + (1-t)\,(Su)(t) = 0 \qquad (4)$$

operatorul $(1+t)\,I - (1-t)S$, care diferă de regularizatorul operatorului B numai prin factorul $2t$. Folosind formula lui Poincaré-Bertrand, obținem ecuația ce trebuie să o satisfacă toate soluțiile ecuației (4):

$$u(t) - \frac{1-t}{4\pi i t}\int_\Gamma [u(\zeta) + (Su)(\zeta)]\,d\zeta = 0.$$

De aici se observă că subspațiul zerourilor operatorului B este cel mult unidimensional: zerourile sale pot fi numai funcții de forma $u_0(t) = C(1-t)/t$, $C = \text{const}$.

Să arătăm că, într-adevăr, $Bu_0 = 0$. Punem

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{u_0(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \begin{cases} F_i(z), & z \text{ în interiorul lui } \Gamma. \\ F_e(z), & z \text{ în exteriorul lui } \Gamma. \end{cases}$$

Atunci $F_i(z) = -C$, $F_e(z) = -C/z$. Conform relațiilor (5.5), avem $(Bu_0)(t) = F_i(t) - t\,F_e(t) = 0$. Astfel, subspațiul zerourilor operatorului B este chiar unidimensional și $\alpha(B) = 1$.

Să calculăm acum pe $\alpha(B^*)$. Operatorul B^* are forma

$$(B^* v)(t) = \frac{1+\bar{t}}{2}\,v(t) + \left(S^*\left(\frac{(1-\overline{\zeta})}{2}\,v\right)\right)(t) = \frac{1+\bar{t}}{2}\,v(t) -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(1-\overline{\zeta})\,v(\zeta)}{\bar{t} - \overline{\zeta}}\,d\overline{\zeta},$$

ceea ce ne conduce la a studia

$$(1+\bar{t})\,v(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(1-\overline{\zeta})\,v(\zeta)}{\overline{\zeta} - \bar{t}}\,d\overline{\zeta} = 0. \qquad (5)$$

Să aducem această ecuație la o formă mai simplă: înlocuim fiecare termen al său prin adjuncții lor complecși, apoi înmulțim cu $(1-t)$ și introducem noua necunoscută $w(t) = (1-t)\,\overline{v(t)}$; aceste operații

sînt legitime deoarece $t \neq 1$ pe Γ. Ca rezultat obținem următoarea ecuație

$$(1+t)\,w(t) - (1-t)\,(Sw)(t) = 0, \qquad (6)$$

care diferă de ecuația (4) numai prin semnul celui de al doilea termen. Aplicînd operatorul $(1+t)\,I + (1-t)S$ ambilor membrii ai ecuației (6) găsim că orice soluție a ecuației (6) satisface de asemenea ecuația

$$w(t) - \frac{1-t}{4\pi i t}\int_\Gamma [-w(\zeta) + (Sw)(\zeta)]\,d\zeta = 0.$$

Rezultă că toate aceste soluții sînt în mod necesar de forma $w_0(t) = c(1-t)/t$, $c = \text{const}$. Folosind funcțiile introduse mai sus $F_i(t)$ și $F_e(t)$ găsim că în cazul în care $w = w_0$, membrul stîng al ecuației (6) capătă forma $2\,[tF_i(t) + F_e(t)] = -2c(t + 1/t)$ și de aceea în mod necesar $c = 0$ și $w_0(t) = 0$. De aici rezultă că $\alpha(B^*) = 0$, $\operatorname{Ind} B = \operatorname{Ind}\{1, t\} = 1$ și, în sfîrșit, $\operatorname{Ind} A = \varkappa$. Teorema este demonstrată și pentru cazul $\varkappa > 0$.

3. Fie $\varkappa < 0$. Să scriem egalitățile succesive:

$$\operatorname{Ind} A = \operatorname{Ind}\{1, t^\varkappa\} = \operatorname{Ind}\{t^\varkappa, t^\varkappa\}\,\{t^{-\varkappa}, 1\} =$$

$$= \operatorname{Ind}\{t, 1\}^{-\varkappa} = -\varkappa \operatorname{Ind}\{t, 1\}.$$

Fie B_1 operatorul singular simplu cu simbolul $\{t, 1\}$:

$$(B_1 u)(t) = \frac{1+t}{2}\,u(t) - \frac{1-t}{2}\,(Su)(t).$$

Se constată ușor că aflarea zerourilor operatorilor B_1 și B_1^* este echivalentă cu aflarea soluțiilor ecuațiilor (6) și (4). De aici obținem $\alpha(B_1) = 0$, $\alpha(B_1^*) = 1$, $\operatorname{Ind} B_1 = -1$ și $\operatorname{Ind} A = \varkappa$.

Capitolul 7

ELEMENTE DE TEORIA INTEGRALELOR SINGULARE MULTIDIMENSIONALE

Elaborarea unei teorii cît de cît completă a integralelor singulare multidimensionale (şi a ecuaţiilor integrale corespunzătoare) presupune un aparat destul de complex care depăşeşte cadrul prezentei cărţi; expunerea acestei teorii poate fi găsită în lucrarea autorului [29] şi într-o serie de lucrări citate în această carte. Aici ne rezumăm la cele mai simple tipuri de integrale singulare şi la studiul lor în clasele de funcţii Lip_α şi L_2. Primul paragraf din acest capitol este consacrat integralelor Fourier, care joacă un rol însemnat în teoria modernă a ecuaţiilor atît integrale, cît şi diferenţiale. În particular, integralele Fourier au o mare importanţă şi pentru ecuaţiile fizicii-matematice.

§ 1. TRANSFORMATA FOURIER

Enunţăm cele mai simple proprietăţi ale transformatei Fourier multidimensionale. Vom presupune cunoscute noţiunile cu privire la transformata Fourier unidimensională, precum şi proprietăţile ei de bază. Fie funcţia $u \in L(E_m)$, astfel încît

$$\int_{E_m} |u(x)|\, dx < \infty.$$

Transformata Fourier a acestei funcţii se defineşte prin relaţia

$$(Fu)(x) = \tilde{u}(x) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} e^{-i(x,\,y)} u(y)\, dy, \qquad (1)$$

unde (x, y) reprezintă produsul scalar în spaţiul E_m:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{m} x_k y_k.$$

Funcţia $\tilde{u}$ este definită şi continuă în orice punct $x \in E_m$ în virtutea convergenţei absolute şi uniforme a integralei (1).

Transformata Fourier multiplă poate fi obţinută aplicînd succesiv transformata Fourier unidimensională: dacă se construiesc succesiv funcţiile

$$u_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y_m) \times$$

$$\times e^{-ix_m y_m}\, dy_m;$$

$$u_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(x_1, x_2, \ldots, y_{m-1}, x_m) \times$$

$$\times e^{-ix_{m-1}y_{m-1}}\, dy_{m-1} = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2, \ldots, y_{m-1}, y_m) \times$$

$$\times e^{-i(x_{m-1}y_{m-1} + x_m y_m)}\, dy_{m-1}\, dy_m;$$

. . . . . .

$$u_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_{m-1}(y_1, x_2, \ldots, x_m) \times$$

$$\times e^{-ix_1 y_1}\, dy_1 = (2\pi)^{-m/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} u(y_1, y_2, \ldots, y_m) \times$$

$$\times e^{-i(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_m y_m)}\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_m, \qquad (2)$$

atunci, evident, $u_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \tilde{u}(x)$.

Teorema 7.1.1. *Dacă k este un număr natural şi produsul $(1 + |x|^k)\, u(x)$ este integrabil în E_m, atunci transformata Fourier a funcţiei $u(x)$ are peste tot în E_m derivate continue pînă la ordinul k.*

Deoarece $|u(x)| \leqslant (1 + |x|^k)\, |u(x)|$, funcţia $u \in L(E_m)$ şi funcţia transformată $\tilde{u}(x)$ există şi este continuă în E_m.

Fie $L = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ un multiindice, $|\alpha| \leqslant k$. Diferențiem formal integrala (1) de α_1 ori în raport cu $x_1, \ldots$, de α_m ori în raport cu x_m; aceasta ne conduce la integrala

$$(-i)^{|\alpha|}\,(2\pi)^{-m/2} \int_{E_m} y^{\alpha} u(y)\, e^{-i(x,\,y)}\, dy,$$

care converge absolut și uniform, deoarece $|y^{\alpha}| = y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots y_m^{\alpha_m} \leqslant |y|^{|\alpha|}$ și prin urmare

$$|y^{\alpha} u(y)\, e^{-i(x,\,y)}| \leqslant |y|^{|\alpha|}\ |u(y)| \leqslant (1 + |y|^{k})\,|u(y)|.$$

Majorantul nu depinde de x și este integrabil și de aceea se poate diferenția sub semnul integralei după regula:

$$D^{\alpha}\tilde{u}(x) = (-i)^{|\alpha|}\,(2\pi)^{-m/2} \int_{E_m} y^{\alpha} u(y)\, e^{-i(x,\,y)}\, dy\,;\, |\alpha| \leqslant k, \qquad (3)$$

iar derivatele de ordin ce nu depășesc pe k sînt continue.

Teorema 7.1.2. *Fie funcția $u(x)$ de k ori continuu diferențiabilă pentru orice $x \in E_m$. Să presupunem, de asemenea, că funcția $u(x)$ și toate derivatele sale pînă la ordinul k sînt integrabile în E_m și tind către zero la infinit. În aceste condiții, pentru $|x|$ suficient de mare, avem*

$$\tilde{u}(x) = (Fu)(x) = O(|x|^{-k}).$$

Fie un punct oarecare $x \in E_m$ și să notăm cu j indicele componentei lui x în valoarea absolută cea mai mare. Efectuăm integrarea de k ori prin părți a lui (1) în raport cu y_j. Termenii care ies de sub integrală se anulează și obținem

$$\tilde{u}(x) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} (ix_j)^{-k} \int_{E_m} \frac{\partial^k u}{\partial y_j^k}\, e^{-i(x,\,y)} dy.$$

Să evaluăm $\tilde{u}(x)$ în modul

$$|\tilde{u}(x)| \leqslant (2\pi)^{-\frac{m}{2}} |x_j|^{-k} \int_{E_m} \left|\frac{\partial^k u}{\partial y_j^k}\right| dy.$$

Coordonata x_j este cea mai mare în modul și de aceea

$$|x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2} \leqslant \sqrt{m}\,|x_j|,\ \frac{1}{|x_j|} \leqslant \frac{\sqrt{m}}{|x|},$$

adică $|\tilde{u}(x)| \leqslant c\,|x|^{-k}$, unde putem presupune, de exemplu,

$$c = (2\pi)^{-m/2} m^{k/2} \int_{E_m} \sum_{|\alpha|=k} |D^{\alpha} u(y)|\, dy.$$

În anumite condiții impuse funcției $u(x)$ este adevărată formula transformatei Fourier inverse

$$u(x) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \tilde{u}(y)\, e^{i(x,\,y)}\, dy. \qquad (4)$$

Funcția $\tilde{u}$ nu este în general integrabilă în E_m și de aceea este necesar de fiecare dată să se menționeze în ce sens urmează să înțelegem integrala (4). Pe scurt, dacă $\tilde{u}$ este integrabilă în E_m, atunci această integrală poate fi înțeleasă în sens obișnuit. Este adevărată, de exemplu, teorema următoare.

Teorema 7.1.3. *Fie funcția $u \in \mathfrak{M}^{(1)}(E_m)$. Atunci este adevărată formula inversă* (4), *în care integrala se înțelege în sensul următor*:

$$\int_{E_m} \tilde{u}(y)\, e^{i(x,\,y)}\, dy =$$

$$= \lim_{N_m \to \infty} \int_{-N_m}^{N_m} \left\{ \ldots \lim_{N_2 \to \infty} \int_{-N_2}^{N_2} \left\{ \lim_{N_1 \to \infty} \int_{-N_1}^{N_1} \tilde{u}(y)\, e^{ix_1 y_1}\, dy_1 \right\} \times \right.$$

$$\left. \times\, e^{ix_2 y_2}\, dy_2 \ldots \right\} e^{ix_m y_m}\, dy_m. \qquad (5)$$

Domeniul mărginit în care funcția $u(x)$ este diferită de zero poate fi plasat în interiorul unui anumit cub. Fie acesta cubul $-a \leqslant x_k \leqslant a$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Este evident că funcția $u(x)$ este integrabilă în raport cu x_m pentru valori fixate ale celorlalte argumente

și că în fiecare punct al spațiului există derivata în raport cu x_m. Aplicînd teorema inversei integralei Fourier unidimensionale pentru funcția u_1 (formula (2)), obținem

$$u(x) = \lim_{N_m \to \infty} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-N_m}^{N_m} u_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y_m)\, e^{ix_m y_m}\, dy_m.$$

Mai departe, avem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m)|\, dx_{m-1} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y_m)\, e^{-ix_m y_m}\, dy_m \right| dx_{m-1} \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x_1, x_2, \ldots x_{m-1}, y_m)|\, dx_{m-1}\, dy_m =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} |u(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y_m)|\, dx_{m-1}\, dy_m \leqslant \frac{4Ma^2}{\sqrt{2\pi}};$$

unde M este marginea inferioară a valorilor funcției u. În acest fel funcția $u_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m)$ este integrabilă în raport cu x_{m-1} pentru toate valorile celorlalte argumente.

Să arătăm acum că derivata $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_{m-1}}$ există în orice punct. Reprezentăm u_1 sub forma

$$u_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m) =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-a}^{a} u(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y_m)\, e^{-ix_m y_m}\, dy_m.$$

În membrul drept avem integrala pe segmentul finit $[-a, a]$ a unei funcții continuu diferențiabilă. O astfel de integrală are derivate

continue în raport cu toate argumentele de care ea depinde, în particular, în raport cu x_{m-1}. Aceeași teoremă a inversei integralei Fourier unidimensionale ne conduce la

$$u_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m) =$$

$$= 2\pi^{-\frac{1}{2}} \int_{-a}^{a} u(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y_m)\, e^{-ix_m y_m}\, dy_m$$

și prin urmare

$$u(x) = (2\pi)^{-1} \lim_{N_m \to \infty} \int_{-N_m}^{N_m} \left\{ \lim_{N_{m-1} \to \infty} \int_{-N_{m-1}}^{N_{m-1}} u_2(x_1, x_2, \ldots, y_{m-1}, y_m) \times \right.$$

$$\left. \times\, e^{ix_{m-1} y_{m-1}}\, dy_{m-1} \right\} e^{-ix_m y_m}\, dy_m.$$

Continuînd acest procedeu se obține în final relația (5).

Să examinăm încă cîteva proprietăți relative la transformata Fourier a funcțiilor de clasă $L_2(E_m)$. Acestea, în cazul general, nu sînt integrabile în E_m și deci relația (1) nu poate fi utilizată pentru ele. Să notăm cu Q_N cubul $|x_k| < N$, $k = 1, 2, \ldots, m$ și să definim funcția $u_N(x)$ astfel

$$u_N(x) = \begin{cases} u(x), & x \in Q_N, \\ 0, & x \in Q_N. \end{cases}$$

Evident, funcția $u_N(x) \in L_1(E_m)$ și transformata ei Fourier există și

$$F(u_N)(x) = (2\pi)^{-m/2} \int_{E_m} u_N(x)\, e^{-i(x, y)}\, dy =$$

$$= (2\pi)^{-m/2} \int_{Q_N} u(y)\, e^{-i(x, y)}\, dy. \tag{6}$$

Se arată că pentru $N \to \infty$, funcția $F(u_N)$ converge în norma lui $L_2(E_m)$ la o anumită limită care se ia drept transformata Fourier a funcției $u(x)$:

$$(Fu)(x) = \lim_{N \to \infty} (2\pi)^{-m/2} \int_{Q_N} u(y)\, e^{-i(x, y)}\, dy. \tag{7}$$

Din cele expuse rezultă că operatorul F este definit în tot spațiul $L_2(E_m)$. Se arată că operatorul invers F^{-1} există și este, de asemenea, definit pe tot spațiul; acest operator se definește prin

$$(F^{-1}v)(x) = \lim_{N\to\infty} (2\pi)^{-m/2} \int_{Q_N} v(y)\, e^{i(x,y)}\, dy. \tag{8}$$

Dacă $u_1, u_2 \in L_2(E_m)$, atunci are loc *formula lui Plancherel*

$$(Fu_1, Fu_2) = (u_1, u_2) \tag{9}$$

(parantezele rotunde indică produsul scalar în $L_2(E_m)$), care arată că operatorul F este *unitar în* $L_2(E_m)$. În particular, aceasta înseamnă că operatorii F și F^{-1} sînt mărginiți în $L_2(E_m)$, deoarece $\|F\| = \|F^{-1}\| = 1$.

Pentru $m = 1$ afirmațiile enunțate sînt demonstrate, spre exemplu, în lucrările [55] și [48]; pentru $m > 1$ demonstrațiile sînt analoage.

Pentru cele ce urmează este important că transformata Fourier a funcțiilor din $L_2(E_m)$ poate fi definită, de asemenea, și prin

$$(Fu)(x) = \lim_{R\to\infty} (2\pi)^{-m/2} \int_{|y|<R} u(y)\, e^{-i(x,y)}\, dy, \tag{9a}$$

unde, ca mai înainte, limita se înțelege în sensul convergenței în $L_2(E_m)$. Pentru a ne convinge de aceasta este suficient să arătăm că ($\rho = R/\sqrt{m}$)

$$\left\| (2\pi)^{-m/2} \int_{(|y|<R)\setminus Q_\rho} u(y) e^{-i(x,y)} dy \right\|_{L_2(E_m)} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0. \tag{10}$$

Punem

$$v_R(x) = \begin{cases} u(x), & x \in (|x| < R)\setminus Q_\rho, \\ 0, & \text{în rest;} \end{cases}$$

evident, $v_R \in L_2(E_m)$. Definind pe Fv_R după formula (7) se observă că

$$(Fv_R)(x) = (2\pi)^{-m/2} \int_{(|y|<R)\setminus Q_\rho} u(y)\, e^{-i(x,y)}\, dy:$$

relația (10) capătă forma $\|Fv_R\|_{L_2(E_m)} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$.

Dar conform formulei lui Plancherel

$$\|Fv_R\|^2_{L_2(E_m)} = \|v_R\|^2_{L_2(E_m)} = \int_{(|y|<R)\setminus Q_\rho} |u(y)|^2\, dy \leqslant \int_{|y|>\rho} |u(y)|^2\, dy,$$

iar ultima integrală tinde la zero, deoarece $u \in L_2(E_m)$.

§ 2. DEFINIREA ȘI CONDIȚIILE DE EXISTENȚĂ ALE INTEGRALEI SINGULARE

Aici și în cele ce urmează în acest capitol, Ω reprezintă un domeniu din spațiul E_m (mărginit sau nu); admitem și acel caz cînd $\Omega = E_m$. Mai departe, x și y sînt puncte din E_m, $r = |y - x|$, $\Theta = (y - x)/r$ și deci $|\Theta| = 1$; dacă, spre exemplu, punctul x este fixat și punctul y parcurge o vecinătate oarecare a punctului x, atunci Θ parcurge sfera unitate S_1.

Vom analiza integralele singulare de forma

$$\int_\Omega \frac{f(x,\Theta)}{r^m} u(y)\, dy, \quad x \in \Omega; \tag{1}$$

prin definiție,

$$\int_\Omega \frac{f(x,\Theta)}{r^m} u(y)\, dy = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega\setminus(r<\varepsilon)} \frac{f(x,\Theta)}{r^m} u(y)\, dy, \tag{2}$$

dacă limita din dreapta există.

Funcția $f(x, \Theta)$ se numește *caracteristica integralei singulare* (1), funcția u — *densitatea* sa, punctul x — *polul* său. Raportul $K(x, y) = f(x, \Theta)/r^m$ se numește *nucleul* integralei singulare. Caracteristica și densitatea se presupun măsurabile.

Să deducem cîteva condiții suficiente de existență a integralei singulare (1). Adoptăm următoarele ipoteze:

1) Caracteristica $f(x, \Theta)$ este mărginită: $|f(x, \Theta)| \leqslant C = \text{const}$;

2) $u \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Omega)$, unde $0 < \alpha \leqslant 1$; dacă domeniul Ω este nemărginit, atunci impunem condiția ca $u(x)$ să se anuleze în exteriorul unei anumite bile.

Izolăm punctul x printr-o sferă de rază δ. Această rază o presupunem suficient de mică astfel încît sfera împreună cu interiorul ei să fie situată în Ω. Relația (2) capătă forma

$$\int_{\Omega} \frac{f(x, \Theta)}{r^m} u(y)\, dy = \int_{\Omega \setminus (r<\delta)} \frac{f(x, \Theta)}{r^m} u(y)\, dy +$$

$$+ \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon<r<\delta} \frac{f(x, \Theta)}{r^m} [u(y) - u(x)]\, dy + u(x) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon<r<\delta} \frac{f(x, \Theta)}{r^m}\, dy. \tag{3}$$

Prima integrală din partea dreaptă a lui (3) este evident convergentă. Apoi, în bila $r \leqslant \delta$ densitatea $u \in \mathrm{Lip}_\alpha$ și de aceea $|u(y) - u(x)| \leqslant C_1 r^\alpha$, $C_1 = \text{const}$. A doua integrală din dreapta se poate reprezenta sub forma

$$\int_{r<\delta} U(x, y, \varepsilon)\, dy, \tag{4}$$

unde

$$U(x, y, \varepsilon) = \begin{cases} 0, & r < \varepsilon; \\ \dfrac{f(x, \Theta)}{r^m} u[(y) - u(x)], & \varepsilon < r < \delta. \end{cases}$$

Funcția $U(x, y, \varepsilon)$ nu depășește funcția $CC_1 r^{\alpha-m}$ și deci în integrala (4) se poate trece la limită sub semnul integralei:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{r<\delta} U(x, y, \varepsilon)\, dy = \int_{r<\delta} U(x, y, 0)\, dy =$$

$$= \int_{r<\delta} \frac{f(x, \Theta)}{r^m} [u(y) - u(x)]\, dy.$$

Să analizăm ultima integrală din (3). Introducînd coordonate sferice cu centrul în punctul x, avem

$$\int_{\varepsilon<r<\delta} \frac{f(x, \Theta)}{r^m}\, dy = \int_{S_1} f(x, \Theta)\, dS_1 \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{dr}{r} = \ln \frac{\delta}{\varepsilon} \int_{S_1} f(x, \Theta)\, dS_1;$$

este clar că limita ultimei expresii există, atunci și numai atunci cînd

$$\int_{S_1} f(x, \Theta)\, dS_1 = 0. \tag{5}$$

În acest fel, condiția (5) este necesară și suficientă pentru ca în ipotezele 1) și 2) integrala singulară (1) să existe. În cele ce urmează, condiția (5) se presupune întotdeauna îndeplinită. În acest caz integrala singulară (1) se poate reprezenta sub forma

$$\int_{\Omega} \frac{f(x, \Theta)}{r^m} u(y)\, dy = \int_{r<\delta} \frac{f(x, \Theta)}{r^m} [u(y) - u(x)]\, dy +$$

$$+ \int_{\Omega \setminus (r<\delta)} \frac{f(x, \Theta)}{r^m} u(y)\, dy, \tag{6}$$

unde δ este ales după cum s-a indicat mai sus.

Menționăm că pentru $\varepsilon \to 0$, integrala (4) converge la limita sa uniform în raport cu x în orice subdomeniu interior închis. De aici rezultă următoarea consecință: dacă caracteristica este continuă în $\overline{\Omega} \times S_1$ și este îndeplinită condiția 2), atunci integrala singulară (1) este continuă în domeniul deschis Ω.

§ 3. TEOREMA LUI GIRAUD

Să analizăm integrala

$$\int_{\Omega \setminus (r<\delta)} w(x, y)\, dy, \tag{1}$$

unde Ω este un domeniu mărginit din E_m, astfel încît bila $r < \delta$, împreună cu frontiera sa, să fie în Ω, $x \in \Omega \setminus \Omega_\delta$ iar funcția $w(x, y)$ este continuă și continuu diferențiabilă în raport cu x în domeniul $(\overline{\Omega} \times (\overline{\Omega}) \setminus (r < \delta))$. Să găsim derivatele integralei (1) în raport cu coordonatele carteziene ale punctului x.

Să admitem că x are coordonatele $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Notăm cu x' punctul de coordonate $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_m$, unde h este suficient de mic în valoare absolută. Mai notăm $r' = |y - x'|$.

12 — c. 775

Atunci

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\int\limits_{\Omega\setminus(r<\delta)} w(x,y)\,dy =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int\limits_{\Omega\setminus(r'<\delta)} w(x',y)\,dy - \int\limits_{\Omega\setminus(r<\delta)} w(x,y)\,dy\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{\Omega\setminus(r'<\delta)} [w(x',y)-w(x,y)]\,dy +$$

$$+ \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int\limits_{\Omega\setminus(r'<\delta)} w(x,y)\,dy - \int\limits_{\Omega\setminus(r<\delta)} w(x,y)\,dy\right].$$

Se observă uşor că prima limită din partea dreaptă este egală cu $\int\limits_{\Omega\setminus(r<\delta)} \frac{\partial w(x,y)}{\partial x_j}\,dy$. Să analizăm a doua limită. Expresia de sub semnul limitei se poate reprezenta sub forma

$$\frac{1}{h}\int\limits_{D_1} w(x,y)\,dy - \frac{1}{h}\int\limits_{D_2} w(x,y)\,dy,$$

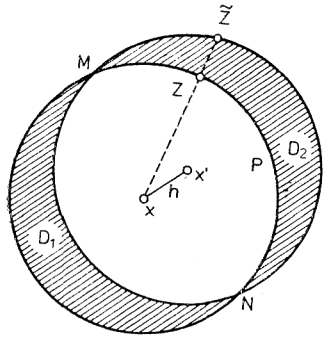

Fig. 4

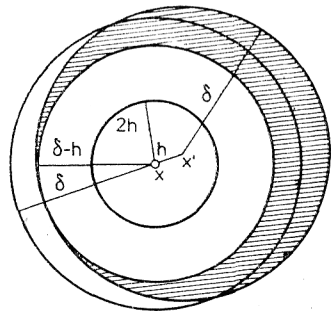

Fig. 5

unde D_1 şi D_2 sînt lunulele din fig. 4. Să examinăm, spre exemplu, expresia $\frac{1}{h}\int\limits_{D_2} w(x,y)\,dy$. Introducem în D_2 coordonatele sferice cu

centrul în punctul x. Una din coordonate este r; cea mai mică valoare a ei în D_2 este egală cu δ. Pe porţiunea MPN a sferei $r = \delta$ (fig. 4), alegem un punct oarecare z; fie $z_k = x_k + \delta\cos(r, x_k)$ coordonatele sale carteziene. Să găsim valoarea mărimii $r = \tilde{r}$ a punctului $\tilde{z}$ ce se află la intersecţia sferei $r' = \delta$ cu raza $y = x + \lambda(z - x)$ ce trece prin punctele x şi z (fig. 4). Valoarea corespunzătoare $\lambda = \tilde{\lambda}$ se obţine din sistemul de ecuaţii:

$$\sum_{k\neq j}(y_k - x_k)^2 + (y_j - x_j - h)^2 = \delta^2,$$

$$y_k = x_k + \lambda(z_k - x_k);\quad k = 1,2,\ldots,m.$$

Avînd în vedere că $|z - x| = \delta$, obţinem pentru λ ecuaţia

$$\delta^2\lambda^2 + 2h\delta\lambda\cos(r, x_j) + h^2 - \delta^2 = 0.$$

Punctul $\tilde{z}$ corespunde valorii $\tilde{\lambda} > 1$ şi de aceea

$$\tilde{\lambda} = \frac{h}{\delta}\cos(r, x_j) + \sqrt{\frac{h^2}{\delta^2}\cos(r, x_j) + 1 - \frac{h^2}{\delta^2}} =$$

$$= 1 + \frac{h}{\delta}\cos(r, x_j) + O(h^2).$$

Apoi, avem

$$\tilde{r} = |z - x| = \tilde{\lambda}\,|z - x| = \lambda\delta = \delta +$$

$$+ h\cos(r, x_j) + O(h^2).$$

Integrarea pe D_2 se obţine ca integrala pe porţiunea de sferă MPN, de ecuaţie $r = \delta$, din integrala în raport cu r între limitele δ şi $\tilde{\lambda}\delta$:

$$\frac{1}{h}\int\limits_{D_2} w(x,y)\,dy = \frac{1}{h}\int\limits_{MPN}\left\{\int\limits_{\delta}^{\tilde{\lambda}\delta} w(x,y)\,dr\right\} dS_\delta,$$

sau dacă se aplică integralei dintre acolade teorema de medie, obţinem

$$\frac{1}{h}\int\limits_{D_2} w(x,y)\,dy = \int\limits_{MPN} w(x,y^*)\,[\cos(r, x_j) + O(h)]\,dS_\delta,$$

unde y^* este un punct oarecare din intervalul $(z, \tilde{z})$. În mod analog găsim

$$\frac{1}{h}\int_{D_1} w(x, y)\mathrm{d}y = \int_{MQN} w\,(x, y^{**})\,[\cos(r', x_j) + O(h)]\mathrm{d}S'_\delta.$$

Dacă $h \to 0$, atunci MPN și MQN devin două semisfere care împreună formează sfera $r = \delta$. Ca rezultat obținem formula de derivare căutată

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\int_{\Omega\setminus(r<\delta)} w\,(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_{\Omega\setminus(r<\delta)} \frac{\partial w(x, y)}{\partial x_j}\mathrm{d}y - \tag{2}$$

$$-\int_{r=\delta} w\,(x, y)\cos(r, x_j)\,\mathrm{d}S_\delta;$$

în a doua integrală s-a înlocuit z cu y. Din formula (2) rezultă, evident, că integrala (1) este continuu diferențiabilă în $\overline{\Omega}$.

Teorema 7.3.1. (J. Giraud). *Fie Ω un domeniu mărginit din spațiul E_m și $u \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Omega)$, unde $0 < \alpha < 1$. Fie, de asemenea, nucleul singular $K(x, y) = r^{-m}f(x, \Theta)$, astfel încît $|f(x, \theta)| \leqslant C =$ = const și*

$$|\mathrm{grad}_x K(x, y)| \leqslant \frac{C'}{r^{m+1}}, \quad C' = \mathrm{const}. \tag{3}$$

Atunci $v(x) \in \mathrm{Lip}_\alpha(\overline{\Omega}')$, unde

$$v(x) = \int_\Omega \frac{f(x_1\,\Theta)}{r^m}\,u(y)\,\mathrm{d}y, \tag{4}$$

iar Ω' este un subdomeniu interior arbitrar al lui Ω.

Fie $\delta > 0$ un număr oarecare, cel mult egal cu distanța dintre $\partial\Omega$ și $\partial\Omega'$. Reprezentăm integrala (4) sub forma (2.6). Termenii din dreapta acestei relații să-i notăm cu $v_0(x)$, respectiv $w(x)$. Cum am arătat mai sus, $v_0 \in C^{(1)}(\overline{\Omega})$. Cu atît mai mult, $v_0 \in \mathrm{Lip}_\alpha(\overline{\Omega}')$ și prin urmare rămîne să analizăm

$$w(x) = \int_{r<\delta} [u(y) - u(x)]K(x, y)\mathrm{d}y. \tag{5}$$

Fie x' un punct arbitrar din $\overline{\Omega}'$, suficient de apropiat de x. Notînd $|x' - x| = h$, obținem

$$w(x') - w(x) = \int_{r'<\delta} [u(y) - u(x')]K(x', y)\,\mathrm{d}y -$$

$$-\int_{r<\delta} [u(y) - u(x)]\,K(x, y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{r<\delta-h} \{[u(y) - u(x')]K\,(x', y) -$$

$$-[u(y) - u(x)]\,K\,(x, y)\}\,\mathrm{d}y +$$

$$+ \int_{(r'<\delta)\cap(r>\delta-h)} [u(y) - u(x')]K(x', y)\,\mathrm{d}y -$$

$$- \int_{\delta-h<r<\delta} [u(y) - u(x)]K(x, y)\,\mathrm{d}y. \tag{6}$$

Domeniile de integrare sînt indicate în fig. 5; domeniul de integrare al celei de a doua integrale este cel haşurat.

În ultimele două integrale din membrul drept al relației (6) funcțiile de sub integrală sînt mărginite, iar volumul domeniului de integrare este de ordinul $O(h)$, adică cu atît mai mult de ordinul $O(h^\alpha)$, ceea ce implică

$$\left|\int_{(r'<\delta)\cap(r>\delta-h)} [u(y) - u(x')]\,K(x', y)\,\mathrm{d}y - \right.$$

$$\left. - \int_{\delta-h<r<\delta} [u(y) - u\,(x)]K\,(x,\ y)\mathrm{d}y\right| \leqslant C_1 h^\alpha,\ C_1 = \mathrm{const}. \tag{7}$$

Prima integrală din membrul drept al relației (6) o descompunem în două: după bila $r < 2h$ și după coroana $2h < r < \delta - h$. Prin urmare,

$$|[u(y) - u(x)]K(x, y)| \leqslant C_0 r^{\alpha-m},$$

$$|[u(y) - u(x')]K\,(x, y)\,| \leqslant C_0 r'^{\alpha-m},$$

unde $C_0 = \text{const}$; de aici

$$\left| \int\limits_{r<2h} [u(y) - u(x)] K(x, y)\, dy \right| \leqslant C_0 \int\limits_{r<2h} \frac{dy}{r^{m-\alpha}} = C_2 h^\alpha; \qquad (8)$$

C_2 este o constantă care se calculează ușor cu ajutorul formulei (3.2) cap. 1. În mod analog avem

$$\left| \int\limits_{r<2h} [u(y) - u(x')]\, K(x', y)\, dy \right| \leqslant C_0 \int\limits_{r<2h} \frac{dy}{r'^{m-\alpha}}.$$

Dar dacă $r < 2h$, atunci $r' = |x' - x + x - y| \leqslant h + r < 3h$, ceea ce arată că bila $r < 2h$ se găsește în interiorul bilei $r' < 3h$ și prin urmare

$$C_0 \int\limits_{r<2h} \frac{dy}{r^{m-\alpha}} < C_0 \int\limits_{r'<3h} \frac{dy}{r'^{m-\alpha}} = C_3 h^\alpha; \quad C_3 = \text{const};$$

în cele de mai sus s-a folosit relația (3.2) cap. 1. Astfel,

$$\left| \int\limits_{r<2h} [u(y) - u(x')]\, K(x', y)\, dy \right| \leqslant C_3 h^\alpha. \qquad (9)$$

Se observă că funcția de sub integrală pe coroana sferică $2h < r < \delta - h$ poate fi pusă sub forma

$$[u(x) - u(x')]\, K(x, y) + [u(y) - u(x')][K(x', y) - K(x, y)].$$

Ținînd seama de relația (2.5), integrala din primul termen se anulează. Mai departe, conform teoremei lui Taylor, avem

$$K(x', y) - K(x, y) = (\text{grad}_x K(\xi, y), x' - x),$$

unde ξ este un punct arbitrar de pe segmentul care unește punctele x și x'.

Din inegalitatea (3) avem

$$|K(x', y) - K(x, y)| \leqslant C' h |\xi - y|^{-m-1}.$$

Evident, $|\xi - y| > r - h$ și cum în domeniul de integrare $h < r/2$ rezultă că $|\xi - y| > r/2$, ceea ce implică

$$|K(x', y) - K(x, y)| \leqslant 2^{m+1} C' h r^{-m-1}.$$

Funcția u satisface condiția lui Lipschitz, adică

$$|u(y) - u(x')| \leqslant C_0 r'^\alpha \leqslant C_0 (r + h)^\alpha \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^\alpha C_0 r^\alpha;$$

deci

$$\left| \int\limits_{2h<r<\delta-h} [u(y) - u(x')][K(x', y) - K(x, y)]\, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_4 h \int\limits_{2h<r<\delta-h} r^{\alpha-m-1}\, dy = C_4 h \int\limits_{S_1} dS_1 \int\limits_{2h}^{\delta-h} r^{\alpha-2}\, dr < C_5 h^\alpha,$$

$$C_4, \quad C_5 = \text{const}. \qquad (10)$$

Din inegalitățile (7) — (10) rezultă că $|v(x') - v(x)| \leqslant C h^\alpha$, unde $C = C_1 + C_2 + \ldots + C_5$.

Teorema lui I. I. Privalov 6.5.0 se obține din teorema lui Giraud pentru $m = 1$.

§ 4. TRANSFORMATA FOURIER A NUCLEULUI SINGULAR

Vom analiza cazul cînd caracteristica nu depinde de pol. În acest caz nucleul singular

$$K(x, y) = \frac{f(\theta)}{r^m} = |y - x|^{-m} f\left(\frac{y - x}{|y - x|}\right)$$

depinde numai de diferența argumentelor și de aceea vom nota $K(x, y) = K(x - y)$.

Să analizăm transformata Fourier a nucleului $K(z)$:

$$(FK)(x) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{E_m} K(z)\, e^{-i(x, z)} dz. \qquad (1)$$

Funcția $K(z)$ nu este integrabilă în vecinătatea punctelor $z = 0$ și $z = \infty$, integrala (1) este în general divergentă, motiv pentru care vom defini transformata Fourier a nucleului $K(z)$ prin formula

$$(FK)(x) = (2\pi)^{-m/2} \lim_{\substack{\varepsilon' \to 0 \\ N' \to \infty}} \int_{\varepsilon' < |z| < N'} K(z) e^{-i(x,z)}\, dz. \tag{2}$$

Să arătăm că limita (2) există dacă $x \neq 0$ și dacă $f(\Theta)$ este mărginită. Relația (2) poate fi dată și sub altă formă. Dacă notăm

$$K_{\varepsilon', N'}(x) = \begin{cases} K(x), & \varepsilon' < |x| < N', \\ 0, & \text{în celelalte cazuri,} \end{cases} \tag{3}$$

atunci

$$(FK)(x) = (2\pi)^{-m/2} \lim_{\substack{\varepsilon' \to 0 \\ N' \to \infty}} (FK_{\varepsilon', N'})(x). \tag{2a}$$

Introducem notațiile $|z| = \rho$, $|x| = R$, $\Psi = z/\rho$, $\Lambda = x/R$; este evident că $|\Psi| = |\Lambda| = 1$ și $K(z) = \rho^{-m} f(-\Psi)$. Fie γ unghiul dintre vectorii x și z. Atunci $(x, z) = \rho R \cos \gamma$, iar

$$(FK)(x) = 2(\pi)^{-m/2} \lim_{\substack{\varepsilon' \to 0 \\ N' \to \infty}} \int_{S_1} f(-\Psi) \left\{ \int_{\varepsilon'}^{N'} \frac{e^{-i\rho R \cos \gamma}}{\rho}\, d\rho \right\} dS_1.$$

În integrala dintre acolade facem schimbarea de variabile $\rho R = t$ și notăm $\varepsilon'/R = \varepsilon$, $N'/R = N$. Atunci

$$(FK)(x) = (2\pi)^{-m/2} \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ N \to \infty}} \int_{S_1} f(-\Psi) \left\{ \int_{\varepsilon}^{N} \frac{e^{-it \cos \gamma}}{t}\, dt \right\} dS_1. \tag{4}$$

Relația (4) arată că transformata Fourier a nucleului singular (în ipoteza că există) nu depinde de R. De aceea vom scrie $FK(x) = (FK)(\Lambda)$. Să reprezentăm relația (4) sub forma

$$(FK)(\Lambda) = (2\pi)^{-m/2} \left[\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_1} f(-\Psi) \left\{ \int_{\varepsilon}^{1} \frac{e^{-it \cos \gamma}}{t}\, dt \right\} dS_1 + \right.$$

$$\left. + \lim_{N \to \infty} \int_{S_1} f(-\Psi) \left\{ \int_{1}^{N} \frac{e^{-it \cos \gamma}}{t}\, dt \right\} dS_1 \right]. \tag{5}$$

Ținînd seama de condiția (2.5), obținem

$$\int_{S_1} f(-\Psi) \left\{ \int_{\varepsilon}^{1} \frac{e^{-it \cos \gamma}}{t}\, dt \right\} dS_1 =$$

$$= \int_{S_1} f(-\Psi) \left\{ \int_{\varepsilon}^{1} \frac{e^{-it \cos \gamma} - 1}{t}\, dt + \ln \frac{1}{\varepsilon} \right\} dS_1 =$$

$$= \int_{S_1} f(-\Psi) \left\{ \int_{\varepsilon}^{1} \frac{e^{-it \cos \gamma} - 1}{t}\, dt \right\} dS_1.$$

De aici se observă că primul termen din membrul drept al relației (5) are limita

$$(2\pi)^{-m/2} \int_{S_1} f(-\Psi) \left\{ \int_{0}^{1} \frac{e^{-it \cos \gamma} - 1}{t}\, dt \right\} dS_1 : \tag{6}$$

este evident astfel că acest termen este mărginit independent de ε.

Să revenim la al doilea termen. Alegem axele de coordonate carteziene astfel încît prima axă să treacă prin punctul Λ și apoi introducem coordonatele sferice corespunzătoare. Atunci $\gamma = \vartheta_1$. Descompunem intervalul de integrare în raport cu ϑ_1 în două: $(0, \pi) = (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$. În mod corespunzător, sfera S_1 se descompune în două părți pe care le notăm S' și S'': integrala din al doilea termen din (5) se descompune și ea în două integrale. În prima dintre ele $\cos \gamma \geqslant 0$. În integrala dintre acolade, făcînd schimbarea de variabile $t \cos \gamma = \tau$, obținem

$$\int_{1}^{N} \frac{e^{-it \cos \gamma}}{t}\, dt = \int_{\cos \gamma}^{N \cos \gamma} \frac{e^{-i\tau}}{\tau}\, d\tau =$$

$$= \ln \frac{1}{\cos \gamma} + \int_{\cos \gamma}^{1} \frac{e^{-i\tau} - 1}{\tau}\, d\tau + \int_{1}^{N \cos \gamma} \frac{e^{-i\tau}}{\tau}\, d\tau;$$

în mod corespunzător,

$$\int_{S'} f(-\Psi)\left\{\int_1^N \frac{e^{-it\cos\gamma}}{t}\,dt\right\} dS_1 =$$

$$= \int_{S'} f(-\Psi)\left\{\ln\frac{1}{\cos\gamma} + \int_{\cos\gamma}^{1} \frac{e^{-i\tau}-1}{\tau}\,d\tau\right\} dS_1 +$$

$$+ \int_{S'} f(-\Psi)\left\{\int_1^{N\cos\gamma} \frac{e^{-i\tau}}{\tau}\right\} dS_1. \qquad (7)$$

Prima integrală din membrul drept al relației (7) este convergentă. În a doua, integrala dintre acolade este mărginită deoarece integrala improprie $\int_1^\infty \tau^{-1} e^{-i\tau}\,d\tau$ este convergentă; conform cunoscutei teoreme a lui Lebesgue, se poate trece la limită sub semnul integralei. De aici rezultă că limita integralei din membrul stîng al relației (7) există și este egală cu

$$\int_{S'} f(-\Psi)\left\{\int_1^\infty \frac{e^{-it\cos\gamma}}{t}\,dt\right\} dS_1.$$

Remarcăm de asemenea că integrala (7) este mărginită independent de N.

În integrala pe S'', unde $\cos\gamma \leqslant 0$, în expresia dintre acolade facem schimbarea de variabile $-t\cos\gamma = \tau$. Raționînd acum în mod analog ca mai sus, se arată că integrala pe S'' este mărginită independent de N și că limita pentru $N \to \infty$ există și este egală cu

$$\int_{S''} f(-\Psi)\left\{\int_1^\infty \frac{e^{-it\cos\gamma}}{t}\,dt\right\} dS_1.$$

În final, expresia de sub semnul limitei din relația (5) este mărginită independent de N și limita există și este egală cu

$$(FK)(\Lambda) = (2\pi)^{-m/2}\int_S f(-\Psi)\left\{\int_0^1 \frac{e^{-it\cos\gamma}-1}{t}\,dt + \int_1^\infty \frac{e^{-it\cos\gamma}}{t}\,dt\right\} dS_1. \qquad (8)$$

Să analizăm mai îndeaproape expresia dintre acolade pe care o notăm cu $Q(\cos\gamma)$. Fie $\cos\gamma > 0$. Schimbarea de variabile $t\cos\gamma = \tau$ dă

$$\int_1^\infty \frac{e^{-it\cos\gamma}}{t}\,dt = \int_{\cos\gamma}^\infty \frac{e^{-i\tau}}{\tau}\,d\tau = \ln\frac{1}{\cos\gamma} + \int_{\cos\gamma}^1 \frac{e^{-i\tau}-1}{\tau}\,d\tau + \int_1^\infty \frac{e^{-i\tau}}{\tau}\,d\tau;$$

dar

$$\int_0^1 \frac{e^{-it\cos\gamma}-1}{t}\,dt = \int_0^{\cos\gamma} \frac{e^{-i\tau}-1}{\tau}\,d\tau,$$

de unde

$$Q(\cos\gamma) = \ln\frac{1}{\cos\gamma} + \int_0^1 \frac{e^{-i\tau}-1}{\tau}\,d\tau + \int_1^\infty \frac{e^{-i\tau}}{\tau}\,dt =$$

$$= \ln\frac{1}{\cos\gamma} - \frac{i\pi}{2} + a; \quad \cos\gamma > 0,$$

unde

$$a = -\int_0^1 \frac{1-\cos\tau}{\tau}\,d\tau + \int_1^\infty \frac{\cos\tau}{\tau}\,d\tau.$$

Dacă $\cos\gamma < 0$, atunci efectuînd schimbarea de variabile $\tau = -t\cos\gamma$, ca mai sus, obținem

$$Q(\cos\gamma) = \ln\frac{1}{-\cos\gamma} + \frac{i\pi}{2} + a; \quad \cos\gamma < 0.$$

Deci pentru $Q(\cos\gamma)$ obținem:

$$Q(\cos\gamma) = \ln\frac{1}{|\cos\gamma|} - \frac{i\pi}{2}\operatorname{sign}\cos\gamma + a.$$

Revenind la relația (8) și ținînd cont de condiția (2.5), termenul cu constanta a dispare, obținînd astfel *formula pentru transformata Fourier a nucleului singular* sub forma

$$(FK)(\Lambda) = (2\pi)^{-m/2}\int_{S_1}\left(\ln\frac{1}{|\cos\gamma|} - \frac{i\pi}{2}\operatorname{sign}\cos\gamma\right) f(-\Psi)\,dS_1. \qquad (9)$$

Din formula (9) rezultă că funcţia $(FK)(\Lambda)$ este mărginită dacă $f \in L_p S_1$, unde $p > 1$ arbitrar. Într-adevăr, conform inegalităţii lui Hölder avem

$$|(FK)(\Lambda)| \leqslant \left\{ \int\limits_{S_1} |f(-\Psi)|^p \, dS_1 \right\}^{1/p} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_{S_1} \left| \ln \frac{1}{|\cos \gamma|} - \frac{i\pi}{2} \operatorname{sign} \cos \gamma \right|^{p'} dS_1 \right\}^{1/p'}.$$

Alegînd sistemul de coordonate, introdus mai sus, pentru care $\vartheta_1 = \gamma$, a doua integrală capătă forma

$$2\pi \int\limits_0^\pi \left| \ln \frac{1}{|\cos \gamma|} - \frac{i\pi}{2} \operatorname{sign} \cos \gamma \right|^{p'} \sin^{m-2}\gamma \, d\gamma \times$$

$$\times \int\limits_0^\pi \dots \int\limits_0^\pi \sin^{m-3} \dots \sin \vartheta_{m-2} \, d\vartheta_2 \dots d\vartheta_{m-2},$$

care reprezintă o anumită constantă. Afirmaţia este demonstrată.

§ 5. INTEGRALE SINGULARE ÎN L_2

Să analizăm integrala singulară

$$v(x) = \int\limits_{E_m} K(x-y) \, u(y) \, dy = \int\limits_{E_m} \frac{f(\Theta)}{r^m} u(y) \, dy. \tag{1}$$

unde, ca şi în § 2, caracteristica $f(\Theta)$ este mărginită pe S_1, densitatea $u \in \mathrm{Lip}_\alpha (E_m)$ şi se anulează în exteriorul unei anumite bile. Transformata Fourier a integralei (1) este

$$(Fv)(x) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{E_m} e^{-i(x, z)} \left\{ \int\limits_{E_m} K(z-y) \, u(y) \, dy \right\} dz.$$

Se observă uşor că la infinit funcţia $v(x) = O(|x|^{-m})$ şi, prin urmare, în general ea nu este integrabilă pe E_m. Totodată este evident

că $v \in L_2(E_m)$ şi transformata Fourier a ei se poate defini prin formula

$$(Fv)(x) = \lim_{N \to \infty} \int\limits_{|z|<N} e^{-i(x, z)} \, v(z) \, dz,$$

unde limita se înţelege în sensul convergenţei în $L_2(E_m)$.

Fie $K_{\varepsilon, N}$ nucleul definit prin formula (4.3) şi să notăm

$$v_{\varepsilon, N}(x) = \int\limits_{E_m} K_{\varepsilon, N}(x-y) \, u(y) \, dy.$$

Din definiţia integralei singulare rezultă că

$$v_{\varepsilon, N}(x) \xrightarrow[\varepsilon \to 0, \, N \to \infty]{} v(x);$$

astfel

$$(Fv_{\varepsilon, N})(x) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{E_m} e^{-i(x, z)} \left\{ \int\limits_{E_m} K_{\varepsilon, N}(z-y) \, u(y) \, dy \right\} dz =$$

$$= (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{E_m} u(y) \left\{ \int\limits_{E_m} K_{\varepsilon, N}(z-y) \, e^{-i(x, z)} \, dz \right\} dy.$$

Dacă introducem notaţia $z - y = \xi$ în integrala interioară, obţinem

$$(Fv_{\varepsilon, N})(x) = (2\pi)^{m/2} (FK_{\varepsilon, N})(x) (Fu)(x).$$

După cum s-a arătat în §4, funcţia $(FK_{\varepsilon, N})(x) \to (FK)(x) = (FK)(\Lambda)$, rămînînd mărginită independent de ε şi N. În acest caz are loc relaţia

$$(Fv_{\varepsilon, N})(x) \xrightarrow[\varepsilon \to 0, \, N \to \infty]{} (2\pi)^{m/2} (FK)(\Lambda)(Fu)(x)$$

în sensul convergenţei în $L_2(E_m)$ şi prin urmare

$$(Fv)(x) = (2\pi)^{m/2} (FK)(\Lambda)(Fu)(x). \tag{2}$$

Pentru funcţiile care se anulează în exteriorul unei anumite bile, relaţia (2) dă o nouă reprezentare a integralei singulare, şi anume

$$v(x) = \int\limits_{E_m} K(x-y) \, u(y) \, dy = (F^{-1} \Phi F u)(x), \quad \Phi = (2\pi)^{m/2} FK. \tag{3}$$

Să analizăm operatorul de tipul

$$(Au)(x) = au(x) + \int_{E_m} K(x-y)\,u(y)\,dy;$$

$$a = \text{const}, \quad K(x-y) = r^{-m} f(\Theta); \tag{4}$$

astfel de operatori îi vom numi singulari. Operatorul (4) se poate reprezenta sub forma

$$A = F^{-1}\,\Phi_A F, \tag{5}$$

unde

$$\Phi_A(\Lambda) = a + (2\pi)^{m/2}\,(FK)\,(\Lambda). \tag{6}$$

Funcția $\Phi_A(\Lambda)$ o vom numi simbolul operatorului A. Se observă ușor că $\Phi_A(\Lambda)$ are proprietățile simbolului menționate în § 4 cap. 6. Într-adevăr, dacă

$$(Bu)\,(x) = bu(x) + \int_{E_m} L(x-y)\,u(y)\,dy;\ L(x-y) = r^{-m} g(\Theta),$$

atunci

$$(A+B)\,u(x) = (a+b)\,u(x) + \int_{E_m} [K(x-y) + L(x-y)]\,u(y)\,dy$$

și

$$\Phi_{A+B}(\Lambda) = a + b + (2\pi^{m/2})\,F(K+L)\,(\Lambda) = \Phi_A(\Lambda) + \Phi_B(\Lambda).$$

Mai departe, conform relației (5), avem $B = F^{-1}\,\Phi_B F$, deci $AB = F^{-1}\,\Phi_A F F^{-1}\,\Phi_B F = F^{-1}\,\Phi_A \Phi_B F$; de unde se vede că $\Phi_{AB} = \Phi_A \Phi_B$. Menționăm de asemenea că $BA = F^{-1}\Phi_B \Phi_A F = AB$, deci operatorii singulari de tipul (4) comută. În final, dacă $A = I$, atunci $a = 1$ și $K(x-y) \equiv 0$; în acest caz $\Phi_A = \Phi_I = 1$.

Din relația (5) rezultă imediat următoarea teoremă.

Teorema 7.5.1. *Dacă simbolul unui operator singular este mărginit, atunci însuși operatorul este mărginit în $L_2(E_m)$ și norma sa nu depășește marginea superioară a valorilor simbolului.*

Într-adevăr, fie $|\Phi_A(\Lambda)| \leqslant M = \text{const}$. Din relația (5) avem $Au = F^{-1}\Phi_A Fu$. Avînd în vedere că $\|F\| = \|F^{-1}\| = 1$, rezultă $\|Au\| = \|\Phi Fu\| \leqslant M\,\|Fu\| = M\,\|u\|$ și deci $\|A\| \leqslant M$.

Corolarul 7.5.1. *Dacă caracteristica f a operatorului singular* (4) *aparține lui $L_p(S_1)$ pentru un anumit $p > 1$, atunci acest operator este mărginit în $L_2(E_m)$.*

Să remarcăm că teorema 7.5.1 și corolarul 7.5.1 sînt demonstrate numai pentru operatorii singulari de tipul (4), la care atît coeficientul a, cît și caracteristica f nu depind de polul x.

Teorema 7.5.1 arată că operatorul singular de tipul (4) al cărui simbol este mărginit poate fi prelungit la tot spațiul $L_2(E_m)$ cu păstrarea normei. În cele ce urmează cînd ne vom referi la un operator singular de densitate $u \in L_2(E_m)$ vom înțelege prelungirea lui în sensul menționat aici.

Fie Ω un domeniu arbitrar din E_m și $u \in L_2(\Omega)$. Integrala singulară

$$\int_{\Omega} \frac{f(\Theta)}{r^m} u(y)\,dy, \quad x \in \Omega, \tag{7}$$

o definim astfel: considerăm

$$u_1(y) = \begin{cases} u(y), & y \in \Omega, \\ 0, & y \in \Omega; \end{cases} \quad v_1(x) = \int_{E_m} \frac{f(\Theta)}{r^m}\,u_1(y)\,dy, \quad x \in E_m \tag{8}$$

și vom gîndi integrala (7) ca restricție a funcției $v_1(x)$ la domeniul Ω.

Teorema 7.5.2. *Operatorul singular*

$$(A_\Omega u)\,(x) = au(x) + \int_{\Omega} \frac{f(\Theta)}{r^m}\,u(y)\,dy, \quad x \in \Omega, \tag{9}$$

este mărginit în $L_2(\Omega)$ dacă simbolul lui este mărginit (în particular, dacă $f \in L_p(S_1)$, $p > 1$).

Notăm $\Phi(\Lambda) = a + (FK)(\Lambda)$, unde $K(x-y) = r^{-m} f(\theta)$ și vom numi funcția $\Phi(\Lambda)$, ceea ce nu este pe deplin riguros, simbolul operatorului (9). Folosind notația din (8), pe baza teoremei 7.5.1, obținem

$$\int_{E_m} |v_1(x)|^2\,dx \leqslant M^2 \int_{E_m} |u_1(x)|^2\,dx = M^2 \int_{\Omega} |u(x)|^2\,dx.$$

Mai mult,

$$\int_{\Omega} |v_1(x)|^2\,dx \leqslant M^2 \int_{\Omega} |u(x)|^2\,dx.$$

Observaţie. Se poate da o condiţie suficientă de mărginire a operatorului singular în L_2 în caz mai general. Fie operatorul singular de forma

$$(Au)\ (x) = a_0(x)\, u(x) + \int_{E_m} \frac{f(x, \Theta)}{r_m}\, u(y)\, dy. \tag{10}$$

Să mai presupunem că $f(x, \theta)$ admite dezvoltarea

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(x)\, f_n(\Theta) \tag{11}$$

şi că fiecare din funcţiile f_n satisface condiţia (2.5), adică $\int_{S_1} f_n(\Theta) dS_1 = 0$. Considerînd $f_n(\Theta)$ drept caracteristică a unei anumite integrale singulare, să construim simbolul corespunzător:

$$\Phi_n(\Lambda) = \int_{S_1} \left[\ln \frac{1}{|\cos \gamma|} - \frac{i\pi}{2} \operatorname{sign} \cos \gamma \right] f_n(-\Psi)\, dS_1. \tag{12}$$

Este evident că operatorul (10) este mărginit în $L_2(E_m)$ dacă seria

$$\sup_{x \in E_m} |a_0\,(x)| + \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in E_m} |a_n(x)| \sup_{\Lambda \in S_1} |\Phi_n(\Lambda)| \tag{13}$$

este convergentă. Operatorul (10) nu depăşeşte suma seriei (13). O afirmaţie analoagă are loc dacă se înlocuieşte spaţiul E_m cu orice mulţime măsurabilă $\Omega \subset E_m$.

Să prezentăm un astfel de caz. Notăm cu $\tilde{L}_2(S_1)$ subspaţiul funcţiilor din $L_2(S_1)$ ortogonale unităţii; orice funcţie din $\tilde{L}_2(S_1)$ satisface condiţia (2.5). Să presupunem că funcţiile f_n din dezvoltarea (11) aparţin subspaţiului $L_2(S_1)$ şi formează un sistem ortonormat. Conform celor demonstrate în § 4 avem $\Phi_n(\Lambda) \leqslant C$, unde C este o constantă egală cu

$$\left\{ 2\pi \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} \left| \ln \frac{1}{|\cos \gamma|} - \frac{i\pi}{2} \operatorname{sign} \cos \gamma \right|^2 \sin^{m-2} \gamma \times \right.$$

$$\left. \times \sin^{m-3} \vartheta_2 \cdots \sin \vartheta_{m-2}\, d\gamma\, d\vartheta_2 \cdots d\vartheta_{m-2} \right\}^{1/2}.$$

În aceste condiţii operatorul (10) este mărginit în $L_2(E_m)$, dacă seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x \in E_m} |a_n(x)| \tag{14}$$

este convergentă; norma operatorului (10) nu depăşeşte deci produsul sumei seriei de mai sus cu constanta C.

§ 6. DIFERENŢIEREA INTEGRALELOR CU SINGULARITATE SLABĂ

Fie Ω un domeniu din spaţiul E_m pe care, pentru simplificare, îl presupunem mărginit. Fie integrala cu singularitate slabă

$$w(x) = \int_{\Omega} \frac{\varphi(x, \Theta)}{r^{\lambda}}\, u(y)\, dy; \quad \Theta = \frac{y - x}{r}, \quad x \in \Omega. \tag{1}$$

unde $\lambda \leqslant m - 1$, iar φ, ca funcţie de variabilele independente x şi Θ, este continuu diferenţiabilă în raport cu coordonatele carteziene ale acestor puncte pe $\overline{\Omega} \times S_1$. Dacă $\lambda = m - 1$, atunci prin diferenţierea formală a integralei (1) se obţine o integrală divergentă. Să analizăm acest caz.

Teorema 7.6.1. *Fie* $u \in \operatorname{Lip}_{\alpha}(\Omega)$, $0 < \alpha < 1$, *iar* $\varphi(x, \Theta)$ *cu proprietăţile enumerate mai sus. Fie*

$$w(x) = \int_{\Omega} \frac{\varphi(x, \Theta)}{r^{m-1}}\, u(y)\, dy; \quad x \in \Omega. \tag{2}$$

Atunci derivatele $\partial w / \partial x_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$, *există şi sînt continue în* Ω; *ele se calculează după formula*

$$\frac{\partial w}{\partial x_j} = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\varphi(x, \Theta)}{r^{m-1}} \right] u(y)\, dy - u(x) \int_{S_1} \varphi(x, \Theta) \cos (r, x_j)\, dS_1, \tag{3}$$

în care prima integrală este singulară. Dacă, în afară de aceasta,

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x_j\, \partial x_k} \left[\frac{\varphi(x, \Theta)}{r^{m-1}} \right] \right| \leqslant \frac{C}{r^{m+1}}, \quad C = \text{const} \tag{4}$$

și derivatele (4) *sînt continue pentru* $x \neq y$, *atunci* $\partial w/\partial x_j \in \mathrm{Lip}_\alpha(\overline{\Omega}')$, *unde* $\overline{\Omega}'$ *este un subdomeniu interior arbitrar al lui* Ω.

Avem $w(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} w_\varepsilon(x)$, unde

$$w_\varepsilon(x) = \int_{\Omega \setminus (r<\varepsilon)} \frac{\varphi(x, \Theta)}{r^{m-1}} u(y)\, dy. \tag{5}$$

Conform relației (3.2) avem

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_j} = \int_{\Omega \setminus (r<\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\varphi(x, \Theta)}{r^{m-1}}\right] u(y)\, dy -$$

$$- \int_{r=\varepsilon} \varphi(x, \theta) \cos(r, x_j)\, \varepsilon^{-(m-1)}\, u(y)\, dS_\varepsilon.$$

Dar $\varepsilon^{-(m-1)}\, dS_\varepsilon = dS_1$, iar în membrul al doilea $y = x + \varepsilon\Theta$, $\Theta \in S_1$ și de aceea ultima formulă poate fi reprezentată sub forma

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} = \int_{\Omega \setminus (r<\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\varphi(x, \Theta)}{r^{m-1}}\right] u(y)\, dy -$$

$$- \int_{S_1} \varphi(x, \theta)\, u(x + \varepsilon\theta) \cos(r, x_j)\, dS_1. \tag{6}$$

Să arătăm că pentru $\varepsilon \to 0$, expresia (6) tinde uniform spre membrul din dreapta al formulei (3). Aceasta este evident pentru integrala de suprafață din (6), care tinde uniform spre

$$u(x) \int_{S_1} \varphi(x, \theta) \cos(r, x_j)\, dS_1;$$

rămîne deci de analizat integrala de volum.

Notăm prin $\partial' \varphi/\partial x_j$ derivata lui φ, calculată în ipoteza că r și Θ nu depind de x_j, iar prin $\partial'' \varphi/\partial x_j$ derivata calculată în ipoteza că φ depinde de x_j numai prin intermediul lui r și Θ. Atunci

$$\int_{\Omega \setminus (r<\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\varphi(x, \Theta)}{r^{m-1}}\right] u(y)\, dy = \int_{\Omega \setminus (r<\varepsilon)} \frac{\partial' \varphi(x, \Theta)}{\partial x_j} \frac{1}{r^{m-1}} u(y)\, dy +$$

$$+ \int_{\Omega \setminus (r<\varepsilon)} \frac{\partial^n}{\partial x_j}\left[\frac{\varphi(x, \Theta)}{r^{m-1}}\right] u(y)\, dy. \tag{7}$$

Prima integrală din membrul drept tinde uniform către integrala improprie

$$\int_\Omega \frac{\partial' \varphi(x, \Theta)}{\partial x_j} \frac{1}{r^{m-1}} u(y)\, dy.$$

Nucleul ultimei integrale se poate evident reprezenta sub forma $r^{-m} f(x, \Theta)$. Să arătăm că funcția $f(x, \Theta)$ astfel obținută satisface condiția (2.5). Să numerotăm axele de coordonate carteziene, provizoriu, astfel încît $j = 1$. Dacă apoi introducem coordonatele sferice conform formulei (2.1) cap. 1, atunci numai r și ϑ_1 depind de x_1; celelalte coordonate unghiulare nu depind de x_1. Într-adevăr,

$$\vartheta_{m-1} = \operatorname{arctg} \frac{y_m - x_m}{y_{m-1} - x_{m-1}},\quad \vartheta_{m-2} = \operatorname{arctg} \frac{y_{m-1} - x_{m-1}}{(y_{m-2} - x_{m-2}) \cos \vartheta_{m-1}}, \ldots$$

$$\ldots, \vartheta_2 = \operatorname{arctg} \frac{y_3 - x_3}{(y_2 - x_2) \cos \vartheta_3}.$$

În acest caz,

$$f(x, \theta) = -(m-1)\, \varphi(x, \Theta) \frac{\partial r}{\partial x_1} + r \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta_1} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_1}.$$

În plus, $\dfrac{\partial r}{\partial x_1} = \dfrac{x_1 - y_1}{r} = -\cos \vartheta_1$; diferențiind încă o dată, obținem

$$\sin \vartheta_1 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_1} = \frac{1}{r} - \frac{(x_1 - y_1)^2}{r^3} = \frac{\sin^2 \vartheta_1}{r},$$

de unde $\dfrac{\partial \vartheta_1}{\partial x_1} = r^{-1} \sin \vartheta_1$ și prin urmare

$$f(x, \Theta) = (m-1)\, \varphi \cos \vartheta_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta_1} \sin \vartheta_1.$$

Să calculăm integrala (2.5):

$$\int_{S_1} f(x, \Theta)\, dS_1 = \int_0^{2\pi} d\vartheta_{m-1} \int_0^{\pi} \sin\, \vartheta_{m-2}\, d\vartheta_{m-2} \cdots$$

$$\cdots \int_0^{\pi} \sin^{m-3}\, \vartheta_2\, d\vartheta_2 \int_0^{\pi} \left[(m-1)\, \varphi \cos\, \vartheta_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta_1} \sin\, \vartheta_1 \right] \sin^{m-2}\, \vartheta_1\, d\vartheta_1.$$

Integrala interioară este egală cu

$$\int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} [\sin^{m-1}\, \vartheta_1\, \varphi(x, \Theta)]\, d\vartheta_1 = 0$$

și afirmația noastră este demonstrată.

Cum condiția (2.5) este îndeplinită, a doua integrală din membrul drept al relației (7) converge către integrala singulară

$$\int_{\Omega} \frac{\partial'}{\partial x_j} \left[\frac{\varphi(x, \Theta)}{r^{m-1}} \right] u(y) dy,$$

și, după cum s-a menționat în §2, această convergență este uniformă în $\bar{\Omega}'$, unde Ω' este un subdomeniu arbitrar al lui Ω. Astfel, în $\bar{\Omega}'$ expresia $\partial w_\varepsilon / \partial x_j$ tinde uniform spre expresia din dreapta relației (3). De aici rezultă că $\partial w / \partial x_j$ există și este continuă în Ω; această derivată este dată de formula (3). Prima parte a teoremei este astfel demonstrată; a doua parte a ei este o consecință imediată a teoremei lui Giraud.

Teorema 7.6.2. *Fie funcția $\varphi(\Theta)$ continuă și continuu diferențiabilă în raport cu coordonatele carteziene ale punctului Θ pe S_1 și fie $u \in L_2(\Omega)$, unde Ω este un domeniu mărginit din E_m. Integrala cu singularitate slabă*

$$w(x) = \int_{\Omega} \frac{\varphi(\theta)}{r^{m-1}} u(y)\, dy \tag{8}$$

are derivatele generalizate de ordinul întîi $\partial w / \partial x_j \in L_2(\Omega)$, definite prin formula

$$\frac{\partial w}{\partial x_j} = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\varphi(\Theta)}{r^{m-1}} \right] u(y)\, dy - u(x) \int_{S_1} \varphi(\Theta) \cos\, (r, x_j)\, dS_1 . \tag{9}$$

Să mediem funcția $u(x)$; fie $u_h(x)$ funcția de medie corespunzătoare. Obținem

$$w(x, h) = \int_{\Omega} \frac{\varphi(\Theta)}{r^{m-1}}\, u(y)\, dy. \tag{10}$$

Conform teoremei 7.6.1 derivatele

$$\frac{\partial w(x, h)}{\partial x_j} = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\varphi(\Theta)}{r^{m-1}} \right] u_h(y)\, dy - u_h(x) \int_{S_1} \varphi(\Theta) \cos\, (r, x_j)\, dS_1 \tag{11}$$

există și sînt continue în Ω. Din teorema 7.5.2 rezultă că operatorul din membrul drept al formulei (9) este mărginit în $L_2(\Omega)$; conform teoremei 1.3.2 rezultă că și operatorul integral (8) este mărginit în $L_2(\Omega)$. Pe de altă parte, $u_h(x) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} u(x)$ în metrica lui $L_2(\Omega)$ (teorema 2.2.3) și de aceea $w(x, h) \to w(x)$, iar $\partial w(x, h) / \partial x_j$ converge către membrul din dreapta al formulei (9) în $L_2(\Omega)$. Astfel existența derivatelor generalizate $\partial w / \partial x_j$ și de asemenea formula (9) rezultă din teorema 2.5.1.

Teoremele 7.6.1 și 7.6.2 rămîn adevărate și în cazul unidimensional, dacă se înlocuiește $1/r^{m-1}$ cu $\ln(1/r)$.

Capitolul 8

ECUAȚII ȘI PROBLEME LA LIMITĂ

§ 1. EXPRESIE DIFERENȚIALĂ ȘI ECUAȚIE DIFERENȚIALĂ

În cazul cel mai general o ecuație diferențială cu derivate parțiale cu m variabile independente se poate scrie sub forma

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_m^k}\right) = 0. \qquad (1)$$

Ordinul cel mai înalt k al derivatei funcției necunoscute care intră în (1) se numește *ordinul ecuației diferențiale*. Analog putem scrie forma generală a sistemelor de ecuații diferențiale cu derivate parțiale.

Ne vom ocupa în principal de *ecuații liniare cu derivate parțiale de ordinul al doilea*. Ca și în capitolele precedente, mulțimea valorilor variabilelor $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ le vom considera ca un punct x din spațiul euclidian m-dimensional E_m de coordonate $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

În ecuațiile deduse din probleme fizice variabilele independente sînt de obicei timpul și coordonatele spațiale; pentru acestea vom folosi adesea literele t, x, y, z.

O ecuație diferențială liniară de ordinul al doilea cu funcția necunoscută u în variabilele independente $x_1, x_2, \ldots, x_m$ în cazul general are forma

$$\sum_{j,k=1}^{m} A_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{k=1}^{m} A_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0(x)u = f(x), \qquad (2)$$

unde A_{jk}, A_k, A_0, f sînt funcții de x date.

De fapt, pentru $j \neq k$ ecuația (2) nu conține termeni izolați $A_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}$ și $A_{kj} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}$, ci suma lor $(A_{jk} + A_{kj}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}$. Expresia $(A_{jk} + A_{kj})$ poate fi descompusă aditiv în doi termeni oarecare, dar noi vom presupune întotdeauna că aceștia sînt astfel încît

$$A_{kj}(x) = A_{jk}(x), \qquad (3)$$

și de aceea matricea coeficienților în cazul derivatelor de ordinul al doilea (matricea coeficienților dominanți) este presupusă simetrică.

Această matrice va juca un rol deosebit de important în cele ce urmează.

Partea din stînga ecuației (2) se numește *expresie diferențială de ordinul al doilea*.

Funcția $f(x)$, care se găsește în partea din dreapta ecuației (2), se numește *termenul liber al acesteia*. De asemenea distingem ecuațiile omogene cînd $f(x) \equiv 0$, de cele neomogene cînd $f(x) \not\equiv 0$.

Să analizăm cîteva exemple.

1. Ecuația coardei vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t). \qquad (4)$$

Aici $m = 2$, termenul liber $f(x, t)$ este proporțional cu forța exterioară care acționează în punctul x al coardei la momentul t. Matricea coeficienților dominanți are forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

În cazul mai complex, cînd coarda vibrează în medii cu rezistență proporțională cu viteza, ecuația coardei vibrante se scrie astfel:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t), \quad h = \text{const}. \qquad (6)$$

Matricea coeficienților dominanți are, ca mai înainte, forma (5).

2. Ecuația vibrației membranelor este

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x, y, t). \qquad (7)$$

Matricea coeficienților ei dominanți are forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

3. Pentru ecuația propagării căldurii

$$k \frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = f(x, y, z, t) \qquad (9)$$

matricea coeficienților dominanți este

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

4. Pentru ecuația lui Laplace

$$\Delta u = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f(x) \tag{11}$$

matricea coeficienților dominanți este matricea unitate de ordinul m.

5. Ecuația

$$(1+y)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (1+x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{12}$$

are matricea coeficienților dominanți

$$\begin{pmatrix} 1+y^2 & -xy \\ -xy & 1+x^2 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

§ 2. CLASIFICAREA ECUAȚIILOR DE ORDINUL AL DOILEA

Ecuațiile de ordinul al doilea cu derivate parțiale se clasifică în funcție de proprietățile valorilor proprii ale matricei coeficienților dominanți ai ecuației date. Reamintim că valorile proprii ale matricei

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

sînt rădăcinile ecuațiilor (I este matricea unitate)

$$\mathrm{Det}(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

și că toate valorile proprii ale unei matrici simetrice sînt reale.

Să analizăm ecuația diferențială ceva mai generală decît ecuația (1.2)

$$\sum_{j,k=1}^{m} A_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \Phi\left(x_1, x_2, \dots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right) = 0, \tag{1}$$

unde Φ este o funcție arbitrară de argumentele sale. Să fixăm un punct oarecare x în care coeficienții ecuației (1) sînt definiți și să presupunem că în acest punct matricea coeficienților ei dominanți are α valori proprii pozitive, β — negative și γ — nule; evident, $\alpha + \beta + \gamma = m$. Vom spune în acest caz că ecuația (1) este în punctul considerat x de tipul (α, β, γ). Ecuația (1) este de tipul (α, β, γ) într-o mulțime oarecare de puncte, dacă ea este de tipul (α, β, γ) în fiecare punct al mulțimii date. Evident, dacă în ecuația (1) coeficienții dominanți A_{jk} sînt constanți, atunci ecuația este de același tip în tot spațiul. Dacă se modifică semnele tuturor termenilor ecuației diferențiale, atunci numerele α și β își schimbă între ele locurile și de aceea vom considera tipurile (α, β, γ) și (β, α, γ) identice.

Drept exemplu să examinăm ecuațiile de la punctele 1—5 din paragraful precedent. În exemplele 1—4 coeficienții dominanți se află pe diagonală și valorile lor proprii coincid cu elementele diagonalei principale. De aici se observă imediat că în orice punct al spațiului ecuația coardei este de tipul (1, 1, 0), ecuația membranelor — de tipul (2, 1, 0), ecuația propagării căldurii — de tipul (3, 0, 1), iar ecuația lui Laplace în spațiul m-dimensional — de tipul $(m, 0, 0)$.

Valorile proprii ale matricii (1.13) sînt rădăcinile ecuației

$$\begin{vmatrix} 1+y^2-\lambda & -xy \\ -xy & 1+x^2-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

ele sînt egale cu

$$\lambda_1 = 1 + x^2 + y^2, \quad \lambda_2 = 1.$$

De aici se observă că ecuația (1.12) este de tipul (2, 0, 0) în orice punct (x, y).

Nu este greu de prezentat un exemplu de ecuație al cărui tip este diferit în diferite puncte. De acest tip este *ecuația lui Tricomi*

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{2}$$

Matricea coeficienților ei dominanți

$$\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

are valorile proprii $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = y$ și de aceea ecuația (2) este pentru $y > 0$ de tipul (2, 0, 0), pentru $y < 0$ — de tipul (1, 1, 0), iar pentru $y = 0$ — de tipul (1, 0, 1).

Printre tipurile de ecuații cu derivate parțiale prezentate, trei dintre ele joacă un rol deosebit în fizica-matematică.

A. Tipul $(m, 0, 0) = (0, m, 0)$ se numește *eliptic*. Ecuația (1) aparține, prin urmare, tipului eliptic într-un punct dat, dacă în acest punct toate valorile proprii ale matricii coeficienților dominanți sînt diferite de zero și au același semn.

Cel mai important exemplu de ecuație de tip eliptic îl constituie ecuația lui Laplace. Ecuația (1.12), precum și ecuația lui Tricomi pentru $y > 0$, sînt de tip eliptic.

B. Tipul $(m - 1, 0, 1) = (0, m - 1, 1)$ se numește *parabolic*. Astfel, ecuația (1) este într-un punct dat de tip parabolic, dacă în acel punct matricea coeficienților dominanți are o valoare proprie nulă și toate celelalte — diferite de zero și de același semn.

Cel mai important exemplu de ecuație de tip parabolic îl reprezintă ecuația propagării căldurii, pe care o scriem aici sub forma

$$k\frac{\partial u}{\partial x_m} - \sum_{j=1}^{m-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = f(x). \tag{3}$$

Un caz particular al ecuației (3) îl constituie ecuația (1.9). Ecuația lui Tricomi este pentru $y = 0$ de tip parabolic.

C. Tipul $(m - 1, 1, 0) = (1, m - 1, 0)$ se numește *hiperbolic*. Prin urmare, ecuația (1) este de tip hiperbolic într-un punct dat dacă în acel punct valorile proprii ale matricei coeficienților ei dominanți sînt toate diferite de zero și una dintre ele diferă ca semn de toate celelalte.

Cel mai important exemplu de ecuație de tip hiperbolic îl reprezintă ecuația undelor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} - \sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f(x); \tag{4}$$

ecuația coardei vibrante și ecuația vibrației membranelor sînt cazuri particulare. Ecuația lui Tricomi pentru $y < 0$ este de tip hiperbolic.

Importanța celor trei tipuri de ecuații cu derivate parțiale introduse (eliptic, parabolic și hiperbolic) constă în următoarele. Pe de o parte, toate problemele de fizică cunoscute pînă acum conduc, de regulă, la ecuații de tipurile menționate; pe de altă parte teoria acestor ecuații s-a dezvoltat incomparabil mai mult decît teoria ecuațiilor cu derivate parțiale de alte tipuri.

Ecuațiile de tipul $(\alpha, \beta, 0)$, unde $\alpha \geqslant 2$ și $\beta \geqslant 2$ sînt denumite adesea *ecuații ultrahiperbolice*. Cea mai simplă ecuație ultrahiperbolică are forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} = 0.$$

Vom considera ecuațiile de tip eliptic, parabolic și hiperbolic ca ecuații ale fizicii matematice.

Există destul de multe lucrări consacrate așa-numitelor ecuații de tip „mixt", adică ecuații al căror tip se poate modifica de la un punct la altul. Amănunte cu privire la aceste ecuații pot fi găsite în [44] și [50]. Au apărut o serie de lucrări în care se studiază ecuațiile de tipul $(\alpha, 0, \gamma)$ („ecuații eliptico-parabolice"). Din lucrările publicate în această direcție recomandăm articolul [36].

Dacă ecuația (1) este de un anumit tip (α, β, γ), atunci vom spune că expresia diferențială care se află în membrul stîng al acestei ecuații este de același tip. În particular, se poate vorbi despre expresii diferențiale de tip eliptic, parabolic, hiperbolic.

Clasificarea pe tipuri poate fi extinsă în general și asupra expresiilor diferențiale neliniare de ordinul al doilea; după cum se observă, în acest caz tipul depinde nu numai de punctul spațiului, dar și de funcția care intervine în expresia diferențială.

Fie $u(x)$ o funcție arbitrară. Notăm cu $p_j = \partial u/\partial x_j$, $p_{jk} = \partial^2 u/\partial x_j \partial x_k$. Să analizăm expresia diferențială neliniară

$$F(x, u, p_1, \ldots, p_m, p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{mm}) \tag{5(}$$

și să introducem matricea simetrică

$$A_{jk}(x, u) = \begin{cases} \partial F/\partial p_{ij}, & k = j, \\ \dfrac{1}{2}\,\partial F/\partial p_{jk}, & k \neq j. \end{cases} \tag{6}$$

Vom spune că în punctul x, pentru funcția u, expresia diferențială (5) este de tipul (α, β, γ) dacă matricea mărimilor (6) are α valori proprii pozitive, β — negative și γ — nule. Ca și în cazul liniar, tipurile (α, β, γ) și (β, α, γ) nu se disting între ele. Mai departe, expresia (5) se numește de tip eliptic, parabolic sau hiperbolic în punctul x, pentru funcția u, dacă (α, β, γ) coincide respectiv cu $(m, 0, 0)$, $(m - 1, 0, 1)$ sau $(m - 1, 1, 0)$.

Noțiunea de tip se extinde, evident, și la ecuațiile de forma

$$F(x, u, p_1, \ldots, p_m, p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{mm}) = 0 \tag{7}$$

cu deosebirea că tipul ecuației se definește nu pe funcții arbitrare, ci numai pe soluții ale acestei ecuații. În particular, ecuația (7) este de tip eliptic, parabolic sau hiperbolic în punctul x, pentru o anumită soluție u, dacă expresia diferențială F este de tip eliptic, parabolic sau hiperbolic în punctul x și pentru funcția u.

Ca exemplu să analizăm *ecuația diferențială a suprafeței minimale*:

$$\left[1+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-2\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}+\left[1+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=0, \tag{8}$$

ce joacă un rol important în geometrie. În cazul dat matricea (6) are forma

$$\begin{pmatrix} 1+p_2^2, & -p_1p_2 \\ -p_1p_2, & 1+p_1^2 \end{pmatrix}; \quad p_1=\frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad p_2=\frac{\partial u}{\partial x_2};$$

valorile sale proprii $1+p_1^2+p_2^2$ și 1 sînt pozitive. De aici rezultă că în orice punct al planului E_2 și pentru orice soluție a sa ecuația suprafeței minimale este de tip eliptic.

Drept al doilea exemplu să considerăm ecuația lui Monge-Ampère în plan

$$rt-s^2=f(x_1, x_2), \tag{9}$$

unde, conform notațiilor din geometria diferențială,

$$r=p_{11}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \quad s=p_{12}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad t=p_{22}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Matricea (6) pentru ecuația (9) are forma

$$\begin{pmatrix} t & -s \\ -s & r \end{pmatrix};$$

valorile sale proprii sînt rădăcinile ecuației $\lambda^2-(r+t)\lambda+rt-s^2=0$, sau $\lambda^2-(r+t)\lambda+f(x_1, x_2)=0$. De aici rezultă că în orice punct (x_1, x_2) și pentru orice soluție a ei ecuația lui Monge-Ampère este de tip eliptic dacă $f(x_1, x_2)>0$, de tip parabolic dacă $f(x_1, x_2)=0$ și, în sfîrșit, de tip hiperbolic dacă $f(x_1, x_2)<0$.

§ 3. CONDIȚII ȘI PROBLEME LA LIMITĂ

Pentru descrierea completă a unei probleme fizice nu ne putem mărgini numai la ecuațiile diferențiale; este necesar să se adauge anumite relații suplimentare, care să reflecte caracterul așa-numitelor condiții *la limită sau la frontieră*. Să clarificăm cele spuse pe exemple.

Oscilațiile coardei vibrante sînt descrise de ecuația diferențială

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x, t). \tag{1}$$

Să presupunem că l este lungimea coardei ce ocupă în starea de echilibru segmentul $[0, l]$ al axei Ox. Presupunem totodată că la momentul $t=0$ coarda a fost scoasă din starea de echilibru și a început să oscileze. Problema constă în a se studia abaterea $u(x, t)$ a unui punct oarecare $x\in[0, l]$ al coardei la momentul $t>0$. Altfel spus, funcția $u(x, t)$, care satisface ecuația (1), trebuie să fie definită în planul variabilelor x și t din domeniul reprezentat în fig. 6. Frontiera acestui domeniu este formată din segmentul $[0, l]$ al axei Ox și din cele două semidrepte $x=0$, $t>0$ și $x=l$, $t>0$.

Singurele date din ecuația diferențială (1) sînt: mărimea a^2, determinată de proprietățile fizice ale coardei (de densitatea și tensiunea din ea) și funcția $f(x, t)$, care caracterizează forța exterioară ce acționează la momentul t în punctul x al coardei. Ecuația (1) nu conține însă, de exemplu, nici o informație despre modul în care coarda a fost scoasă din starea de echilibru sau despre situațiile în care se pot găsi capetele coardei; acestea pot fi fixe, rigide sau libere; se poate întîmpla ca extremitățile coardei să nu fie fixe, ci posibilitățile de deplasare să fie constrînse de anumite restricții. Informațiile respective trebuie să fie formulate separat.

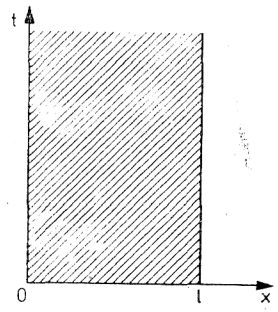

Fig. 6

Să presupunem că în punctul x al coardei ($0\leqslant x\leqslant l$) se cunoaște: deplasarea inițială $\varphi_0(x)$ și viteza inițială $\varphi_1(x)$. Atunci funcția căutată $u(x, t)$ trebuie să satisfacă relațiile

$$u\Big|_{t=0}=\varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l. \tag{2}$$

Să presupunem de asemenea că se cunoaște modul de deplasare al capetelor coardei: fie că pentru orice $t\geqslant 0$, $\Psi_1(t)$ și $\Psi_2(t)$ reprezintă

respectiv deplasările capătului stîng și drept. Deci trebuie îndeplinite relațiile

$$u\|_{x=0} = \Psi_1(t),\ u|_{x=l} = \Psi_2(t). \tag{3}$$

Nu este necesar să se impună condițiile (3) dacă coarda este nemărginită, adică dacă în starea de echilibru ea coincide cu toată axa Ox. Condițiile suplimentare (2) și (3) trebuie îndeplinite pe dreptele $t = 0$, $x = 0$, adică pe frontiera domeniului (vezi fig. 6) în care trebuie să fie definită funcția $u(x, t)$. Din această cauză condițiile menționate se numesc condiții *la frontieră* sau *la limită*.

Menționăm că condițiile (2) și (3) nu sînt complet independente: dacă se cere ca funcția căutată $u(x, t)$ să fie continuă nu numai în interiorul, dar și pe frontiera domeniului său de definiție, atunci este necesar să avem

$$\varphi_0(0) = \Psi_1(0),\ \varphi_0(l) = \Psi_2(0). \tag{4}$$

Relațiile (4) devin astfel *condiții de racordare*. Ele decurg din cerința ca deplasarea capetelor coardei să fie continuă la momentul inițial.

Dacă se cere ca pe frontiera domeniului (vezi fig. 6) unele din derivatele funcției $u(x, t)$ să fie și ele continue, atunci pot apare noi condiții de racordare. Astfel, dacă se cere ca derivatele de ordinul ntîi să fie continue, atunci este necesar ca

$$\varphi_1(0) = \Psi_1'(0),\ \varphi_1(l) = \Psi_2'(l); \tag{4a}$$

dacă se cere continuitatea derivatelor de ordinul al doilea, atunci avem condițiile

$$\Psi_1''(0) - a^2\varphi_0''(0) = f(0, 0),\ \Psi_2''(0) - a^2\varphi_0''(l) = f(l, 0). \tag{4b}$$

Mai jos (cap. 21) se va arăta că în cazul unor restricții destul de slabe asupra datelor ecuația (1) admite o soluție și numai una care satisface condițiile inițiale (2) și condițiile la limită (3). Aceasta înseamnă că ecuațiile (1)—(3) conțin toate informațiile necesare pentru studierea fenomenului vibrației coardei (soluția este unică) și nu conțin informații redundante, contradictorii (soluția există).

Să analizăm încă un exemplu. Să considerăm un corp oarecare omogen, izotop, care ocupă într-un spațiu tridimensional de coordonate x_1, x_2, x_3 domeniul Ω, mărginit de suprafața Γ. Să presupunem că în acest corp sînt distribuite surse de căldură de intensitate $F(x_1, x_2, x_3)$ independente de timp. Aceasta înseamnă că în orice subdomeniu $\Omega' \subset \Omega$, în orice interval de timp δt, se produce o cantitate de căldură egală cu

$$\delta t \int_{\Omega'} F(x)\mathrm{d}x.$$

Să presupunem că în corpul respectiv s-a stabilit o distribuție staționară a temperaturilor, adică independentă de timp. Atunci temperatura u în punctul $x = (x_1, x_2, x_3)$ satisface ecuația neomogenă a lui Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = -f(x), \tag{5}$$

unde funcția $f(x)$ diferă de $F(x)$ numai printr-un factor constant. Ecuația diferențială (5) singură nu este suficientă pentru definirea completă a distribuției de temperatură în corpul Ω; acest lucru se vede clar și din faptul că ecuația (5) are o infinitate de soluții. Este necesară o informație suplimentară. Ea poate fi obținută, de exemplu, astfel. Suprafața Γ a corpului considerat este accesibilă observației și în orice punct al său se poate măsura temperatura. Să presupunem că s-a măsurat temperatura în toate punctele suprafeței Γ și că în punctul $x \in \Gamma$ temperatura u este egală cu $\varphi(x)$. Atunci obținem condiția la limită suplimentară

$$u|_\Gamma = \varphi(x),\quad x \in \Gamma. \tag{6}$$

În cele ce urmează se va arăta că problemele (5)—(6) au, în condiții destul de largi, o soluție și numai una.

Într-un mediu neomogen și neizotrop distribuția staționară a temperaturii se descrie printr-o ecuație mai generală de forma

$$-\sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(x), \tag{7}$$

care, la fel ca și ecuația (5), este eliptică. Problema integrării ecuației (7) (în particular, ecuația lui Laplace (5)), în cazul condițiilor la limită (6) se numește *problema Dirichlet*.

Informația suplimentară pentru ecuația (7) poate fi descrisă prin condiții la limită diferite de condițiile (6). Astfel, dacă se știe că în punctul $x \in \Gamma$ intensitatea fluxului caloric este dată de funcția $\Psi_1(x)$, atunci

$$\left[\sum_{j,k=1}^{3} A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu, x_j)\right]_\Gamma = \Psi(x), \tag{8}$$

unde $\Psi(x)$ diferă de $\Psi_1(x)$ numai printr-un factor constant arbitrar, iar ν este normala exterioară la suprafața Γ. Pentru ecuația lui Laplace $A_{jk} = \delta_{jk}$ și condiția la limită (8) capătă forma

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma = \Psi(x). \tag{9}$$

Problema (7)—(8) (în particular, problema (5), (9)) se numește *problema Neumann*.

Problemele Dirichlet și Neumann se pot formula nu numai în spațiul tridimensional, dar și în orice spațiu m-dimensional.

Să prezentăm acum formularea generală a noțiunilor de condiții la limită și probleme la limită. Fie dată ecuația diferențială cu derivate parțiale oarecare

$$L(u) = f(x). \tag{10}$$

Vom considera că soluția acestei ecuații este definită și are sens pentru un anumit domeniu Ω din spațiul E_m; notăm frontiera acestui domeniu cu Γ. Pe toată frontiera Γ sau pe o anumită porțiune a sa se dau valorile uneia sau a mai multor expresii diferențiale ale funcției căutate

$$G_k u|_\Gamma = \varphi_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, l. \tag{11}$$

Relațiile (11) se numesc *condiții la limită*, iar problema cu privire la integrarea ecuației diferențiale (10) în cazul condițiilor la limită (11) se numește *problemă la limită*.

§ 4. PROBLEMA CAUCHY

Pentru ecuația (1.2) problema Cauchy se formulează în modul următor. Fie dată în spațiul variabilelor $x_1, x_2, \ldots, x_m$ o suprafață netedă Γ. Fiecărui punct $x \in \Gamma$ i se asociază o direcție λ netangentă la Γ. Se cere să se găsească, într-o vecinătate (unilaterală sau bilaterală) a suprafeței Γ, soluția ecuației (1.2) care satisface așa-numitele *condiții Cauchy*

$$u\Big|_\Gamma = \varphi_0(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right|_\Gamma = \varphi_1(x). \tag{1}$$

Aici $\varphi_0(x)$ și $\varphi_1(x)$ sînt funcții date pe Γ; vom considera că $\varphi_1(x)$ este continuă, iar $\varphi_0(x)$ este o funcție continuu diferențiabilă.

Funcțiile $\varphi_0(x)$ și $\varphi_1(x)$ se numesc *date Cauchy*, iar Γ — *suprafața care poartă datele Cauchy* sau, simplu, *suprafață Cauchy*.

Menționăm că condițiile la limită (3.2) sînt condiții Cauchy pentru ecuația coardei vibrante; segmentul $[0, l]$ de pe axa Ox joacă rolul suprafeței Cauchy.

Față de problemele la limită analizate în §3, problema Cauchy se deosebește prin aceea că aici nu se indică dinainte domeniul pe care soluția căutată trebuie să fie definită. Cu toate acestea vom considera problema Cauchy ca una dintre problemele la limită.

Pentru cele ce urmează se dovedește utilă următoarea remarcă: cunoscînd condițiile Cauchy (1), se pot găsi valorile tuturor derivatelor de ordinul întîi ale funcției căutate pe suprafața Cauchy Γ (fig. 7).

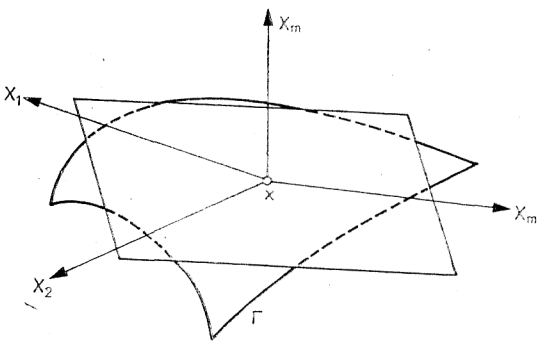

Fig. 7

Pentru demonstrație luăm pe Γ un punct arbitrar x și construim în el *un sistem local de coordonate* $X_1, X_2, \ldots, X_m$. Vom considera acel sistem de coordonate carteziene cu originea în punctul x, cu axele $X_1, X_2, \ldots, X_{m-1}$ situate în planul $(m-1)$-dimensional, tangent la Γ în punctul x și cu axa X_m orientată după normala la Γ în punctul x (vezi fig. 7). Cunoscînd valoarea funcției $u = \varphi_0(x)$ pe Γ, găsim imediat derivatele în raport cu $X_1, X_2, \ldots, X_{m-1}$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial X_k}\right|_\Gamma = \frac{\partial \varphi_0}{\partial X_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1;$$

apoi,

$$\varphi_1(x) = \frac{\partial u}{\partial \lambda} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial X_k} \cos(\lambda, X_k).$$

Unghiul (λ_1, X_m) este diferit de un unghi drept deoarece direcția λ nu este tangentă la Γ. Astfel, $\cos(\lambda, X_m) \neq 0$ și prin urmare egalitatea următoare dă și valoarea ultimei derivate parțiale:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial X_m}\right|_\Gamma = \frac{1}{\cos(\lambda, X_m)} \left[\varphi_1(x) - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial \varphi_0}{\partial X_k} \cos(\lambda, X_k) \right].$$

14 — c. 775

Cunoscînd derivatele în sistemul local de coordonate, găsim valoarea derivatelor în sistemul de coordonate $x_1, x_2, \ldots, x_m$ după formula

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|_\Gamma = \sum_{j=1}^{m} \left.\frac{\partial u}{\partial X_j}\right|_\Gamma \cos(X_j, x_k).$$

Problema Cauchy se poate formula pentru ecuații mult mai generale decît (1.2), precum și pentru sisteme de ecuații cu derivate parțiale.

Să schimbăm întrucîtva notațiile; fie $(m+1)$ numărul variabilelor independente; notăm una dintre variabile cu t, iar pe celelalte cu $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Mulțimea variabilelor $(x_1, \ldots, x_m)$ o vom considera ca un punct $x \in E_m$. Să analizăm sistemul de ecuații cu derivate parțiale, în general, neliniar

$$\frac{\partial^{n_j} u_j}{\partial t^{n_j}} = F_j\left(t, x, u_1, \ldots, u_N, \ldots, \frac{\partial^{\nu_k}}{\partial t^{\nu_k}} D_x^{(\alpha^{(k)})} u_k, \ldots\right); \qquad (2)$$

care verifică condiția că $\nu_k < n_j$ și $\nu_k + |\alpha^{(k)}| \leqslant n_j$ pentru orice j. Se observă ușor că un sistem oarecare de ecuații cu derivate parțiale nu poate fi adus la forma (2). Problema Cauchy pentru sistemul (2) poate fi formulată în modul următor: să se găsească funcțiile $u_1(t, x), \ldots$ $\ldots, u_N(t, x)$ care, pentru valori ale lui t suficient de apropiate de zero, satisfac sistemul (2), iar pentru $t = 0$ satisfac condițiile inițiale

$$\frac{\partial^k u_j}{\partial t^k} = \varphi_{jk}(x); \quad j = 1, 2, \ldots, N; \quad k = 0, 1, \ldots, n_j - 1. \qquad (3)$$

Vom spune că funcția $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_s)$ de variabilele complexe $y_1, y_2, \ldots, y_s$ este analitică în vecinătatea valorilor $y_k = y_k^{(0)}$, $k = 1, 2, \ldots, s$, dacă funcția Φ admite dezvoltarea în serie de puteri

$$\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_s) = \sum_{|\gamma|=0}^{\infty} A_\gamma (y - y^{(0)})^\gamma, \qquad (4)$$

convergentă cînd diferența $y_k - y_k^{(0)}$ este suficient de mică în modul. În formula (4) γ este un multiindice de dimensiune s, iar y și $y^{(0)}$ sînt vectori cu s componente $(y_1, y_2, \ldots, y_s)$, respectiv $(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_s^{(0)})$.

Are loc următoarea teoremă. *Fie funcțiile inițiale $\varphi_{jk}(x)$ analitice în vecinătatea unui punct oarecare $x^{(0)} \in E_m$, $x(0) = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})$ și funcțiile F_j analitice în vecinătatea valorilor*

$$t = 0, \quad x = x^{(0)}, \quad u_k = \varphi_{0k}(x^{(0)}) \ldots \frac{\partial^{\nu_k}}{\partial t^{\nu_k}} D_x^{\alpha^{(k)}} u_k = D_x^{\alpha^k} \varphi_{k\nu^{(k)}}(x_0).$$

Atunci problema Cauchy corespunzătoare sistemului (2) *pentru valorile inițiale* (3) *are o soluție și numai una, analitică în raport cu t, $x_1, \ldots, x_m$ în vecinătatea valorilor $t = 0$, $x_1 = x_1^{(0)}, \ldots, x_m = x_m^{(0)}$.*

Afirmațiile cu privire la existența soluției problemei Cauchy formulată mai sus, cu privire la analiticitatea acestei soluții și la unicitatea ei în clasa funcțiilor analitice constituie conținutul teoremei clasice *Cauchy-Kovalevskaia*. Afirmația despre unicitatea soluțiilor problemelor (2)—(4) în clasa funcțiilor neanalitice dar suficient de netede a fost demonstrată de Holmgren. O demonstrație destul de completă a teoremei Cauchy-Kovalevskaia și Holmgren se găsește în [9]. Pentru sistemele liniare de forma (1.2) teorema Cauchy-Kovalevskaia este demonstrată în [38].

§ 5. PROBLEME DE EXISTENȚĂ, UNICITATE ȘI CORECTITUDINE PENTRU PROBLEME LA LIMITĂ

Să presupunem că s-a formulat o anumită problemă la limită. A rezolva această problemă înseamnă a găsi toate funcțiile care satisfac ecuația diferențială dată și condițiile la limită date. De obicei funcției căutate i se mai impun și alte restricții cu caracter general, care dau adesea posibilitatea să se analizeze acea funcție ca element al unui anumit spațiu funcțional pe care să-l notăm cu B_1. Astfel, formulînd problema Dirichlet pentru ecuația lui Laplace, se poate cere ca funcția căutată să fie continuă în domeniul închis $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$; în acest caz funcția căutată, dacă există, este un element din spațiul $C(\bar{\Omega})$. Se pot impune funcției căutate și alte restricții, de exemplu, se poate cere ca integralele

$$\int_\Omega u^2 \mathrm{d}x, \quad \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 \mathrm{d}x = \int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 \mathrm{d}x$$

să fie finite. În acest caz funcția căutată poate fi considerată ca element din spațiul $W_2^{(1)}(\Omega)$.

Restricțiile impuse funcției căutate presupun impunerea unor restricții funcțiilor din membrul drept al ecuației diferențiale și din

condițiile la limită. De obicei în astfel de cazuri se arată că ansamblul acestora poate fi considerat ca un element al unui alt spațiu funcțional B_2. În multe cazuri interesante spațiile B_1 și B_2 sînt spații Banach.

Să analizăm cazul în care expresiile diferențiale ce apar în ecuația diferențială ca și în condițiile la limită sînt liniare. Ansamblul acestor expresii diferențiale generează un operator liniar oarecare $\mathfrak{U}$, ce acționează din spațiul B_1 în spațiul B_2 și transformă funcția căutată $u(x)$ în ansamblul membrilor din dreapta ai ecuației diferențiale și a condițiilor la limită. Notînd acest ansamblu cu Φ, problema noastră la limită se poate scrie sub forma

$$\mathfrak{U}u = \Phi. \tag{1}$$

Operatorul $\mathfrak{U}$ se va numi *operatorul problemei la limită date*.

Acum se poate spune că a rezolva o problemă la limită înseamnă a găsi toate elementele spațiului B_1, care se transformă prin operatorul $\mathfrak{U}$ într-un element dat $\Phi \in B_2$.

De obicei se caută să se impună astfel de condiții la frontieră încît problema la limită să aibă o soluție și numai una. Aceasta presupune în fiecare caz demonstrarea teoremelor de existență și unicitate. Teorema de unicitate este echivalentă cu cerința ca operatorul $\mathfrak{U}^{-1}$, inversul operatorului $\mathfrak{U}$, să existe, iar teorema de existență corespunde cerinței ca domeniul valorilor operatorului $\mathfrak{U}$ să coincidă cu spațiul B_2. Dacă sînt adevărate ambele teoreme — de unicitate și de existență — atunci operatorul $\mathfrak{U}^{-1}$ există și este definit pe tot spațiul B_2.

În cazul rezolvării problemelor la limită un rol important — în afara problemelor de existență și unicitate a soluției — îl joacă și așa-numita *corectitudine* a problemei la limită. La ideea de corectitudine se ajunge ușor cu ajutorul unor argumente fizice simple. La baza definirii mărimilor fizice stă în cele din urmă procesul de măsurare care presupune întotdeauna o oarecare eroare. În particular și elementul Φ din ecuația (1) — ansamblul datelor problemei la limită — se definește cu eroare. Se naște întrebarea: cum se reflectă eroarea din datele problemei la limită în soluția ei? În legătură cu această întrebare avem următoarea definiție.

Problema la limită se numește *corectă pentru perechea de spații Banach B_1 și B_2, dacă soluția problemei la limită este unică în B_1 și există pentru orice date din B_2 și dacă în plus la o perturbație suficient de mică a datelor în norma lui B_2 corespunde o mică perturbație a soluției în norma lui B_1.*

Teorema 8.5.1. *Pentru ca problema liniară* (1) *să fie corectă pentru perechea de spații Banach* (B_1, B_2), *este necesar și suficient*

ca să existe operatorul $R = A^{-1}$, ce acționează din B_2 în B_1, astfel încît $D(R) = B_2$ și R să fie operator din B_2 în B_1 mărginit.

Necesitatea. Dacă problema (1) este corectă, atunci soluția sa există pentru orice $\Phi \in B_2$ și este unică. Unicitatea soluției înseamnă existența operatorului $R = A^{-1}$, iar existența soluției pentru orice $\Phi \in B_2$ înseamnă că operatorul R este definit pe tot spațiul B_2.

Să trecem acum de la elementul Φ la elementul $\Phi + \varphi$, unde $\varphi \in B_2$ și fie $U + u$ soluția modificată a problemei (1). Atunci $A(U + u) = \Phi + \varphi$ și deoarece A este un operator liniar, atunci $Au = \varphi$. Problema (1) este prin ipoteză corectă, de aceea pentru $\varepsilon > 0$ dat, există $\delta > 0$ astfel încît pentru $\|\varphi\| < \varepsilon$ să avem $\|u\| = \|R\varphi\| < \delta$. Pentru ε fixat, fie δ corespunzător lui. Dacă $\psi \in B_2$ și $\|\psi\| = 1$, atunci $\left\|\frac{\varepsilon}{2}\psi\right\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ și, prin urmare, $\left\|R\frac{\varepsilon}{2}\psi\right\| = \frac{\varepsilon}{2}\|R\psi\| < \delta$, deci $\|R\psi\| < 2\delta/\varepsilon$, $\|\psi\| = 1$, ceea ce înseamnă că $\|R\| \leqslant 2\delta/\varepsilon$. Operatorul R este deci mărginit.

Suficiența. Dacă operatorul R există, atunci problema (1) are cel mult o soluție. Dacă $D(R) = B_2$, atunci problema (1) este rezolvabilă pentru orice $\Phi \in B_2$. În final, dacă R este un operator mărginit și $\|\varphi\|_{B_2} < \varepsilon$, atunci $\|u\|_{B_1} = \|R\varphi\|_{B_1} < \delta$ unde $\delta = 2\|R\|$.

Este important de subliniat că corectitudinea sau necorectitudinea problemei depinde de spațiile B_1 și B_2; una și aceeași problemă poate fi corectă pentru o anumită pereche de spații și necorectă în altă pereche.

Una dintre cele mai simple probleme necorecte este aflarea soluției ecuației

$$Tu = f, \tag{2}$$

unde T este un operator compact ce acționează din spațiul Banach infinit-dimensional X în spațiul Banach infinit-dimensional Y. Un caz particular al ecuației (2) îl reprezintă așa-numita *ecuație integrală Fredholm de prima speță*.

$$\int_\Omega K(x, y)\, u(y)\mathrm{d}y = f(x),$$

unde $K(x, y)$ este nucleu de tip Fredholm.

Dacă problema (2) ar fi corectă, atunci ar exista un operator mărginit T^{-1} astfel încît operatorul identic $I = T^{-1}T$ să fie compact în spațiul infinit-dimensional X. Problema (2) poate deveni însă corectă dacă perechea de spații X, Y este înlocuită cu alta în care operatorul T nu mai este compact. Să lămurim acest lucru pe următorul exemplu.

Să presupunem x și y puncte ale unei mulțimi măsurabile $D \subset E_m$ și $K(x, y)$ un nucleu real, simetric de pătrat integrabil pentru care zero nu este valoare proprie. În ecuația integrală de prima speță

$$K(\varphi) = \int_D K(x, y)\,\varphi(y)\mathrm{d}y = f(x) \qquad (*)$$

operatorul K este compact în $L_2(D)$. Se știe că ecuația (*) are cel mult o soluție care există atunci și numai atunci cînd seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{-2}(f, \varphi_n)^2; \quad (f, \varphi_n) = \int_D f(x)\,\varphi_n(x)\mathrm{d}x$$

converge și unde σ_n și φ_n sînt respectiv valori proprii și funcții proprii ale operatorului K. Dacă seria de mai sus este convergentă, atunci soluția ecuației (*) are forma

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{-1}(f, \varphi_n)\,\varphi_n(x).$$

Fie acum $X_1 = L_2(D)$, iar drept Y_1 să luăm spațiul Hilbert al funcțiilor pentru care norma

$$\|f\|_{Y_1} = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{-2}(f, \varphi_n)^2\right\}^{1/2}$$

este finită. Operatorul K transformă spațiul X_1 pe Y_1 biunivoc și izometric, astfel că $\|\varphi\|_{X_1} = \|K\varphi\|_{Y_1}$. De aici rezultă că operatorul invers K^{-1} există și transformă spațiul Y_1 pe X_1 biunivoc și, de asemenea, izometric și $\|K^{-1}\|_{Y_1 \to X_1} = 1$.

Conform teoremei 8.5.1 problema (2) este corectă pentru perechea de spații (X_1, Y_1).

Nu este greu să se indice o clasă simplă și importantă de probleme corecte. Fie A un operator pozitiv definit într-un spațiu Hilbert H. Să analizăm ecuația

$$Au = f. \qquad (3)$$

Să construim spațiul energetic H_A al operatorului A și să căutăm soluția generalizată a ecuației (3), adică un element al spațiului H_A care satisface identitatea

$$[u, \eta]_A = (f, \eta), \quad \forall \eta \in H_A. \qquad (4)$$

Această soluție există și este unică; prin urmare există și operatorul $R = A^{-1}$, ce acționează din H în H_A și este definit pe tot spațiul H. Fie $B_1 = H_A$, $B_2 = H$.

Să arătăm că operatorul R este mărginit. Fie u soluția generalizată a problemei (3). În identitatea (4) punînd $\eta = u$, obținem

$$|u|_A^2 = (f, u) \leqslant \|f\| \cdot \|u\|.$$

Fie γ^2 marginea inferioară a operatorului A. Atunci $\|u\| \leqslant \gamma^{-1}|u|$. Înlocuind aceasta în inegalitatea precedentă, obținem inegalitatea $|u|_A = |Rf|_A \leqslant 1/\gamma\|f\|$. Aceasta înseamnă că $\|R\|_{H \to H_A} \leqslant 1/\gamma$ și problema (3) este corectă în cazul operatorului A pozitiv definit pentru perechea de spații (H_A, H).

Prezentăm două exemple de probleme la limită necorecte. Primul exemplu aparține lui Hadamard, care a introdus pentru prima dată noțiunea de corectitudine a problemei la limită.

1. Să analizăm ecuația lui Laplace în plan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \qquad (5)$$

Să luăm ca suprafață Γ axa Ox și fie date pe ea datele Cauchy. Vecinătatea în care vom căuta soluția va fi banda $0 < y < \delta$, unde δ este un număr pozitiv arbitrar; această bandă o notăm cu Ω. În particular, o direcție λ netangentă la Γ este Oy. Să admitem condițiile Cauchy:

$$u|_{y=0} = \varphi(x) \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad -\infty < x < \infty. \qquad (6)$$

A da ansamblul datelor este echivalent cu a da unica funcție $\varphi(x)$, pe care o vom presupune continuă și mărginită pe toată axa. Atunci această funcție poate fi considerată ca element al spațiului $C(-\infty, +\infty)$, care în cazul dat joacă rolul spațiului B_2. Drept B_1 luăm spațiul $C(\Omega)$ al funcțiilor continue și mărginite în banda Ω. Drept domeniu de definiție al operatorului problemei la limită (5) — (6) luăm mulțimea funcțiilor din $C(\Omega)$ avînd derivatele] de ordinul al doilea continue și satisfăcînd condiția $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$.

Să arătăm că pentru perechea de spații (B_1, B_2) problema (5) — (6) este necorectă.

Se poate arăta unicitatea soluției acestei probleme. De aici rezultă ușor că funcția $\varphi(x) \equiv 0$ corespunde soluției $u \equiv 0$. Să dăm acum funcției $\varphi(x) \equiv 0$ o mică perturbație (în norma spațiului B_2) și să analizăm problema Cauchy pentru ecuația (2) cu datele Cauchy

$$u|_{y=0} = \frac{\cos nx}{n}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \qquad (7)$$

unde n este un număr natural suficient de mare.

Soluția noii probleme este $u(x, y) = \dfrac{\cos nx \operatorname{ch} ny}{n}$, ceea ce se verifică ușor prin înlocuirea în ecuațiile (5) și (7). Evident,

$$\|\varphi\|_{B_2} = \left\| \frac{\cos nx}{n} \right\|_{B_2} = \max_{-\infty<x<\infty} \left| \frac{\cos nx}{n} \right| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Totodată,

$$\|u\|_{B_1} = \max_{\substack{-\infty<x<\infty \\ 0\leqslant y\leqslant\delta}} \left| \frac{\cos nx \operatorname{ch} ny}{n} \right| = \frac{\operatorname{ch} n\delta}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Astfel, oricît de mică ar fi perturbația datelor (în norma lui B_2), putem găsi o variație a soluției oricît de mare (în norma lui B_1). Aceasta înseamnă că problema Cauchy pentru ecuația lui Laplace este necorectă în perechea de spații considerată de noi.

2. Să analizăm ecuația hiperbolică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = 0. \tag{8}$$

Menționăm că ecuația (8) se transformă în ecuația omogenă a coardei vibrante prin schimbarea de variabile independente $x_1 = x + at$, $x_2 = x - at$.

Să formulăm problema Dirichlet pentru ecuația (8) în pătratul $\Omega = \{x : 0 < x_1, x_2 < 1\}$. Fie Γ conturul pătratului. Condițiile pe Γ le presupunem de forma

$$u|_{x_1=1} = \varphi_1(x_2), \quad u|_{x_2=0} = \psi_1(x_1),$$
$$u|_{x_1=1} = \varphi_2(x_2), \quad u|_{x_2=1} = \psi_2(x_1). \tag{9}$$

Drept B_1 și B_2 luăm spațiile $C(\overline{\Omega})$, respectiv $C(\Gamma)$. Pentru ca soluția să fie continuă trebuie îndeplinite condițiile de racordare.

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0), \quad \varphi_2(0) = \psi_1(1),$$
$$\varphi_1(1) = \psi_2(0), \quad \varphi_2(1) = \psi_2(1). \tag{10}$$

Problema (8) —(9) este nerezolvabilă pentru funcțiile continue arbitrare date (9). Pentru a ne convinge de aceasta, să căutăm soluția generală a ecuației (8). Aducînd ecuația la forma $\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_2}\right) = 0$, se vede că $\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = f(x_2)$, unde f este arbitrară. Apoi integrînd în raport cu x_2, obținem

$$u(x_1, x_2) = F_1(x_1) + F_2(x_2), \quad F_2'(x_2) = f(x_2),$$

unde F_1 și F_2 sînt funcții arbitrare. Primele două condiții din (9) pot fi satisfăcute

$$F_1(0) + F_2(x_2) = \varphi_1(x_2),$$
$$F_1(x_1) + F_2(0) = \psi_1(x_1).$$

Una din constantele $F_1(0)$ și $F_2(0)$ rămîne, evident, arbitrară. Punem $F_2(0) = 0$, atunci avem

$$F_1(x_1) = \psi_1(x_1), \quad F_2(x_2) = \varphi_1(x_2) - \psi_1(0).$$

Soluția este complet determinată, egalitatea $F_2(0) = 0$ rezultînd din prima egalitate (10). Este clar că îndeplinirea celorlalte condiții la limită din (9) nu este posibilă dacă funcțiile φ_2 și ψ_2 sînt arbitrare.

Din cele de mai sus rezultă că problema (8) — (9) pentru perechea de spații $C(\overline{\Omega})$ și $C(\Gamma)$ nu este corect pusă.

Capitolul 9

CARACTERISTICE. FORMA CANONICĂ. FORMULELE LUI GREEN

§ 1. TRANSFORMAREA VARIABILELOR INDEPENDENTE

Fie ecuația cu derivate parțiale de ordinul al doilea, liniară în raport cu derivatele de ordin maxim

$$\sum_{j,k=1}^{m} A_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \Phi\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right) = 0. \tag{1}$$

Să efectuăm transformarea de variabile

$$\xi_r = \xi_r(x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad r = 1, 2, \ldots, m. \tag{2}$$

Să vedem cum se modifică ecuația (1) prin această transformare.

Pentru simplificarea notațiilor, convenim să nu scriem semnul sumelor, conducîndu-ne după următoarea regulă : dacă într-un monom oarecare indicele variabilei, care ia valori de la 1 la m, se repetă de două ori, atunci se efectuează sumarea de la 1 la m după acest indice. Ecuația (1) se poate deci scrie sub forma mai simplă

$$A_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \Phi\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right) = 0.$$

Să presupunem că într-un anumit domeniu funcțiile din transformarea (2) au derivatele parțiale continue și jacobianul este diferit de zero. O astfel de transformare a variabilelor independente o vom numi regulată. Presupunem de asemenea că funcțiile ξ_r au derivatele de ordinul al doilea continue. Să calculăm derivatele din ecuația (1)

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial u}{\partial \xi_r} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \xi_r \partial \xi_s} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial \xi_r} \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial x_j \partial x_k}.$$

Înlocuind în ecuația (1) obținem o nouă ecuație

$$A_{jk} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_r \partial \xi_s} + \Phi_1\left(\xi_1, \ldots, \xi_m, u, \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \frac{\partial u}{\partial \xi_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial \xi_m}\right) = 0,$$

$$\Phi_1 = \Phi + A_{jk} \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial \xi_r}.$$

Introducem notația

$$A_{jk}\frac{\partial \xi_r}{\partial x_k}\frac{\partial \xi_s}{\partial x_j}=\widetilde{A}_{rs}, \tag{3}$$

atunci ecuația (1) capătă forma

$$\widetilde{A}_{rs}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_r\,\partial \xi_s}+\Phi_1\left(\xi_1,\ldots,\xi_m,u,\frac{\partial u}{\partial \xi_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial \xi_m}\right)=0. \tag{4}$$

Astfel, prin această transformare de variabile independente ecuația (1) se transformă într-o ecuație de același tip cu ecuația inițială; se modifică numai coeficienții ei. Remarcăm că matricea coeficienților dominanți ai ecuației (4) este simetrică

$$\widetilde{A}_{rs}=A_{jk}\frac{\partial \xi_r}{\partial x_k}\frac{\partial \xi_s}{\partial x_j}=A_{kj}\frac{\partial \xi_s}{\partial x_j}\frac{\partial \xi_r}{\partial x_k}.$$

Schimbînd în ultima sumă j și k între ei, obținem

$$\widetilde{A}_{rs}=A_{jk}\frac{\partial \xi_s}{\partial x_k}\frac{\partial \xi_r}{\partial x_j}=\widetilde{A}_{sr}.$$

Teorema 9.1.1. *Tipul ecuației cu derivate parțiale* (1.1) *nu se modifică printr-o transformare regulată a variabilelor independente.*

Din algebră este cunoscut următorul fapt. Să presupunem că o matrice oarecare a fost adusă printr-o transformare regulată la forma diagonală. Atunci numărul valorilor proprii pozitive, negative și nule ale matricii date este respectiv egal cu numărul elementelor diagonale pozitive, negative și nule ale matricii transformate.

Fie J — jacobianul matricii transformării (2). Determinantul ei — jacobianul acestei transformări — este diferit de zero, deci există matricea inversă J^{-1}. Formula (3) este echivalentă cu egalitatea matricială

$$\widetilde{A}=JAJ', \tag{5}$$

unde J' reprezintă matricea transpusă.

Fie o transformare liniară nesingulară de matrice σ ce transformă matricea A în matricea diagonală D, adică $A=\sigma D\sigma'$. Atunci conform formulei (5) avem $\widetilde{A}=J\sigma D\sigma' J'=(J\sigma)D(J\sigma)'$ și matricea $\widetilde{A}$

se reduce, printr-o transformare regulată (de matrice $J\sigma$), la aceeași matrice diagonală D. În acest caz numărul valorilor proprii pozitive, negative și nule ale matriciilor A și $\widetilde{A}$ coincid.

§ 2. CARACTERISTICE. RELAȚIA DINTRE DATELE CAUCHY PE CARACTERISTICE

Să analizăm ecuația cu derivate parțiale de ordinul al doilea

$$A_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k}+\Phi\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)=0, \tag{1}$$

liniară în raport cu derivatele de ordin maxim. Ecuația

$$A_{jk}(x)\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_k}=0 \tag{2}$$

se numește *ecuația caracteristică* a ecuației diferențiale (1). Dacă funcția $\omega(x_1, x_2,\ldots, x_m)$ satisface ecuația caracteristică, atunci suprafața (în cazul a două dimensiuni — curba) definită de ecuația

$$\omega(x_1, x_2,\ldots, x_m)=C, \tag{3}$$

unde C este o constantă arbitrară, se numește *suprafață caracteristică* (resp. *curbă caracteristică*) sau *caracteristică* a ecuației diferențiale date (1).

Formal ecuația caracteristică se obține astfel: se consideră forma pătratică

$$(At,t)=A_{jk}t_j t_k, \tag{4}$$

corespunzătoare matricii A a coeficienților dominanți ai ecuației (1), în care facem substituția $t_k=\dfrac{\partial \omega}{\partial x_l}$ și se egalează expresia obținută cu zero.

Menționăm o *proprietate importantă a caracteristicilor*: ele sînt invariante la o transformare a variabilelor independente. Aceasta înseamnă următoarele: dacă $\omega(x_1, x_2,\ldots, x_m)$ este soluția ecuației (2) și dacă transformarea variabilelor independente (1.2) transformă

funcția $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ în funcția $\widetilde{\omega}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, atunci această nouă funcție este soluția ecuației

$$\widetilde{A}_{jk} \frac{\partial \widetilde{\omega}}{\partial \xi_j} \frac{\partial \widetilde{\omega}}{\partial \xi_k} = 0, \tag{2a}$$

care este ecuația caracteristică a ecuației diferențiale transformate (1.4).

Într-adevăr, avem

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial \widetilde{\omega}}{\partial \xi_r} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_j}, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial x_k} = \frac{\partial \widetilde{\omega}}{\partial \xi_s} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_k}.$$

Înlocuind acestea în ecuația (2) și folosind formula (1.3), găsim că $\widetilde{\omega}$ satisface ecuația (2a).

Ecuațiile de tip eliptic nu au caracteristice reale. Într-adevăr, dacă ecuația (1) este eliptică, atunci forma pătratică (4) este definită și se anulează (pentru t_k reali) numai atunci cînd $t_1 = t_2 = \ldots = t_m = 0$. În acest caz ecuația caracteristică are soluția $\omega \equiv \text{const}$, care nu definește nici o suprafață.

Să arătăm că pe suprafețele caracteristice între datele Cauchy există o anumită relație. De aici va rezulta că pe suprafețele caracteristice datele Cauchy nu pot fi date independent.

Să presupunem că datele Cauchy sînt date pe o suprafață suficient de netedă Γ definită de ecuația

$$\xi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0 \tag{5}$$

și au forma

$$u|_\Gamma = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right|_\Gamma = \varphi(x), \tag{6}$$

unde λ este o direcție tangentă la Γ. După cum s-a arătat în §4 cap. 8, cunoscînd datele (6) se pot găsi valorile tuturor derivatelor de ordinul întîi ale funcției u pe suprafața Cauchy Γ.

Introducem un nou sistem de coordonate. Coordonatele $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}$ se introduc în mod arbitrar, dar ξ_m îl punem egal cu ξ; în alegerea coordonatelor $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}$ ținem seama doar ca transformarea să fie univalentă și jacobianul diferit de zero, precum și ca funcțiile ξ_r să aibă derivatele de ordinul al doilea continue. În noile coordonate ecuația suprafeței Cauchy Γ capătă forma elementară $\xi_m = 0$.

Presupunem apoi că Γ este o suprafață caracteristică, adică $A_{jk} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \frac{\partial \xi}{\partial x_k} = 0$. În variabilele ξ_r coeficienții lui $\partial^2 u / \partial \xi_m^2$ se anulează, adică ecuația noastră este o ecuație de ordinul întîi în variabilele ξ_m.

Să arătăm că *pe suprafața* Γ *se pot calcula toate derivatele care apar în ecuația transformată* (1), *pornind numai de la datele Cauchy*. Într-adevăr, mărimea $u|\Gamma = \varphi_0(x)$ este cunoscută. Derivatele de ordinul întîi $\left.\frac{\partial u}{\partial \xi_r}\right|_\Gamma$ pot fi definite după cum s-a arătat mai sus. Derivatele de ordinul al doilea, cu excepția celei în raport cu ξ_m de două ori, pot fi obținute derivînd derivatele de ordinul întîi în raport cu $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}$, adică după direcțiile tangente la Γ. Singura derivată de ordinul al doilea care nu se poate calcula plecînd numai de la datele Cauchy este $\partial^2 u / \partial \xi_m^2$, dar aceasta nu apare în ecuația transformată.

Valorile tuturor termenilor din membrul stîng al ecuației (1), transformată în variabilele $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, pot fi calculate pe suprafața Cauchy Γ. Înlocuind aceste valori în ecuație, obținem că funcția arbitrară dată trebuie să fie identic egală cu zero. Aceasta este relația între datele Cauchy pe caracteristice; dacă această relație nu este îndeplinită, atunci problema Cauchy cu date pe caracteristice nu are soluție.

Ca exemplu să analizăm ecuația căldurii

$$\frac{\partial u}{\partial x_m} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0. \tag{7}$$

Ecuația ei caracteristică este

$$-\sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_k}\right)^2 = 0,$$

de unde $\omega = f(x_m)$, unde f este o funcție arbitrară. Ecuația suprafeței caracteristice are forma $f(x_m) = \text{const}$; rezolvînd această ecuație în raport cu x_m, obținem $x_m = \text{const}$. Prin urmare, caracteristicile ecuației (7) sînt date de familia de plane $x_m = \text{const}$. Să admitem că suprafața Cauchy este planul $x_m = 0$, iar condițiile Cauchy au forma

$$u|_{x_m=0} = \varphi_0(x_1, \ldots, x_{m-1}), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_m}\right|_{x_m=0} = \varphi_1(x_1, \ldots, x_{m-1}). \tag{8}$$

Punînd $x_m = 0$ în ecuația (7), obținem imediat $\varphi_1 = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_k^2}$.

De aici se vede că nu are sens să se dea a doua din condițiile (8), fiind suficientă numai condiția

$$u|_{x_m=0} = \varphi_0(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}).$$

§ 3. ADUCEREA ECUAȚIEI DE ORDINUL AL DOILEA LA FORMA CANONICĂ

Să analizăm cazul special al transformării liniare nesingulare a variabilelor

$$\xi_r = j_{rk}\, x_k; \qquad k = 1, 2, \ldots, m; \qquad j_{rk} = \text{const.} \tag{1}$$

Considerăm matricea J de elemente j_{rk}. Transformarea (1) se poate scrie sub forma $\xi = Jx$. Fixînd punctul x, matricea A a coeficienților dominanți ai ecuației (1) devine constantă. Matricea J poate fi aleasă astfel încît matricea transformată a coeficienților dominanți (formula (1.5)) $\widetilde{A} = JAJ'$ să fie diagonală: $\widetilde{A}_{jk} = 0$, $j \neq k$. Atunci în punctul fixat ecuația (1.1) capătă forma

$$\sum_{k=1}^{m} \nu_k \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k^2} + \Phi_1\left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, u, \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \frac{\partial u}{\partial \xi_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial \xi_m}\right) = 0. \tag{2}$$

Aici $\nu_k = \widetilde{A}_{kk}$. Această formă a ecuației de ordinul al doilea, în care nu apar derivatele mixte de ordinul al doilea, se numește *forma canonică* a acestei ecuații. Astfel, *o ecuație cu derivate parțiale, de ordinul al doilea, liniară în raport cu derivatele de ordin superior, poate fi adusă, în orice punct al spațiului, la forma canonică printr-o transformare liniară a variabilelor independente.*

Evident, ecuația poate fi adusă la forma canonică, direct în tot spațiul, dacă coeficienții dominanți A_{jk} sînt constanți.

Ecuația lui Laplace, ecuația căldurii și ecuația undelor au formă canonică.

Forma canonică a unei ecuații este strîns legată de tipul său. În virtutea legii inerției formelor pătratice, între numerele ν_k sînt tot atîtea pozitive, negative și nule ca și numerele λ_k — valorile proprii ale matricei coeficienților dominanți. De aceea tipul ecuației cu derivate parțiale de ordinul al doilea, liniară în raport cu derivatele de ordin maxim, poate fi astfel definit: ecuația (1.1) este de tipul (α, β, γ) dacă în forma ei canonică (2) printre numerele ν_k, α sînt pozitive, β negative și γ nule.

§ 4. EXPRESII DIFERENȚIALE FORMAL ADJUNCTE

Să analizăm expresia diferențială liniară de ordinul al doilea

$$Lu = A_{jk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\, \partial x_k} + A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0 u. \tag{1}$$

Fie în spațiul euclidian de coordonate $x_1, x_2, \ldots, x_m$ domeniul mărginit Ω cu frontiera Γ — o suprafață netedă pe porțiuni. Vom presupune că în domeniul închis $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ coeficienții $A_{jk} \in C^{(2)}(\Omega)$, $A_k \in C^{(1)}(\bar{\Omega})$, $A_0 \in C(\bar{\Omega})$.

Expresia diferențială M

$$Mu = \frac{\partial^2 (A_{jk}\, u)}{\partial x_j\, \partial x_k} - \frac{\partial (A_k u)}{\partial x_k} + A_0 u \tag{2}$$

se numește *adjuncta* operatorului L. Este convenabil să scriem pe L sub forma

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + B_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu, \quad B_k = A_k - \frac{\partial A_{jk}}{\partial x_j}, \quad C = A_0. \tag{3}$$

Dacă L este scris în această formă, atunci M devine

$$Mu = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial (B_k\, u)}{\partial x_k} + Cu. \tag{4}$$

Operatorul formal adjunct are *proprietatea de reciprocă*: expresia formal adjunctă a lui M este L. Într-adevăr,

$$Mu = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) - B_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + \left(C - \frac{\partial B_k}{\partial x_k}\right) u.$$

Fie N expresia diferențială adjunctă a lui M, adică

$$Nu = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial (B_k\, u)}{\partial x_k} + \left(C - \frac{\partial B_k}{\partial x_k}\right) u = Lu.$$

Dacă $M \equiv L$, atunci expresia L se numește *formal autoadjunctă*.

După cum se observă din formulele (3) și (4), expresiile formal adjuncte diferă numai prin termenii din mijloc. Este clar că $M \equiv L$

și expresia diferențială L este formal autoadjunctă, atunci și numai atunci cînd $B_k \equiv 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$. De aici rezultă că o expresie diferențială autoadjunctă de ordinul al doilea poate fi adusă la forma

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + Cu, \quad A_{jk} = A_{kj}. \tag{5}$$

Operatorul lui Laplace și operatorul undelor sînt formal autoadjuncte; operatorul căldurii nu este formal autoadjunct.

§ 5. EXPRESII DIFERENȚIALE DE ORDIN SUPERIOR

Să analizăm ecuația liniară cu derivate parțiale de ordin oarecare s:

$$Lu = \sum_{|\alpha|=0}^{s} A_\alpha(x)\ \mathrm{D}^\alpha u = f(x). \tag{1}$$

Partea stîngă a acestei ecuații, L, se numește *expresie diferențială liniară de ordinul* s. Expresia diferențială

$$Mu = \sum_{|\alpha|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|}\,\mathrm{D}^\alpha(A_\alpha u) \tag{2}$$

se numește *formal adjunctă* cu expresia L. Dacă $M \equiv L$, atunci expresia L se numește *formal autoadjunctă*.

Ecuația diferențială $Lu = f(x)$ poate fi adusă la forma

$$Lu = \sum_{|\beta+\gamma|=0}^{s} \mathrm{D}^\beta(B_{\beta\gamma}\,\mathrm{D}^\gamma u) = f(x), \tag{3}$$

unde $B_{\beta\gamma}$ sînt noii coeficienți. Atunci expresia formal adjunctă capătă forma

$$Mu = \sum_{|\beta+\gamma|=0}^{s} (-1)^{|\beta+\gamma|}\,\mathrm{D}^\gamma(B_{\beta\gamma}\,\mathrm{D}^\beta u). \tag{4}$$

§ 6. FORMULE GREEN

Fie expresia diferențială L definită de formula (4.3) ai cărei coeficienți satisfac condițiile din §4. Fie date funcțiile $u, v \in C^{(2)}(\overline{\Omega})$. Să calculăm integrala

$$\int_\Omega vLu\,dx = \int_\Omega v\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)dx + \int_\Omega v\left(B_k\frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu\right)dx. \tag{1}$$

Integrînd prin părți prima integrală din membrul drept (§3 cap. 2), obținem așa-numita *primă formulă Green*

$$\int_\Omega vLu\,dx = -\int_\Omega A_{jk}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}dx + \int_\Omega v\left(B_k\frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu\right)dx + \int_\Gamma vA_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu, x_j)\,d\Gamma, \tag{2}$$

unde ν este normala exterioară (în raport cu domeniul) la suprafața Γ.

Să scriem prima formulă Green pentru expresia diferențială formal adjunctă M, schimbînd totodată pe u cu v:

$$\int_\Omega uMv\,dx = -\int_\Omega A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_k}dx + \int_\Omega u\left\{-B_k\frac{\partial v}{\partial x_k} + \left(C - \frac{\partial B_k}{\partial x_k}\right)v\right\}dx + \int_\Gamma u\,A_{jk}\frac{\partial v}{\partial x_k}\cos(\nu, x_j)\,d\Gamma. \tag{3}$$

Scădem formula (3) din formula (2). Ne putem convinge că toate integralele de volum din membrul drept se reduc. Într-adevăr, deoarece $A_{jk} = A_{kj}$, primele integrale din membrii din dreapta ai formulelor (2) și (3) coincid. Mai departe, integrînd prin părți, obținem

$$-\int_\Omega uB_k\frac{\partial v}{\partial x_k}dx = \int_\Omega v\frac{\partial(B_k u)}{\partial x_k}dx - \int_\Gamma B_k uv\cos(\nu, x_k)\,d\Gamma = \int_\Omega\left\{vB_k\frac{\partial u}{\partial x_k} + uv\frac{\partial B_k}{\partial x_k}\right\}dx - \int_\Gamma B_k uv\cos(\nu, x_k)\,d\Gamma,$$

de unde este clar că integralele de volum din dreapta formulelor (2) și (3) coincid.

Ca rezultat se obține *a doua formulă Green*

$$\int_\Omega (vLu - uMv)\,dx = \int_\Gamma\left[A_{jk}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_j} - u\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) + B_k uv\right]\cos(\nu, x_k)\,d\Gamma. \tag{4}$$

Formulele Green capătă o formă mai simplă pentru expresiile diferențiale formal autoadjuncte. În acest caz $B_k \equiv 0$ și obținem următoarele formule simplificate: prima formulă Green

$$\int_\Omega vLu \, dx = -\int_\Omega A_{jk} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx + \int_\Omega Cuv \, dx +$$

$$+\int_\Gamma vA_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\nu, x_j) \, d\Gamma; \tag{5}$$

a doua formulă Green

$$\int_\Omega (vLu - uLv) \, dx = \int_\Gamma A_{jk} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_k} - u \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) \cos(\nu, x_j) \, d\Gamma. \tag{6}$$

Să scriem formulele Green pentru trei dintre cele mai importante expresii diferențiale (de obicei ele se numesc operatori) ale fizicii-matematice: operatorul lui Laplace, operatorul căldurii și cel al propagării undelor.

1. Operatorul lui Laplace $\Delta = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ este formal autoadjunct; coeficienții săi au valorile $A_{jk} = \delta_{jk}$, $C = 0$. Înlocuind aceste valori în formula (5), obținem *prima formulă Green* pentru *operatorul lui Laplace*:

$$\int_\Omega v \Delta u \, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} dx + \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma. \tag{7}$$

Menționăm două cazuri particulare ale formulei (7). Pentru $u = v$ obținem

$$\int_\Omega u \Delta u \, dx = -\int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx + \int_\Gamma u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma. \tag{8}$$

Integrala $\int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx$ se numește *integrala Dirichlet.*

Punînd $v \equiv 1$ în (7), obținem formula

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma = \int_\Omega \Delta u \, dx \tag{9}$$

importantă pentru cele ce urmează.

A doua formulă Green *pentru operatorul lui Laplace* are forma

$$\int_\Omega (v \Delta u - u \Delta v) \, dx = \int_\Gamma \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) d\Gamma. \tag{10}$$

2. Operatorul propagării căldurii $L = \frac{\partial}{\partial x_m} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ nu este formal autoadjunct. Pentru acest operator

$$A_{mm} = 0; \quad A_{kk} = -1, \; 1 \leqslant k \leqslant m-1; \quad A_{jk} = 0, \quad j \neq k;$$

$$B_m = 1; \quad B_k = 0, \; 1 \leqslant k \leqslant m-1; \quad C = 0.$$

Operatorul M, formal adjunct cu operatorul propagării căldurii are forma

$$M = -\frac{\partial}{\partial x_m} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

Din formulele (2) și (4) deducem

$$\int_\Omega vLu \, dx = \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} \quad v \frac{\partial u}{\partial x_m} \right) dx -$$

$$-\int_\Gamma v \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\nu, x_k) \, d\Gamma; \tag{11}$$

$$\int_\Omega (vLu - uMv) \, dx =$$

$$= \int_\Gamma \left[-\sum_{k=1}^{m-1} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_k} - u \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) \cos(\nu, x_k) + uv \cos(\nu, x_m) \right] d\Gamma. \tag{12}$$

3. Operatorul propagării undelor se notează adesea cu simbolul $\Box$, $\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$. Acest operator este formal autoadjunct și valorile coeficienților săi sînt: $A_{mm} = 1$; $A_{kk} = -1$, $1 \leqslant k \leqslant m-1$; $A_{jk} = 0$, $j \neq k$; $C = 0$. Formulele (5) și (6) pentru operatorul propagării undelor au forma

$$\int_\Omega v \Box u \, dx = \int_\Omega \left[\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{\partial v}{\partial x_m} \right] dx +$$

$$+ \int_\Gamma v \left[\frac{\partial u}{\partial x_m} \cos(\nu, x_m) - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\nu, x_k) \right] d\Gamma, \qquad (13)$$

$$\int_\Omega (v \Box u - u \Box v) \, dx = \int_\Gamma \left[\left(v \frac{\partial u}{\partial x_m} - u \frac{\partial v}{\partial x_m} \right) \cos(\nu, x_m) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{m-1} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_k} - u \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) \cos(\nu, x_k) \right] d\Gamma. \qquad (14)$$

Să trecem la expresii diferențiale de ordin superior. Ca și mai înainte, fie Ω un domeniu mărginit din spațiul E_m, de frontieră Γ netedă pe porțiuni. Vom presupune că u, $v \in C^{(s)}(\overline{\Omega})$, iar $B_{\beta\gamma} \in C^{(\varkappa)}(\overline{\Omega})$, unde $\varkappa = \max(|\beta|, |\gamma|)$. Fie L expresia diferențială (5.1) și M — expresia (5.2) formal adjunctă ei. Sînt adevărate prima și a doua formulă Green:

$$\int_\Omega vLu \, dx = \int_\Omega \sum_{|\beta+\gamma|=0}^{s} (-1)^{|\beta|} B_{\beta\gamma} D^\gamma u D^\beta v \, dx + \int_\Gamma R_1(u, v) \, d\Gamma \qquad (15)$$

și

$$\int_\Omega (vLu - uMv) \, dx = \int_\Gamma R_2(u, v) \, d\Gamma. \qquad (16)$$

În formulele (15) și (16) $R_1(u, v)$ și $R_2(u, v)$ sînt forme biliniare în raport cu u, v și derivatele lor pînă la ordinul $s-1$.

Dacă prin $u(x)$ și $f(x)$ se înțeleg funcții vectoriale cu un număr k arbitrar de componente, iar prin A_α și $B_{\beta\gamma}$ — matricile pătratice corespunzătoare de ordin k, atunci expresiile (5.1) sau (5.3) reprezintă

un sistem de k ecuații cu derivate parțiale cu k funcții necunoscute. Formulele Green (15) și (16) sînt adevărate în acest caz dacă prin expresiile vLu, uMv, $D^\gamma u D^\beta v$ se înțeleg produse scalare (în sensul spațiilor euclidiene E_k) ale vectorilor corespunzători. Expresiile formal adjuncte trebuie de aceea modificate în mod corespunzător: în locul formulelor (5.2) și (5.4) vom avea respectiv

$$Mu = \sum_{|\alpha|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_\alpha^* u) \qquad (17)$$

și

$$Mu = \sum_{|\beta+\gamma|=0}^{s} (-1)^{|\beta+\gamma|} D^\gamma (B_{\beta\gamma}^* D^\beta u), \qquad (18)$$

unde $*$ indică matricea transpusă.

Formulele Green, precum și formulele (17) și (18), ce definesc expresia diferențială formal adjunctă, sînt în egală măsură utile atît pentru cazurile matricilor pătratice, cît și pentru cazurile celor dreptunghiulare A_α și $B_{\beta\gamma}$. Ca exemplu, să analizăm expresia diferențială $Lu = \operatorname{div} u$, unde u este un vector cu m componente: $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$. Prima matrice A are în acest caz forma $A = (1, 1, \ldots, 1)$; ea conține o linie și m coloane; matricea transpusă are forma $A^* = (1, 1, \ldots, 1)'$; accentul indicînd aici că linia trebuie schimbată cu coloana. Expresia formal adjunctă depinde de o funcție scalară; dacă notăm această funcție cu v, atunci expresia formal adjunctă este

$$Mv = \left(-\frac{\partial v}{\partial x_1}, -\frac{\partial v}{\partial x_2}, \ldots, -\frac{\partial v}{\partial x_m} \right) = -\operatorname{grad} v.$$

Capitolul 10

SOLUȚII GENERALIZATE ALE ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE

§ 1. SOLUȚII GENERALIZATE LOCAL INTEGRABILE

Fie $L = \sum_{|\alpha|=0}^{s} A_\alpha(x)\, D^\alpha$ o expresie diferențială liniară de ordin oarecare s și Ω un domeniu din spațiul E_m mărginit sau nu. Vom presupune că toți coeficienții $A_\alpha \in C^{(k+|\alpha|)}(\Omega)$, $k = \text{const} > 0$. Să considerăm ecuația diferențială

$$Lu = f(x) \tag{1}$$

și să presupunem că ea are ca soluție pe $u \in C^{(s)}(\Omega)$. Fie $\varphi \in \mathfrak{M}^{(s)}(\Omega)$ și fie M o expresie diferențială formal adjunctă a lui L. Notăm cu Ω' domeniul în exteriorul căruia $\varphi(x) \equiv 0$. Este evident că u, $\varphi \in C^{(s)}(\overline{\Omega'})$ și pe $\partial\Omega'$ funcția φ și derivatele ei de ordin $\leqslant s$ sînt egale cu zero; se poate considera că frontiera $\partial\Omega'$ este suficient de netedă. Conform formulei (6.16) cap. 9, avem

$$\int_{\Omega'} (\varphi Lu - uM\varphi)\mathrm{d}x = 0, \tag{2}$$

sau

$$\int_{\Omega'} uM\varphi \mathrm{d}x = \int_{\Omega'} f\varphi \mathrm{d}x. \tag{3}$$

Pe mulțimea $\Omega \setminus \Omega'$ funcția $\varphi \equiv 0$ și de aceea în ultima identitate se poate integra nu pe Ω', ci pe Ω, ajungînd astfel la următoarea concluzie: soluția ecuației diferențiale (1), aparținînd clasei $C^{(s)}(\Omega)$, satisface identitatea integrală

$$\int_{\Omega} uM\varphi \mathrm{d}x = \int_{\Omega} f\varphi \mathrm{d}x; \quad \forall \varphi \in \mathfrak{M}^{(s)}(\Omega). \tag{4}$$

Introducem următoarea definiție. Fie în ecuația (1) $f \in L_{\text{loc}}(\Omega)$ (vezi Introducere, §2). Funcția $u \in L_{\text{loc}}(\Omega)$ se numește *soluție generalizată a ecuației* (1) în domeniul Ω, dacă ea satisface identitatea integrală (4). După cum am văzut, orice soluție a ecuației (1), ce

aparține clasei $C^{(s)}(\Omega)$, este și soluție generalizată a acestei ecuații. Este adevărată și reciproca: dacă soluția generalizată a ecuației (1) aparține clasei $C^{(s)}(\Omega)$, atunci ea este și soluție în sens clasic a ecuației (1). Într-adevăr, să presupunem că funcția $u \in C^{(s)}(\Omega)$ satisface identitatea (4). Alegem în această identitate $\varphi = \omega_h(r)$, unde ω_h este nucleul de medie $r = |x - x_0|$, $x_0 \in \Omega$ și h mai mic decît distanța de la x_0 la $\partial\Omega$. Atunci obținem $(Lu)_h(x_0) = f_h(x_0)$. Funcția $(Lu)(x)$ este evident continuă în Ω. Conform teoremei 2.3.1, $(Lu)_h(x_0) \to (Lu)(x_0)$ uniform în oricare subdomeniu închis. În acest caz și funcția $f_h(x_0)$ converge uniform la aceeași limită. Dar, conform teoremei 2.3.3, $f_h \to f$ în metrica lui $L(\Omega)$, iar atunci și limita uniformă $\lim_{h\to 0} f_h(x_0) = f(x_0)$. În concluzie, $(Lu)(x_0) = f(x_0)$ și afirmația noastră este demonstrată.

Teorema 10.1.1. *Fie $\{u_n(x)\}$ un șir de soluții generalizate ale ecuației* (1) *în domeniul Ω și fie că $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u_0$ în $L_{\text{loc}}(\Omega)$. Atunci u_0 este soluția generalizată a ecuației* (1) *în Ω.*

Fie $\varphi \in \mathfrak{M}^{(s)}(\Omega)$. Scriem identitatea (3) pentru funcția u_n:

$$\int_{\Omega'} u_n M\varphi \,\mathrm{d}x = \int_{\Omega} f\varphi \mathrm{d}x. \tag{5}$$

Dar $\|u_n - u_0\|_{L(\Omega')} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; prin trecere la limită în identitatea (5) pentru $n \to \infty$ teorema este demonstrată.

Corolarul 10.1.1. *Fie B un spațiu Banach de funcții definite aproape peste tot în Ω și să presupunem că din convergența în B rezultă convergența în $L_{\text{loc}}(\Omega)$. Atunci soluțiile generalizate ale ecuației omogene* (1) *în Ω, ce aparțin spațiului B, formează în B un subspațiu.*

În particular, drept B se poate lua oricare din spațiile $L_p(\Omega)$, $W_p^{(k)}(\Omega)$, $C^{(k)}(\overline{\Omega})$.

Observație. De noțiunea de soluții generalizate ale ecuației diferențiale este strîns legată noțiunea de derivate generalizate, introdusă în cap. 2. Fie expresia diferențială L avînd forma $L = D^\alpha$; atunci expresia formal adjunctă $M = (-1)^k D^\alpha$, $k = |\alpha|$. Fie u, $v \in L_{\text{loc}}(\Omega)$ și u soluția generalizată a ecuației $\mathrm{D}^\alpha u = v$. Conform definiției, funcțiile u și v satisfac identitatea (4), care în cazul dat coincide cu formula (3.1) cap. 2. Aceasta înseamnă, conform definiției date în cap. 2, că funcția u are în Ω derivata generalizată $\mathrm{D}^\alpha u = v$.

Teorema 10.1.2. *Fie $u(x)$ o soluție generalizată local integrabilă a ecuației* (1) *într-un domeniu oarecare Ω. Dacă funcția $u(x)$ are derivatele generalizate ce apar în ecuația* (1), *atunci această funcție satisface aproape peste tot în Ω ecuația dată.*

Conform definiției soluției generalizate

$$\sum_{|\alpha|=0}^{s}(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega}uD^{\alpha}(A_{\alpha}\varphi)dx=\int_{\Omega}f\varphi dx. \tag{6}$$

Din ipoteza asupra coeficienților, care s-a formulat la începutul paragrafului, rezultă că $A_\alpha\varphi\in\mathfrak{M}^{(|\alpha|)}(\Omega)$; conform definiției derivatei generalizate avem egalitatea

$$(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega}uD^{\alpha}(A_{\alpha}\varphi)\,dx=\int_{\Omega}A_{\alpha}\varphi D^{\alpha}u dx$$

și identitatea (6) capătă forma

$$\int_{\Omega}\varphi(Lu-f)dx=0,\quad\forall\varphi\in\mathfrak{M}^{(s)}(\Omega). \tag{7}$$

Repetînd întocmai raționamentele din §3 cap. 2, folosite pentru demonstrarea unicității derivatei generalizate (teorema 3.1.1), găsim că identitatea (7) este adevărată pentru orice funcție φ, măsurabilă, mărginită și egală cu zero într-o anumită bandă frontieră. Alegînd $\delta>0$ oarecare, punînd $\varphi(x)=0$ în Ω_δ și $\varphi(x)=\operatorname{sign}[Lu-f(x)]$ în $\Omega\setminus\Omega_\delta$, obținem egalitatea $\int_{\Omega\setminus\Omega_\delta}|Lu-f|dx=0$. De aici rezultă $Lu-f=0$ aproape peste tot în $\Omega\setminus\Omega\delta$; deoarece δ este arbitrar, ultima egalitate are loc aproape peste tot în Ω.

§ 2. DISTRIBUȚII

Fie $\mathfrak{M}$ o mulțime liniară arbitrară în care se presupune introdusă noțiunea de convergență cu proprietățile obișnuite. Vom numi $\mathfrak{M}$ *spațiul elementelor de bază* sau, mai scurt, *spațiul bază* sau *spațiul fundamental*. Fie f o funcțională liniară și continuă pe spațiul de bază : aceasta înseamnă că $\forall a, b$ și $\varphi, \psi, \varphi_n, n=1,2,\ldots,$ — elemente ale mulțimii $\mathfrak{M}$, atunci $(f, a\varphi+b\psi)=a(f,\varphi)+b(f,\psi)$ și dacă $\lim_{n\to\infty}\varphi_n$ există, atunci $\lim_{n\to\infty}(f,\varphi_n)=(f,\lim_{n\to\infty}\varphi_n)$; parantezele rotunde indică aici valoarea funcționalei pe elementele de bază.

Funcționalele liniare continue pe spațiul de bază $\mathfrak{M}$ se numesc *distribuții* pe acest spațiu; mulțimea distribuțiilor (evident, ea este

liniară) pe mulțimea $\mathfrak{M}$ se notează cu $\mathfrak{M}'$. În $\mathfrak{M}'$ se introduce în mod natural noțiunea de convergență, astfel : fie $f, f_n\in\mathfrak{M}'$, $n=1,2,\ldots,$ atunci $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{}f$, dacă

$$(f_n,\varphi)\xrightarrow[n\to\infty]{}(f,\varphi),\quad\forall\varphi\in\mathfrak{M}. \tag{1}$$

Mulțimea distribuțiilor $\mathfrak{M}'$ se numește *spațiul de distribuții*.

Să analizăm unul din cele mai importante exemple. Introducem ca spațiu de bază mulțimea $\mathscr{D}=\mathscr{D}(\Omega)=\mathfrak{M}^{(\infty)}(\Omega)$ a funcțiilor reale finite într-un domeniu oarecare $\Omega\subset E_m$; acest domeniu poate fi mărginit sau nemărginit și, de asemenea, cazul $\Omega=E_m$ nu se exclude. Convergența în $\mathscr{D}(\Omega)$ se definește astfel : fie $\varphi, \varphi_n\in\mathscr{D}(\Omega), n=1,2,\ldots$. Vom spune că $\varphi_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\varphi$ în sensul convergenței în $\mathscr{D}(\Omega)$ și vom scrie aceasta sub forma $\varphi_n\xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}}\varphi$, dacă suporturile (vezi Introducere, §2) tuturor funcțiilor φ_n sînt incluse într-un același compact relativ la domeniul Ω, pe care pentru orice multiindex α,

$$D^{\alpha}\varphi_n\xrightarrow[n\to\infty]{}D^{\alpha}\varphi \tag{2}$$

un iform.

În spațiul $\mathscr{D}$ operatorul de diferențiere este continuu : dacă $\varphi_n\xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}}\varphi$ și α este un multiindex arbitrar, atunci $D^{\alpha}\varphi_n\xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}}D^{\alpha}\varphi$. Într-adevăr, $\operatorname{supp}D^{\alpha}\varphi_n\subset\operatorname{supp}\varphi_n$, deci suporturile tuturor funcțiilor $D^{\alpha}\varphi_n$ se găsesc într-un același compact. Mai departe, conform relației (2), în acest compact $D^{\alpha+\beta}\varphi_n\xrightarrow[n\to\infty]{}D^{\alpha+\beta}\varphi$ uniform, oricare ar fi multiindexul β. Conform definiției convergenței în $\mathscr{D}$, $D^{\alpha}\varphi_n\xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}}D^{\alpha}\varphi$.

De îndată ce s-a construit clasa $\mathscr{D}(\Omega)$ a elementelor de bază *) (în cazul dat — funcții), se definește automat și clasa corespunzătoare a distribuțiilor. Distribuțiile pe spațiul bază $\mathscr{D}$ se numesc și *funcții generalizate*. În conformitate cu notațiile adoptate mai sus, spațiul de distribuții se notează cu $\mathscr{D}'(\Omega)$ sau, mai scurt, cu $\mathscr{D}'$.

Fie $f\in L_{1\text{loc}}(\Omega)$. Funcționala f definită de relația

$$(f,\varphi)=\int_{\Omega}f(x)\varphi(x)dx,\quad\forall\varphi\in D(\Omega), \tag{3}$$

este evident liniară și continuă pe $\mathscr{D}$; altfel spus, f este o distribuție pe care o identificăm cu funcția local integrabilă $f(x)$. Astfel, orice funcție local integrabilă poate fi privită ca o distribuție. Se spune

*) În literatura de specialitate, în cazul în care elementele de bază sînt funcții, se folosesc următorii termeni : *funcție de bază, funcție de probă* sau *funcție test*. Vom folosi în cele ce urmează terminologia de **funcție test**. (*N.T.*).

că distribuția f este egală cu zero în domeniul $G \subset \Omega$, dacă $(f, \varphi) = 0$ pentru orice funcție test φ cu suportul în G. Închiderea mulțimii punctelor în care distribuția f este diferită de zero se numește *suportul* acestei distribuții și se notează cu $\operatorname{supp} f$. Se spune că distribuția (ca dealtfel și funcția „obișnuită") este concentrată în suportul său.

Spunem că *distribuțiile f și g sînt egale în domeniul $G \subset \Omega$*, dacă în acest domeniu $f - g = 0$.

Să analizăm operațiile ce se pot efectua cu distribuții. Mulțimea $\mathscr{D}'$ este liniară, deci distribuțiile se pot aduna și înmulți cu constante. În general, nu se poate defini operația de înmulțire între distribuții cu toate că orice distribuție se poate înmulți cu orice funcție de clasă $C^{(\infty)}(\Omega)$; dacă $f \in \mathscr{D}'$ și $\psi \in C^{(\infty)}(\Omega)$, atunci produsul $f\psi$ se definește prin relația

$$(f\psi, \varphi) = (f, \psi\varphi), \quad \forall \varphi \in D. \tag{4}$$

Partea dreaptă a relației (4) are sens întrucît, evident, $\psi\varphi \in \mathscr{D}$ și înmulțirea cu ψ este un operator liniar și continuu în $\mathscr{D}$.

Pentru distribuții se definește noțiunea de diferențiere: dacă $f \in \mathscr{D}'$ și α este un multiindex arbitrar, atunci derivata $\mathrm{D}^\alpha f$ se definește prin relațiile

$$(\mathrm{D}^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, \mathrm{D}^\alpha \varphi); \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}. \tag{5}$$

Funcționala $\mathrm{D}^\alpha f$ este evident liniară. Se arată ușor că ea este și continuă: dacă $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} \varphi$, atunci și $\mathrm{D}^\alpha \varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} \mathrm{D}^\alpha \varphi$ și, prin urmare,

$$(\mathrm{D}^\alpha f, \varphi_n) = (-1)^{|\alpha|}(f, \mathrm{D}^\alpha \varphi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (-1)^{|\alpha|}(f, \mathrm{D}^\alpha \varphi) = (\mathrm{D}^\alpha f, \varphi).$$

De aici rezultă că dacă $f \in \mathscr{D}'$, atunci $\mathrm{D}^\alpha f \in \mathscr{D}'$; fiecare distribuție are derivate de orice ordin și aceste derivate sînt de asemenea distribuții. Se observă ușor că dacă f este o funcție local integrabilă ce are pe $\mathrm{D}^\alpha f$ ca derivată generalizată, atunci această derivată coincide cu derivata definită în sensul distribuțiilor.

Distribuțiile local integrabile se numesc *regulate*, toate celelalte distribuții se numesc *singulare*. Una din cele mai importante distribuții singulare este *distribuția lui Dirac* sau *distribuția* δ definită prin relația

$$(\delta(x - y), \varphi(y)) = (\delta(y - x), \varphi(y)) = \varphi(x), \ \forall \varphi \subset \mathscr{D}, \ \forall x \in \Omega. \tag{6}$$

În particular, dacă Ω conține originea coordonatelor, atunci $(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0)$. Evident, distribuția δ este egală cu zero peste tot

în afara originei coordonatelor: suportul distribuției δ constă din singurul punct $x = 0$. Derivatele distribuției δ se definesc prin relația

$$(\mathrm{D}_y^\alpha \delta(x - y), \varphi(y)) = (-1)^{|\alpha|} \mathrm{D}^\alpha \varphi(x). \tag{7}$$

§ 3. DISTRIBUȚII DE ORDIN FINIT

Vom spune că distribuția f are ordinul de singularitate sau, mai simplu, ordinul $\leqslant j$, dacă ea poate fi reprezentată sub forma

$$f = \sum_{|\alpha| \leqslant j} \mathrm{D}^\alpha g_\alpha, \quad g_\alpha \in L_{1\mathrm{oc}}(\Omega). \tag{1}$$

În acest caz vom scrie $s(f) \leqslant j$. Dacă numărul j din formula (1) nu poate fi micșorat, atunci spunem că ordinul distribuției f este egal cu j și scriem $s(f) = j$. Evident, ordinul oricărei funcții local integrabile este egal cu zero; mai jos vom vedea că ordinul distribuției δ este egal cu 1.

Rezultă ușor următoarele afirmații:

a) $s(f_1 + f_2) = \max(s(f_1), s(f_2))$;

b) dacă $\psi \in C^{(\infty)}(\Omega)$, atunci $s(f, \psi) = s(f)$;

c) $s(\mathrm{D}^\alpha f) = |\alpha| + s(f)$.

Fie f o distribuție de ordinul j și φ o funcție test arbitrară. Conform definiției derivatei distribuției, avem

$$(f, \varphi) = \sum_{|\alpha| \leqslant j} (\mathrm{D}^\alpha g_\alpha, \varphi) = \sum_{|\alpha| \leqslant j} (-1)^{|\alpha|}(g_\alpha \mathrm{D}^\alpha \varphi) =$$

$$= \sum_{|\alpha| \leqslant j} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha(x) \mathrm{D}^\alpha \varphi(x) dx; \quad \forall \varphi \in \mathfrak{M}^\infty \Omega. \tag{2}$$

Distribuția f este o funcțională definită pe mulțimea funcțiilor finite în Ω. Dar partea dreaptă a formulei (2) își păstrează sensul pentru orice funcție $\varphi \in \mathfrak{M}^{(j)}(\Omega)$. Folosind această formulă, prelungim funcționala f la clasa $\mathfrak{M}^{(j)}(\Omega)$. După o astfel de prelungire această funcțională rămîne liniară. În mulțimea $\mathfrak{M}^{(j)}(\Omega)$ introducem noțiunea de convergență ca și în §2 pentru mulțimea $\mathfrak{M}^{(\infty)}(\Omega)$. Anume, spunem că șirul $\varphi_n(x)$ converge la $\varphi(x)$ în sensul convergenței în $\mathfrak{M}^{(j)}$ (notînd $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{j} \varphi$) dacă:

1) $\varphi, \varphi_n \in \mathfrak{M}^{(j)}(\Omega), \quad j = 1, 2, \ldots;$

2) există în Ω un compact K, astfel încît supp $\varphi_n \subset K$ pentru orice n;

3) convergența

$$D^\alpha \varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} D^\alpha \varphi(x), \quad |\alpha| \leqslant j$$

este uniformă în Ω.

Evident, funcționala f, prelungită după cum s-a arătat mai sus, este continuă în $\mathfrak{M}^{(j)}$: dacă $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{j} \varphi$, atunci $(f, \varphi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (f, \varphi)$. Din cele expuse rezultă că o distribuție de ordin finit $\leqslant j$ poate fi tratată ca distribuție pe spațiul funcțiilor test $\mathscr{D}_j(\Omega) = \mathfrak{M}^{(j)}(\Omega)$; clasa acestor distribuții o notăm cu $\mathscr{D}'_j(\Omega)$. De asemenea, este evident că dacă $f \in \mathscr{D}'_j(\Omega)$, atunci restricția funcționalei f la mulțimea $\mathscr{D} = \mathfrak{M}^{(\infty)}(\Omega)$ este o distribuție de clasă $\mathscr{D}'$.

Clasa $\mathscr{D}'_j$ este evident liniară; o distribuție din clasa $\mathscr{D}'_j$ se poate înmulți cu orice funcție $\Psi \in C^{(j)}(\Omega)$. Produsul $f\Psi$ se definește prin relația

$$(f\Psi, \varphi) = (f, \Psi\varphi); \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}_j. \tag{3}$$

Se verifică ușor că o astfel de înmulțire nu ne scoate din clasa $\mathscr{D}'_j(\Omega)$: dacă $f \in \mathscr{D}'_j(\Omega)$ și $\Psi \in C^{(j)}(\Omega)$, atunci $f\Psi \in \mathscr{D}_j(\Omega)$. Diferențierea ne scoate din clasa $\mathscr{D}'_j$: este ușor de observat că dacă $f \in \mathscr{D}'_j$, atunci există $D^\alpha f$, $|\alpha| = j$ (în sensul distribuțiilor) și $D^\alpha f \in \mathscr{D}'_{j-|\alpha|}$.

§ 4. SOLUȚII DIN CLASA DISTRIBUȚIILOR. SOLUȚII FUNDAMENTALE

Să analizăm ecuația diferențială

$$Lu = \sum_{|\alpha|=0}^{s} A_\alpha(x)\ D^\alpha u = f(x) \tag{1}$$

într-un domeniu oarecare $\Omega \subset E_m$; putem avea $\Omega = E_m$. Vom presupune că $A_\alpha \in C^{(j+|\alpha|)}(\bar{\Omega})$, unde j este un număr întreg, $0 \leqslant j \leqslant \infty$. Vom căuta soluția ecuației (1) în $\mathscr{D}'_j(\Omega)$; dacă u este o astfel de soluție, atunci $s(u) \leqslant j$, $s(A_\alpha D^\alpha u) \leqslant j + |\alpha|$ și partea stîngă a ecuației (1) este o distribuție de clasă $\mathscr{D}'_{j+s}(\Omega)$; de aceea vom presupune că termenul liber al ecuației $f \subset \mathscr{D}'_{j+s}(\Omega)$. Dacă soluția u de clasă $\mathscr{D}'_j(\Omega)$ există, atunci ea poate fi privită ca o soluție generalizată a ecuației diferențiale date din clasa distribuțiilor; această soluție se definește prin identitatea

$$\left(\sum_{|\alpha|=0}^{s} A_\alpha D^\alpha u,\ \varphi \right) = (f, \varphi); \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}_{j+s}(\Omega). \tag{2}$$

Ținînd seama de formula de diferențiere a distribuțiilor și de regula de înmulțire a acestora cu o funcție de clasă $C^{(l)}(\Omega)$, $l \leqslant \infty$, identitatea (2) poate fi înlocuită prin relația echivalentă

$$\left(u, \sum_{|\alpha|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_\alpha \varphi) \right) = (f, \varphi),$$

sau, mai concis,

$$(u, M\varphi) = (f, \varphi); \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}_{j+s}(\Omega), \tag{3}$$

unde M este expresia diferențială formal adjunctă lui L.

Din relațiile (3) și (1.4) se deduce ușor că: soluția generalizată local integrabilă a ecuației (1) poate fi privită ca distribuție regulată, care este soluție generalizată a aceleiași ecuații în sensul din acest paragraf.

Un rol deosebit de important îl joacă soluțiile ecuației

$$(Lv)(y) = \sum_{|\alpha|=0}^{s} A_\alpha(y) D_y^\alpha v = \delta(x - y); \tag{4}$$

ele se numesc *soluții fundamentale* ale expresiei diferențiale L sau ale ecuației $Lu = 0$. Este evident că soluția fundamentală este funcție de două puncte $x, y \in \Omega$: $v = v(x, y)$. Conform relației (3), soluția fundamentală satisface relația

$$(v(x - y), (M\varphi)(y)) = (\delta(x - y), \varphi(y)) = \varphi(x); \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}_{j+s}(\Omega). \tag{5}$$

Astfel, dacă ecuația formal adjunctă $M\varphi = g(x)$ are soluția $\varphi \in \mathscr{D}_{j+s}(\Omega)$ și se cunoaște o soluție fundamentală oarecare v a expresiei diferențiale L, atunci funcția φ se poate calcula cu ajutorul relației (5). Dacă expresia L este formal autoadjunctă, atunci relația (5) se reduce la următoarea

$$(v(x - y), (L\varphi)(y)) = \varphi(x); \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}_{j+s}(\Omega). \tag{6}$$

§ 5. SOLUȚIA FUNDAMENTALĂ A ECUAȚIEI LUI LAPLACE

Soluția fundamentală a ecuației lui Laplace $\Delta u = 0$ va fi căutată ca o distribuție de clasă $\mathscr{D}'(E_m)$. Ea satisface ecuația

$$-\Delta v = \delta(x - y). \tag{1}$$

Este suficient să se rezolve ecuaţia

$$-\Delta_x v = \delta(x); \tag{2}$$

dacă $v(x)$ este soluţia acestei ecuaţii, atunci $v(x-y)$ este soluţia ecuaţiei (1).

Evident, distribuţia lui Dirac $\delta(x)$ depinde numai de $\rho = |x|$, cu alte cuvinte, ea este invariantă în raport cu rotaţia axelor de coordonate. Aceeaşi proprietate o are şi operatorul lui Laplace. Într-adevăr fie în E_m transformarea ortogonală de coordonate

$$x_j = \alpha_{jk}\xi_k; \quad \alpha_{jk}\alpha_{ik} = \delta_{ij}; \quad \alpha_{jk}\alpha_{jl} = \delta_{kl}.$$

Atunci $\xi_k = a_{jk}x_j$, de unde

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial \xi_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} = \alpha_{jk}\frac{\partial u}{\partial \xi_k} \quad \text{şi} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} = \alpha_{ik}\alpha_{il}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k\,\partial \xi_l}.$$

Punînd $i = j$ şi sumînd, găsim

$$\Delta_x u = \alpha_{jk}\alpha_{jl}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k\,\partial \xi_l} = \delta_{kl}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k\,\partial \xi_l} = \Delta_\xi u.$$

Prin urmare, ecuaţia (2) este invariantă în raport cu rotaţia axelor de coordonate. Vom căuta soluţia acestei ecuaţii ca avînd aceeaşi proprietate, adică să depindă numai de ρ. Fie $u = u(\rho)$. Avem

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = u'(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x_k} = \frac{x_k}{\rho}u'(\rho)$$

şi de aici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \frac{x_k^2}{\rho^2}u''(\rho) + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{x_k^2}{\rho^3}\right)u'(\rho).$$

Sumînd după k, obţinem

$$\Delta u = u''(\rho) + \frac{m-1}{\rho}u'(\rho). \tag{*}$$

Dacă $\rho \neq 0$, atunci $\delta(x) = 0$ şi se obţine ecuaţia

$$u''(\rho) + \frac{m-1}{\rho}u'(\rho) = 0, \quad \rho \neq 0. \tag{3}$$

Dacă $m > 2$, atunci soluţia generală a ecuaţiei (3) este $u(\rho) = c\,\rho^{2-m} + c_1$; $c, c_1 = \text{const}$. Termenul c_1, care satisface ecuaţia lui Laplace omogenă, poate fi neglijat; înlocuind apoi x cu $x - y$ şi, prin urmare, ρ cu $r = |x - y|$, obţinem $v(x, y) = cr^{2-m}$, unde mai trebuie să fie definită constanta c. Să arătăm că această constantă poate fi, într-adevăr, astfel aleasă încît funcţia $v(x, y)$ să satisfacă ecuaţia (1). Fie, conform relaţiei (4.6), expresia (φ — o funcţie finită în Ω)

$$J = (v(x, y),\ (L\varphi)(y)) = -(v(x, y),\ \Delta\varphi(y)). \tag{4}$$

Distribuţia v este regulată întrucît funcţia r^{2-m} este local integrabilă în raport cu y pentru orice x fixat şi deci expresia (4) poate fi reprezentată sub forma

$$J = -c\int_\Omega r^{2-m}\Delta\varphi(y)\,dy. \tag{5}$$

Fie Ω' un subdomeniu interior mărginit al lui Ω, astfel încît $x \in \Omega'$ şi supp $\varphi \subset \Omega'$. Atunci în exteriorul lui Ω' şi pe frontiera sa funcţia φ se anulează împreună cu toate derivatele sale; de aici

$$J = -c\int_{\Omega'} r^{2-m}\Delta\varphi(y)\,dy = -c\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega'\setminus(r<\varepsilon)} r^{2-m}\Delta\varphi(y)\,dy.$$

În domeniul mărginit şi închis $\overline{\Omega}' \setminus (r < \varepsilon)$ (fig. 8) ambele funcţii r^{2-m} şi $\varphi(y)$ sînt de două ori continuu diferenţiabile şi deci se poate aplica formula Green (6.7) cap. 9:

$$\int_{\Omega'\setminus(r<\varepsilon)} \frac{1}{r^{m-2}}\Delta\varphi(y)\,dy =$$

$$= \int_{\Omega'\setminus(r<\varepsilon)} \varphi(y)\Delta_y\frac{1}{r^{m-2}}\,dy +$$

$$+\int_\Gamma\left(\frac{1}{r^{m-2}}\frac{\partial\varphi(y)}{\partial\nu} - \varphi(y)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right)d\Gamma +$$

$$+\int_{S_\varepsilon}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\frac{\partial\varphi(y)}{\partial\nu} - \varphi(y)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right)dS_\varepsilon; \tag{6}$$

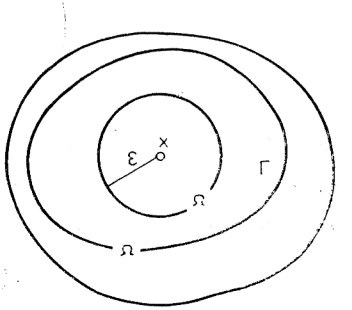

Fig. 8

aici prin Γ s-a notat frontiera domeniului Ω'. Prima integrală din membrul drept se anulează deoarece, după cum s-a arătat mai sus,

$\Delta_y r^{2-m} = 0$ pentru $r \neq 0$. A doua integrală se anulează și ea întrucît funcția φ și derivatele ei sînt egale cu zero pe Γ. Avem deci

$$J = -c \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial \nu} - \varphi(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right) dS_\varepsilon . \tag{7}$$

Punem $y = x + \varepsilon\theta$, atunci $|\theta| = 1$ și punctul θ parcurge sfera unitate S_1. Conform formulei (2.6) cap. 1, $dS_\varepsilon = \varepsilon^{m-1} dS_1$. Mai departe, pe sfera S_ε, $r = \varepsilon$, normala ν exterioară în raport cu domeniul $\Omega' \setminus (r < \varepsilon)$ are direcția contrară razei și, prin urmare,

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} = -\frac{d}{dr} \frac{1}{r^{m-2}} \Big|_{r=\varepsilon} = \frac{m-2}{\varepsilon^{m-1}};$$

formula (7) capătă forma

$$J = c \lim_{\varepsilon \to 0} \left[-\varepsilon \int_{S_1} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial \nu} dS_1 + (m-2) \int_{S_1} \varphi(x + \varepsilon\theta) dS_1 \right].$$

Primele derivate ale funcției φ sînt mărginite și de aceea prima limită din membrul drept este egală cu zero. A doua limită este egală cu $c(m-2)\,|S_1|\varphi(x)$. Dacă punem $c = 1/(m-2)\,|S_1|$, atunci obținem $J = \varphi(x)$. Aceasta arată că funcția

$$v(x, y) = \frac{1}{(m-2)|S_1|} \frac{1}{r^{m-2}} \tag{8}$$

este soluția fundamentală a ecuației lui Laplace, dacă $m > 2$.

Fie acum $m = 2$. În acest caz soluția generală a ecuației (3) are forma $c \ln \frac{1}{r} + c_1$. Aplicînd raționamentul de mai sus se deduce că în cazul bidimensional soluția fundamentală a ecuației lui Laplace are forma

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}.$$

Observație. Înlocuind expresia (8) în ecuația (1), observăm că distribuția δ satisface identitatea

$$\delta(x - y) = -\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{(m-r)|S_1|} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} \frac{1}{r^{m-2}},$$

sau, dacă se efectuează o diferențiere și se pune $y = 0$,

$$\delta(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{(m-2)|S_1|} \frac{x_j}{\rho^m}. \tag{9}$$

Funcțiile de sub semnul de diferențiere din (9) sînt local integrabile în orice domeniu; definiția din § 3 arată că ordinul de singularitate al distribuției δ nu depășește unitatea: $s(\delta) \leqslant 1$. Să arătăm că $s(\delta) = 1$. Să presupunem contrariul, adică $s(\delta) = 0$, ceea ce înseamnă că distribuția δ este local integrabilă. Avînd ca suport un singur punct, originea coordonatelor, această distribuție va fi echivalentă cu zero, ceea ce contrazice identitatea $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$, ce definește distribuția lui Dirac.

§ 6. SOLUȚIA FUNDAMENTALĂ A ECUAȚIEI CĂLDURII

Prin modificări simple putem scrie ecuația căldurii sub forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0. \tag{1}$$

Vom construi soluția fundamentală $v(x - y, t - \tau)$ a operatorului adjunct cu operatorul (1); ea satisface ecuația

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + \Delta_y v = -\delta(x - y, t - \tau). \tag{2}$$

Notăm cu $\delta(x, t)$ distribuția lui Dirac în spațiul cu $m + 1$ variabile, $x_1, x_2, \ldots, x_m, t$. Ca și în paragraful precedent, este suficient să se rezolve ecuația

$$-\frac{\partial v}{\partial t} + \Delta_x v = -\delta(x, t) \tag{3}$$

și în ecuația obținută să se înlocuiască x cu $x - y$ și t cu $t - \tau$.

Ecuația (3) este invariantă în raport cu rotația axelor $x_1, x_2, \ldots, x_m$ și de aceea vom căuta soluția acestei ecuații care depinde numai de t și $\rho = |x|$; ea satisface ecuația mult mai simplă (vezi § 5)

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} - \frac{(m-1)}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} = \delta(x, t). \tag{4}$$

Problema poate fi încă simplificată plecînd de la următoarele considerente. Să arătăm cum se modifică distribuția δ dacă înlocuim x cu kx și t cu $k^2 t$, unde $k = \text{const} > 0$. Notăm cu $\delta_n(x, t)$ funcția cu

următoarele proprietăţi

$$\delta_n(x, t) \geqslant 0; \quad \delta_n(x, t) = 0, \quad \rho^2 + t^2 > \frac{1}{n^2} \int\limits_{E_{m+1}} \delta(x, t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 1.$$

Dacă φ este o funcţie test, atunci $\int\limits_{E_{m+1}} \delta_n(x, t)\varphi(x, t)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}t =$

$= \varphi(x^*, t^*) \int\limits_{E_{m+1}} \delta_n(x, t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \varphi(x^*, t^*)$, unde (x^*, t^*) este un punct oarecare al bilei $\rho^2 + t^2 < n^{-2}$. De aici rezultă că $\delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}'} \delta$. Mai mult, avem şi egalităţile

$$(\delta(kx, k^2t), \varphi(x, t)) = \lim_{n\to\infty} \delta_n((kx, k^2t), \varphi(x, t)) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{E_{m+1}} \delta_n(kx, k^2t)\varphi(x, t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{E_{m+1}} k^{-m-2}\delta_n(x, t)\varphi\left(\frac{x}{k}, \frac{t}{k^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t =$$

$$= k^{-m-2} \lim_{n\to\infty} \left(\delta_n(x, t), \varphi\left(\frac{x}{k}, \frac{t}{k^2}\right)\right) =$$

$$= k^{-m-2}\left(\delta(x, t), \varphi\left(\frac{x}{k}, \frac{t}{k^2}\right)\right) = k^{-m-2}\varphi(0, 0) =$$

$$= k^{-m-2}(\delta(x, t), \varphi(x, t)),$$

ceea ce arată că

$$\delta(kx, k^2t) = k^{-m-2}\delta(x, t). \tag{5}$$

Dacă în ecuaţia (4) înlocuim pe x cu kx şi t cu k^2t, atunci obţinem că funcţia $k^m v(k\rho, k^2t)$ satisface şi ca aceeaşi ecuaţie. Vom căuta soluţia pentru care

$$k^m v(k\rho, k^2t) = v(\rho, t); \quad \forall k > 0. \tag{6}$$

Fie $t > 0$. Punînd în (6) $k = t^{-1/2}$ şi notînd $\rho^2 t^{-1} = z$, $v(\rho t^{-1/2}, 1) = w(z)$, se observă că soluţia căutată trebuie să aibă forma $v(\rho, t) = t^{-m/2}w(z)$. Introducem această expresie în (4) ţinînd seama şi de

faptul că $t > 0$, $\rho > 0$. Atunci $\delta(x, t) = 0$ şi ecuaţia devine omogenă. Pentru funcţia $w(z)$ se obţine ecuaţia diferenţială ordinară

$$4z\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2} + (2m + z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + \frac{m}{2}w = 0. \tag{7}$$

Una din soluţiile ecuaţiei (7) este $w = ce^{-z/4}$; a doua soluţie conduce la funcţia v, care pentru $t = 0$ satisface ecuaţia omogenă a căldurii şi de aceea nu prezintă interes pentru noi. În acest fel ajungem la funcţia $v(x, t) = ct^{-m/2}\, e^{-\rho^2/4t}$, care pentru $t > 0$ satisface ecuaţia omogenă a căldurii. Se poate arăta că soluţia fundamentală a ecuaţiei adjuncte a căldurii are forma

$$v(x - y, t - \tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\sqrt{\pi(t-\tau)})^m}\, e^{-\frac{r^2}{4(t-\tau)}}, & \tau < t, \\ 0, & \tau \geqslant t, \end{cases} \tag{8}$$

această demonstraţie se va da în §1 cap. 23.

§ 7. SOLUŢIA FUNDAMENTALĂ A ECUAŢIEI UNDELOR

Scriem ecuaţia undelor sub forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_x u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0. \tag{1}$$

Soluţia fundamentală $v(x - y, t - \tau)$ satisface ecuaţia

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} - \Delta_y v = \delta(x - y, t - \tau). \tag{2}$$

Simplificăm problema căutării soluţiei fundamentale (ca şi în cazul ecuaţiei căldurii) în două direcţii. Mai întîi vom căuta soluţia care depinde numai de $t - \tau$ şi $r = |x - y|$, ceea ce conduce la ecuaţia

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{m - 1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = \delta(x - y, t - \tau). \tag{3}$$

Mai departe, aplicînd raţionamentul din paragraful precedent, găsim că

$$\delta(kx, kt) = k^{-m-1}\delta(x, t), \tag{4}$$

de aceea, dacă în ecuația (3) înlocuim $x - y$ și $t - \tau$ respectiv cu $k(x - y)$ și $k(t - \tau)$, atunci, după cum se constată ușor, funcția $k^{m-1}v(kr, k(t - \tau))$ satisface aceeași ecuație. Vom căuta soluția ecuației (3) care satisface identitatea

$$k^{m-1}v(kr, k(t - \tau)) = v(r, t - \tau); \quad \forall k. \tag{5}$$

Punînd $k = r^{-1}$ și notînd $(t - \tau)/r = \lambda$; $v(1, (t - \tau)/r) = w(\lambda)$, găsim că soluția căutată trebuie să aibă forma $v(r, t - \tau) = r^{-m+1}w(\lambda)$. Această soluție o vom construi în modul următor. Punem $r \neq 0$, $t \neq \tau$, atunci $\delta(x - y, t - \tau) = 0$ și ecuația (3) devine omogenă:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{m-1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = 0. \tag{3a}$$

Să căutăm soluțiile acestei ecuații care să fie funcții omogene de ordin zero relativ la r și $t - \tau$, adică soluții de forma $q(\lambda)$. Atunci

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} q(\lambda) = \frac{1}{r^{m-1}} q^{(m-1)}(\lambda); \tag{6}$$

prin urmare, se poate pune

$$v(r, t - \tau) = \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} q(\lambda) = \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} q\left(\frac{t - \tau}{r}\right). \tag{7}$$

Înlocuind în ecuația (3a) pe v cu $q(\lambda)$ obținem diferențială ordinară

$$(\lambda^2 - 1)q''(\lambda) - (m - 3)\lambda q'(\lambda) = 0 \tag{8}$$

a cărei soluție generală se poate scrie sub forma $q(\lambda) = Cq_0(\lambda) + C_1$, unde

$$q_0(\lambda) = \int_1^\lambda (z^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} dz. \tag{9}$$

Remarcăm că ecuația $\lambda = 1$, adică $t - \tau = r$, definește pînza inferioară a unui con cu vîrful în (x, t) și axa paralelă cu axa Ot; este ușor de constatat că acesta este caracteristic pentru ecuația undelor. Amănunte despre acesta se pot găsi în § 3 cap. 21.

Constanta C_1, care verifică ecuația omogenă a undelor pentru orice valori ale lui τ și y poate fi neglijată.

Vom defini funcția $q_0(\lambda)$ prin relația (9) numai pentru $\lambda > 1$ dacă $t - \tau > r$, adică în pînza inferioară a conului caracteristic cu vîrful în (x, t); pentru $\lambda \leqslant 1$ dacă $t - \tau \leqslant r$ pentru

$$q_0(\lambda) = 0. \tag{10}$$

Se poate arăta (vezi cap. 24. § 2) că soluția fundamentală a ecuației undelor se obține dacă luăm $C = \dfrac{1}{(m-2)!\,|S_1|}$, astfel că soluția fundamentală în cazul dat este, în general, distribuția

$$v(x - y, t - \tau) = \frac{1}{(m-2)!\,|S_1|}\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} q_0\left(\frac{t - \tau}{r}\right). \tag{11}$$

Să analizăm cazurile $m = 2$ și $m = 3$. Dacă $m = 2$, atunci

$$q_0(\lambda) = \int_1^\lambda \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \ln(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}), \ \lambda > 1.$$

Aceasta ne conduce la cunoscuta *soluție Volterra*, pe care o notăm cu $v_0(x - y, t - \tau)$:

$$v_0(x - y, t - \tau) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{t - \tau}{r} + \sqrt{\dfrac{(t - \tau)^2}{r^2} - 1}\right), & t - \tau > r, \\ 0, & t - \tau \leqslant r; \end{cases} \tag{12}$$

soluția fundamentală se definește prin relația

$$v(x - y, t - \tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\sqrt{(t - \tau)^2 - r^2}}, & t - \tau > r, \\ 0, & t - \tau \leqslant r. \end{cases} \tag{13}$$

Dacă $m = 3$, atunci relația (11) dă următoarea expresie a soluției fundamentale:

$$v(x - y, t - \tau) = \frac{1}{4\pi r}\frac{\partial q_1(\lambda)}{\partial t}, \ \lambda = \frac{t - \tau}{r},$$

unde

$$q_1(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda > 1, \\ 0, & \lambda \leqslant 1; \end{cases}$$

de aici

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} = \frac{1}{r}\,\delta\left(\frac{t-\tau}{r} - 1\right).$$

După cum arată egalitatea (4), în spaţiul $(m-1)$-dimensional distribuţia δ este omogenă de ordin $-(m-1)$; în acest caz funcţia δ unidimensională este omogenă de ordin -1 şi

$$\delta\left(\frac{t-\tau}{r} - 1\right) = r\delta(t-\tau-r),$$

şi, în final, pentru soluţia fundamentală a ecuaţiei undelor în spaţiul tridimensional, obţinem

$$v(x-y, t-\tau) = \frac{1}{4\pi r}\,\delta(t-\tau-r). \tag{14}$$

În mod analog se obţine soluţia fundamentală pentru orice m impar:

$$v(x-y, t-\tau) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|\,r^{m-2}}\,\delta\,(t-\tau-r). \tag{15}$$

Se poate găsi uşor expresia lui v şi pentru m par.

Capitolul 11

ECUAŢIA LUI LAPLACE ŞI FUNCŢII ARMONICE

§ 1. NOŢIUNI DE BAZĂ

Cea mai simplă şi importantă ecuaţie eliptică este ecuaţia lui Laplace, care are forma

$$-\Delta u = f(x), \tag{1}$$

unde $f(x)$ este o funcţie dată. Dacă $f(x) \not\equiv 0$, atunci ecuaţia (1) se numeşte ecuaţia lui Laplace *neomogenă*. Pentru $f(x) \equiv 0$ avem ecuaţia lui Laplace *omogenă*

$$\Delta u = 0. \tag{2}$$

Adesea ecuaţia lui Laplace neomogenă se numeşte *ecuaţia lui Poisson*.

Ecuaţiile (1) şi (2) pot fi scrise explicit astfel:

$$-\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f(x) \quad \text{şi} \quad \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0.$$

Fie Γ o suprafaţă închisă, nu neapărat conexă, reprezentînd frontiera domeniului Ω, mărginit (fig. 9) sau nemărginit (fig. 10).

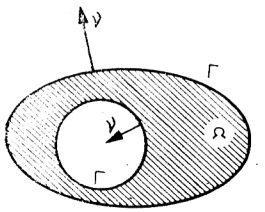

Fig. 9

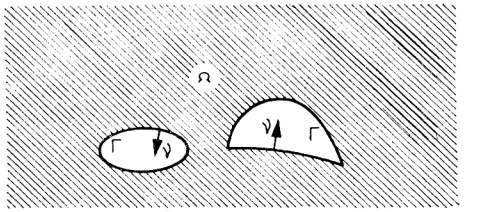

Fig. 10

În ambele cazuri presupunem că Γ este mărginită. Vom analiza comportarea soluţiilor ecuaţiei lui Laplace omogenă în astfel de domenii.

Un interes deosebit îl prezintă de asemenea studiul soluţiilor ecuaţiilor eliptice, în particular, a ecuaţiei lui Laplace, în domenii ale căror frontiere sînt suprafeţe infinite. Nu ne vom ocupa în această carte de astfel de situaţii, cu o singură excepţie (cap. 14), unde vom examina cazul semispaţiului.

Funcţia $u(x)$ se numeşte *aromatică în domeniul mărginit* Ω, dacă în acest domeniu ea este de două ori continuu diferenţiabilă şi dacă satisface ecuaţia lui Laplace omogenă. Vom spune că funcţia $u(x)$ este *armonică în domeniul nemărginit* Ω dacă în fiecare punct al acestui domeniu, care se găseşte la o distanţă finită faţă de origine, $u(x)$ este de două ori continuu diferenţiabilă, satisface ecuaţia lui Laplace omogenă şi dacă pentru $|x|$ suficient de mare are loc inegalitatea

$$|u(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^{m-2}}, \tag{3}$$

unde m este dimensiunea spaţiului, iar C o constantă arbitrară. În cazul domeniului bidimensional ($m = 2$) condiţia (3) arată că o funcţie armonică într-un domeniu nemărginit este mărginită la infinit.

Subliniem că definiţia funcţiei armonice se referă numai la cazul unui *domeniu deschis* (adică o mulţime conexă deschisă); prin funcţie armonică într-un domeniu închis, înţelegem o funcţie armonică într-un domeniu deschis (în sensul precizat mai sus) care conţine domeniul închis considerat.

Menţionăm, de asemenea, că definiţia funcţiilor armonice nu impune nici o restricţie asupra comportării funcţiilor pe frontiera domeniului.

Exemple. **1.** Dacă Ω este un domeniu nemărginit, atunci funcţia $u(x) \equiv 1$ este armonică numai pentru $m = 2$. Dacă $m > 2$, atunci într-un domeniu nemărginit această funcţie nu este armonică. Ea este însă armonică în orice domeniu mărginit pentru orice m.

2. În plan, funcţia $u(x, y) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, unde $z = x + iy$, este armonică în orice domeniu care nu conţine originea axelor de coordonate.

3. Funcţia $\operatorname{Re}\sqrt{z}$, $z = x + iy$, este armonică în discul $|z| < R$ (unde R este un număr pozitiv arbitrar) mai puţin secţiunea realizată de-a lungul oricăreia din razele sale.

4. Funcţia $u = x^2 + y^2$ nu este armonică în nici un domeniu, deoarece ea nu satisface ecuaţia lui Laplace omogenă: $\Delta(x^2 + y^2) = 4 \neq 0$.

5. Funcţia $u = x^2 - y^2$ este armonică în orice domeniu mărginit.

6. Soluţia fundamentală a ecuaţiei lui Laplace

$$\frac{1}{(m-2)|S_1|}\frac{1}{r^{m-2}}, \quad r = |x - \xi|, \quad m > 2,$$

este armonică în orice domeniu (mărginit sau nu) dacă acest domeniu nu conţine punctul ξ. Pentru $m = 2$ soluţia fundamentală $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$ este armonică în orice domeniu mărginit care nu conţine punctul ξ.

§ 2. SCHIMBAREA DE VARIABILE ÎN OPERATORUL LUI LAPLACE

Fie Ω un domeniu mărginit din spaţiul E_m şi fie $u \in C^{(2)}(\Omega)$. Notăm

$$\Delta_x u = -f(x). \tag{1}$$

Să înmulţim egalitatea (1) cu o funcţie η arbitrară finită în Ω şi să integrăm pe Ω. Aplicînd formula (6.7) cap. 9 şi ţinînd seama de faptul că $\eta|_{\partial\Omega} = 0$, obţinem identitatea integrală

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \eta}{\partial x_j} - f\eta\right) dx = 0, \ \forall \eta \in \mathfrak{M}^{(\infty)}(\Omega). \tag{2}$$

Să arătăm că ecuaţia (1) rezultă din relaţia (2) şi, prin urmare, relaţiile (1) şi (2) sînt echivalente. În (2) schimbăm x cu ξ şi punem $\eta = \omega_h(r)$, unde $r = |\xi - x|$ iar x este un punct a cărui distanţă pînă la $\partial\Omega$ este mai mare sau egală cu h. Atunci identitatea (2) devine $\Delta_x u_h(x) = -f_h(x)$. Pentru $h \to 0$, pe baza teoremelor 2.3.1 şi 3.2.1, obţinem $\Delta_x u(x) = -f(x)$.

Să considerăm în Ω transformarea

$$z_k = z_k(x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{3}$$

Să presupunem că transformarea (3) este biunivocă, de două ori continuu diferenţiabilă şi jacobianul

$$J = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{D(z_1, z_2, \ldots, z_m)} \neq 0.$$

Notînd

$$g_{jk} = \frac{\partial z_j}{\partial x_l}\frac{\partial z_k}{\partial x_l},$$

atunci

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j} = g_{jk}\frac{\partial u}{\partial z_j}\frac{\partial v}{\partial z_k}; \ \forall u, v,$$

şi, în particular, pentru $v = u$, avem

$$g_{jk}\frac{\partial u}{\partial z_j}\frac{\partial u}{\partial z_k} = \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 = (\operatorname{grad} u)^2.$$

Astfel, g_{jk} reprezintă coeficienții termenilor $\dfrac{\partial u}{\partial z_j}\dfrac{\partial u}{\partial z_k}$ din expresia lui (grad u)^2 în noile variabile $z_1, z_2, \ldots, z_m$.

În variabilele z identitatea (2) capătă forma

$$\int_\Omega \left[g_{jk} \frac{\partial u}{\partial z_k} \frac{\partial \eta}{\partial z_j} - f\eta \right] J \, dz = 0.$$

Integrăm prin părți primul membru din stînga. Prin aceasta integrala de suprafață se anulează, deoarece $\eta|_{\partial\Omega} = 0$ și se obține

$$\int_\Omega \eta \left[\frac{\partial}{\partial z_j} \left(g_{jk} J \frac{\partial u}{\partial z_k} \right) + J \right] dx = 0. \tag{4}$$

Notînd cu $\Phi(x)$ factorul care înmulțește pe η sub integrala (4), avem

$$\int_\Omega \eta(x)\, \Phi(x)\, dx = 0,$$

și schimbînd x cu ξ, obținem

$$\int_\Omega \eta(\xi)\, \Phi(\xi) d\xi = 0.$$

Fie acum $r = |x - \xi| < \rho$, $\xi \in \Omega$, $\eta = \omega_h(r)$ cu h mai mic decît distanța de la x la $\partial\Omega$. Atunci obținem $\Phi_h(x) = 0$. Odată cu x funcția $\Phi(x)$ este continuă pe o vecinătate a acestuia, ceea ce conform teoremei 2.2.1 implică $\Phi(x) = 0$, de unde ținînd seama că $f = -\Delta_x u$, obținem expresia lui $\Delta_x u$ în noile variabile:

$$\Delta_x u = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial z_j} \left(g_{jk} J \frac{\partial u}{\partial z_k} \right). \tag{5}$$

În cazul cînd noile coordonate sînt ortogonale avem $g_{jk} = 0$, $j \neq k$. Notînd $g_{jj} = H_j^{-2}$ (fără sumare), obținem

$$\Delta_x u = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial z_j} \left(\frac{J}{H_j^2} \frac{\partial u}{\partial z_j} \right). \tag{6}$$

În geometria diferențială se demonstrează că

$$J = H_1 H_2 \ldots H_m.$$

Ca exemplu să deducem expresia operatorului lui Laplace în coordonate sferice. Din formulele (2.3) și (2.17) cap. 1 obținem expresiile lui H_j și J. Considerînd transformarea de variabile $z_1 = r$, $z_2 = \vartheta_1, \ldots, z_m = \vartheta_{m-1}$, avem $H_1 = 1$; $H_j = r\sqrt{q_{j-1}}$, $2 \leqslant j \leqslant m$;

$$J = r^{m-1} \sin^{m-2} \vartheta_1 \sin^{m-3} \vartheta_2 \ldots \sin \vartheta_{m-2},$$

și formula (6) conduce la expresia căutată

$$\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{m-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \delta, \tag{7}$$

unde

$$\delta = -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{q_j \sin^{m-j-1} \vartheta_j} \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} \left(\sin^{m-j-1} \vartheta_j \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} \right). \tag{8}$$

Prezintă interes acele cazuri de schimbări de variabile care nu modifică forma ecuației lui Laplace. Indicăm mai jos două astfel de cazuri importante.

1. În plan transformările conforme conservă armonicitatea funcțiilor. Fie, de exemplu, Ω un domeniu din planul complex $z = x + iy$, iar D un domeniu din planul complex $\zeta = \xi + i\eta$, și să presupunem că funcția olomorfă

$$z = z(\zeta) = x(\xi, \eta) + iy(\xi, \eta)$$

transformă conform domeniul D în Ω. Fie, mai departe, $u(x, y)$ o funcție armonică în Ω. Atunci funcția $\tilde{u}(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ este armonică în D.

Pentru demonstrație să calculăm

$$\Delta_\zeta \tilde{u} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}.$$

Avem

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

și

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2};$$

în mod analog,

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \\ + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}.$$

Adunăm ultimile egalităţi. Ţinînd seama că $x(\xi, \eta)$ şi $y(\xi, \eta)$ sînt partea reală, respectiv imaginară, a funcţiilor olomorfe $z(\zeta)$, rezultă că x şi y sînt funcţii armonice de ξ şi η, satisfăcînd ecuaţiile Cauchy-Riemann. Prin urmare au loc relaţiile

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = -\frac{\partial x}{\partial \eta}.$$

Atunci

$$\Delta_\zeta \tilde{u} = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2\right] \Delta_z u = |z'(\zeta)|^2 \, \Delta_z u, \tag{9}$$

unde

$$\Delta_z u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Dacă $\Delta_z u = 0$, atunci, evident, $\Delta_\zeta \tilde{u} = 0$.

Pe scurt se poate spune că transformările conforme duc o funcţie armonică într-o funcţie armonică.

2. Dacă dimensiunea spaţiului este $m > 2$, atunci există o transformare care duce orice funcţie armonică într-o funcţie de asemenea armonică. Aceasta este *transformarea lui Kelvin*, care duce punctul $x(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ în punctul $x'(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m)$, simetric cu x în raport cu o sferă dată de rază R şi cu centrul în originea axelor de coordonate, iar funcţia dată $u(x)$ în funcţia

$$w(x') = \frac{R^{m-2}}{|x'|^{m-2}} \, u(x). \tag{10}$$

Amintim că punctele x şi x' se numesc *simetrice*, în raport cu sfera considerată mai sus, dacă ele se află pe aceeaşi rază ce porneşte din origine şi $|x| \cdot |x'| = R^2$. Coordonatele carteziene ale punctelor simetrice sînt legate prin relaţia

$$x_k = x'_k \frac{R^2}{|x'|^2}. \tag{11}$$

Să găsim expresia operatorului lui Laplace $\Delta_x u$ în coordonatele $z_k = x'_k$, $k = 1,2,\ldots, m$. Pentru aceasta calculăm g_{jk} şi J. Notînd

$\sum_{k=1}^{m} x_k^2 = \rho^2$, $\sum_{k=1}^{m} x_k'^2 = \rho'^2$, avem $x_k = \frac{R^2}{\rho'^2} x'_k$, $x'_k = \frac{R^2}{\rho^2} x_k$, de unde

$$\frac{\partial x'_k}{\partial x_l} = \frac{R^2}{\rho^2}\delta_{kl} - \frac{2R^2 x_k x_l}{\rho^4}$$

şi, prin urmare,

$$g_{jk} = \left(\frac{R^2}{\rho^2}\delta_{jl} - \frac{2R^2 x_j x_l}{\rho^4}\right)\left(\frac{R^2}{\rho^2}\delta_{kl} - \frac{2R^2 x_k x_l}{\rho^4}\right) = \\ = \frac{R^4}{\rho^4}\delta_{jk} - \frac{2R^4}{\rho^6}\delta_{jl}x_k x_l - \frac{2R^4}{\rho^6}\delta_{kl}x_j x_l + \frac{4R^4}{\rho^8}x_j x_k x_l x_l.$$

Se observă uşor că al doilea şi al treilea termen din dreapta sînt egali între ei şi egali cu $-2R^4 \rho^{-6} x_k x_l$. În ultimul termen $x_l x_l = \rho^2$ şi prin urmare suma ultimilor trei termeni este zero. În final obţinem $g_{jk} = R^4 \rho^{-4} \delta_{jk}$, deci $g_{jk} = 0$, $j \neq k$, şi $H_j = \rho^2 R^{-2} = R^2(\rho')^{-2}$. Rezultă astfel că x'_k sînt ortogonale, ceea ce de altfel se putea observa direct. Acum $J = R^{2m}(\rho')^{-2m}$ şi conform formulei (8) avem

$$\Delta_x u = \frac{\rho'^{2m}}{R^{2m}}\frac{\partial}{\partial x'_j}\left(\frac{R^{2m-4}}{\rho'^{2m-4}}\frac{\partial u}{\partial x'_j}\right).$$

Mai departe, ţinînd cont de relaţia (10), avem

$$\Delta_x u = \frac{\rho'^{2m}}{R^{2m}}\frac{\partial}{\partial x'_j}\left(\frac{R^{2m-4}}{\rho'^{2m-4}}\frac{\partial}{\partial x'_j}\left(\frac{\rho'^{m-2}}{R^{m-2}}w\right)\right) = \\ = \frac{\rho'^{m+2}}{R^{m+2}}\Delta_{x'} w + \frac{\rho'^{2m}}{R^{m+2}} w \frac{\partial}{\partial x'_j}\left(\frac{(m-2)\, x'_j}{\rho'^m}\right).$$

Al doilea termen din dreapta este egal cu zero, deoarece

$$\frac{\partial}{\partial x'_j}\left(\frac{(m-2)\, x'_j}{\rho'^m}\right) = -\frac{\partial}{\partial x'_j}\frac{\partial}{\partial x'_j}\left(\frac{1}{\rho'^{m-2}}\right) = -\Delta_{x'}\left(\frac{1}{\rho'^{m-2}}\right) = 0,$$

și în final obținem

$$\Delta_x u = \frac{\rho'^{m+2}}{R^{m+2}} \Delta_{x'} w. \tag{12}$$

Acum, dacă $\Delta_x u = 0$, rezultă $\Delta_{x'} w = 0$, și deci transformarea lui Kelvin conservă ecuația lui Laplace omogenă.

Observație. Fie funcția $u(x)$ armonică în domeniul nemărginit Ω, $0 \notin \Omega$. Transformarea (11) duce Ω într-un domeniu mărginit Ω', care conține originea axelor de coordonate. În acest caz nu se poate deocamdată afirma că funcția corespunzătoare w este armonică în Ω', ci numai că această funcție este armonică în $\Omega' \setminus \{0\}$ și mărginită în vecinătatea originei. Faptul că w este armonică și în origine rezultă din teorema ce va fi demonstrată în cap. 12, § 7. O observație analoagă este valabilă și pentru transformările conforme din plan.

§ 3. REPREZENTAREA INTEGRALĂ A FUNCȚIILOR DE CLASĂ $C^{(2)}$ ȘI A FUNCȚIILOR ARMONICE

În paragraful 5, capitolul 10 s-a construit soluția fundamentală a ecuației lui Laplace. Conform definiției, soluția fundamentală este o distribuție. Însă, în cazul dat, după cum se vede din formula (5.8) cap. 10, soluția fundamentală este local integrabilă; acest fapt extinde considerabil domeniul aplicațiilor și permite să se obțină multe rezultate importante.

În cele ce urmează vom nota, nu cu x și y ca mai înainte, ci cu x, ξ două puncte oarecare din E_m.

Fie Ω un domeniu mărginit cu frontiera Γ o suprafață netedă pe porțiuni și fie $u(\xi) \in C^{(2)}(\overline{\Omega})$.

Alegem în Ω un punct arbitrar x pe care îl izolăm printr-o bilă de rază $r = |\xi - x| < \varepsilon$; presupunem ε suficient de mic, astfel încît sfera împreună cu interiorul ei să fie situată în Ω. Notăm $\Omega^{(\varepsilon)} = \Omega \setminus (r < \varepsilon)$. Atît $u(\xi)$, cît și soluția fundamentală a ecuației lui Laplace (formula (5.8) cap. 10) sînt de clasă $C^{(2)}(\overline{\Omega^{(\varepsilon)}})$ și deci li se poate aplica formula Green (6.10) cap. 9:

$$\int_{\Omega \setminus (r<\varepsilon)} (v\Delta u - u\Delta v)\, \mathrm{d}\xi = \int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}_\xi \Gamma + \int_{S_\varepsilon} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}_\xi S_\varepsilon. \tag{1}$$

Formula (1) este în esență identică cu formula (6.5) cap. 10: dacă în ultima schimbăm Ω' cu Ω, φ cu u și y cu ξ, atunci formulele amintite coincid. Unica deosebire esențială constă în aceea

că funcția $u(\xi)$ nu este finită și prima integrală din dreapta a relației (1) nu se anulează; remarcăm, de asemenea, că această integrală nu depinde de ε.

Fie $\varepsilon \to 0$. Repetînd întocmai raționamentele din § 5, cap. 10, obținem

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega \setminus (r<\varepsilon)} (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\, \mathrm{d}\xi = \int_{\Omega} v(x, \xi)\, \Delta u(\xi)\, \mathrm{d}\xi,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}_\xi S_\varepsilon = -u(x),$$

și ajungem la *reprezentarea integrală a funcțiilor de clasă* $C^{(2)}$:

$$u(x) = \int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}_\xi \Gamma - \int_{\Omega} v\, \Delta u\, \mathrm{d}\xi, \tag{2}$$

unde ν este normala exterioară (în raport cu Ω) la Γ în punctul ξ. Dacă $m > 2$, atunci

$$v(x, \xi) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|} \frac{1}{r^{m-2}}; \quad r = |\xi - x|,$$

și reprezentarea integrală a funcției de clasă $C^{(2)}$ are forma

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)|S_1|} \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right) \mathrm{d}_\xi \Gamma - \frac{1}{(m-2)|S_1|} \int_{\Omega} \frac{1}{r^{m-2}} \Delta u(\xi)\, \mathrm{d}\xi; \tag{3}$$

dacă însă $m = 2$, atunci $v(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$ și obținem

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(\ln \frac{1}{r} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} \right) \mathrm{d}_\xi \Gamma - \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \ln \frac{1}{r}\, \Delta u(\xi)\, \mathrm{d}\xi. \tag{4}$$

Fie acum funcţia $u(\xi)$ armonică în Ω; să presupunem, ca mai înainte, că $u \in C^{(2)}(\overline{\Omega})$. Atunci în formulele (3) şi (4) integralele pe Ω se anulează şi se obţine *reprezentarea integrală a funcţiilor armonice de clasă* $C^{(2)}(\overline{\Omega})$:

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)|S_1|}\int_\Gamma \left[\frac{1}{r^{m-2}}\frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} - u(\xi)\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right] d_\xi \Gamma, \quad m > 2, \tag{5}$$

şi

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \left[\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} - u\xi\frac{\partial}{\partial \nu}\ln\frac{1}{r}\right] d_\xi \Gamma, \quad m = 2. \tag{6}$$

În cele ce urmează vom considera $m > 2$; pentru $m = 2$ raţionamentele şi rezultatele sînt analoage.

Teorema 11.3.1. *O funcţie armonică într-un domeniu oarecare, are în acest domeniu derivate de orice ordin.*

Fie funcţia u armonică în domeniul Ω şi fie x_0 un punct arbitrar din Ω. Construim un domeniu mărginit Ω_1, care conţine punctul x_0 şi care împreună cu frontiera lui Γ_1 este inclus în Ω. Evident, $u \in C^{(2)}(\overline{\Omega}_1)$ şi domeniului Ω_1 i se poate aplica reprezentarea integrală (5):

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\int_{\Gamma_1}\left[\frac{1}{r^{m-2}}\frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} - u\,(\xi)\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right] d_\xi \Gamma; \tag{7}$$

$$x \in \Omega_1.$$

În vecinătatea punctului x_0 funcţia de sub integrala din (7) este continuă în raport cu x şi ξ şi are derivatele de orice ordin în raport cu $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de asemenea continue în raport cu x şi ξ. Conform cunoscutei teoreme de diferenţiere a integralelor ce depind de un parametru, funcţia u are în punctul x_0 derivate de orice ordin în raport cu $x_1, x_2, \ldots, x_m$; aceste derivate se pot obţine derivînd sub semnul integralei în formula (7).

§ 4. NOŢIUNEA DE POTENŢIAL

Reprezentările integrale (3.3) şi (3.4) permit să se introducă trei operatori integrali de tip special. Pentru precizie ne limităm la cazul $m > 2$ şi reprezentarea (3.3).

Fie Γ o suprafaţă mărginită netedă pe porţiuni. În reprezentarea integrală (3.3) înlocuim funcţiile $\Delta u(\xi)$, $\partial u(\xi)/\partial \nu$, $u(\xi)$, respectiv, cu funcţiile arbitrare $\rho(\xi)$, $\mu(\xi)$, $\sigma(\xi)$. Se obţin astfel trei integrale depinzînd de parametrul x

$$\int_\Gamma \frac{1}{r^{m-2}}\mu(\xi)\, d_\xi\Gamma, \quad \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}\sigma(\xi)\, d_\xi\Gamma, \quad \int_\Omega \frac{1}{r^{m-2}}\rho(\xi)\, d\xi,$$

şi care se numesc, respectiv, *potenţial de simplu strat*, *potenţial de dublu strat* şi *potenţial de volum*. Funcţiile $\mu(\xi)$, $\sigma(\xi)$, $\rho(\xi)$ se numesc *densităţile* acestor potenţiale.

Să studiem cele mai simple proprietăţi ale potenţialelor de simplu şi dublu strat. Spre deosebire de formula (3.5), în care se preciza obligator că punctul x se găseşte în interiorul lui Γ, aici vom presupune că x poate să se găsească atît în interiorul, cît şi în exteriorul lui Γ. Cazul $x \in \Gamma$ necesită o examinare specială pe care o vom face în cap. 14.

Teorema 11.4.1. *Dacă densităţile sînt integrabile pe* Γ, *atunci potenţialele de simplu şi dublu strat sînt armonice în orice domeniu mărginit sau nemărginit a cărui închidere nu are puncte comune cu suprafaţa* Γ.

În orice punct $x \notin \Gamma$ potenţialele de simplu şi dublu strat au derivate de orice ordin. Despre aceasta ne putem convinge aplicînd întocmai raţionamentele de la teorema 11.3.1. Dacă D este un domeniu care îndeplineşte condiţiile teoremei de mai sus, atunci ambele potenţiale au în D derivate de orice ordin şi cu atît mai mult derivate de ordinul al doilea.

Mai mult, potenţialele de simplu şi dublu strat satisfac ecuaţia lui Laplace omogenă. Într-adevăr, dacă $x \notin \Gamma$, atunci se poate diferenţia sub integrală. Notînd

$$v(x) = \int_\Gamma \frac{1}{r^{m-2}}\mu(\xi)\, d_\xi\Gamma, \quad w(x) = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}\sigma(\xi)\, d_\xi\Gamma,$$

avem

$$\Delta_x v(x) = \int_\Gamma \Delta_x\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)\mu(\xi)\, d_\xi\Gamma = 0;$$

indicele x de la simbolul Δ arată că diferenţierea se face în raport cu coordonatele punctului x. De asemenea, avem

$$\Delta_x w(x) = \int_\Gamma \Delta_x \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right) \sigma(\xi) \mathrm{d}_\xi \Gamma =$$

$$= \int_\Gamma \sigma(\xi)\, \Delta_x \left(\frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r^{m-2}} \cos(\nu, x_k) \right) \mathrm{d}_\xi \Gamma.$$

Deoarece ν este normala în punctul ξ, atunci $\cos(\nu, x_k)$ nu depinde de x şi deci acesta poate fi scos în afara simbolului Δ_x

$$\Delta_x w(x) = \int_\Gamma \sigma(\xi) \cos(\nu, x_k)\, \Delta_x \left(\frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r^{m-2}} \right) \mathrm{d}_\xi \Gamma =$$

$$= \int_\Gamma \sigma(\xi) \cos(\nu, x_k) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \Delta_x \left(\frac{1}{r^{m-2}} \right) \mathrm{d}_\xi \Gamma = 0 .$$

În cazul domeniilor mărginite D teorema este demonstrată. Dacă însă domeniul D este nemărginit, atunci este necesar să arătăm în plus că $v(x)$ şi $w(x)$ au la infinit estimarea (1.3).

Plasăm originea coordonatelor în interiorul lui Γ. Notînd cu H distanţa cea mai mare dintre punctele suprafeţei Γ, avem $r = |x - \xi| \geqslant |x| - |\xi| \geqslant |x| - H$. Ne interesează comportarea funcţiilor pentru $|x|$ suficient de mare şi de aceea se poate presupune că $|x| > 2H$. Atunci $H < \frac{1}{2}|x|$, $r > \frac{1}{2}|x|$ şi, prin urmare,

$$|v(x)| \leqslant \frac{2^{m-2}}{|x|^{m-2}} \int_\Gamma |\mu(\xi)|\, \mathrm{d}_\xi \Gamma.$$

Ultima integrală este finită deoarece funcţia $\mu(\xi)$ este integrabilă pe Γ. Pentru funcţia $v(x)$ estimarea (1.3) este stabilită; constanta C este dată: $C = 2^{m-2} \int_\Gamma |\mu(\xi)|\, \mathrm{d}_\xi \Gamma$.

Să examinăm acum potenţialul de dublu strat $w(x)$. Avem

$$|w(x)| \leqslant \int_\Gamma |\sigma(\xi)| \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| \mathrm{d}_\xi \Gamma \leqslant$$

$$\leqslant (m-2) \int_\Gamma |\sigma(\xi)| \left| \frac{\xi_k - x_k}{r^m} \right| \cdot |\cos(\nu, x_k)|\, \mathrm{d}_\xi \Gamma$$

şi deoarece $|\xi_k - x_k| \leqslant r$ şi $|\cos(\nu, x_k)| \leqslant 1$, atunci

$$|w(x)| \leqslant m(m-2) \int_\Gamma |\sigma(\xi)| \frac{\mathrm{d}_\xi \Gamma}{r^{m-1}}.$$

Dacă $|x| > 2H$, atunci $r > \frac{1}{2}|x|$ şi, prin urmare,

$$|w(x)| \leqslant \frac{2^{m-1} m(m-2)}{|x|^{m-1}} \int_\Gamma |\sigma(\xi)|\, \mathrm{d}_\xi \Gamma.$$

Funcţia $\sigma(\xi)$ este integrabilă pe Γ şi ca atare integrala din dreapta este finită.

În acest fel, pentru potenţialul de dublu strat este adevărată estimarea mai puternică decît (1.3): potenţialul de dublu strat descreşte la infinit ca $|x|^{-(m-1)}$.

Proprietăţile potenţialelor de simplu şi dublu strat vor fi studiate mai amănunţit în cap. 14.

Dacă suprafaţa Γ împarte spaţiul în două domenii — interior şi exterior —, atunci atît potenţialul de simplu strat, cît şi cel de dublu strat definesc două funcţii armonice: una armonică în domeniul interior, cealaltă — în domeniul exterior.

§ 5. PROPRIETĂŢILE POTENŢIALULUI DE VOLUM

Vom presupune că Ω este un domeniu mărginit din spaţiul E_m, $m > 2$, cu frontiera netedă pe porţiuni. Potenţialul de volum

$$w(x) = \int_\Omega \frac{1}{r^{m-2}} \rho(\xi)\, \mathrm{d}\xi \qquad (1)$$

este o integrală cu singularitate slabă pentru care $\lambda = m - 2$. De aceea o serie de proprietăţi ale potenţialului de volum se deduc direct din teoremele generale referitoare la astfel de integrale. Să formulăm aceste proprietăţi.

Teorema 11.5.1. *Dacă densitatea* $\rho \in L_1(\Omega)$, *atunci potenţialul de volum* (1) *este armonic în oricare din domeniile complementarei lui* Ω.

În cazul general există o mulțime finită sau numărabilă de domenii Ω_1, Ω_2, ..., ale complementarei lui Ω (fig. 11). Fie Ω_j unul dintre aceste domenii. Să considerăm un subdomeniu Ω_j' arbitrar, interior lui Ω_j și fie $x \in \Omega_j'$. Atunci în integrala (1) distanța r este mărginită inferior de un număr pozitiv δ, egal cu cea mai mică distanță dintre punctele frontierelor domeniilor Ω_j și Ω_j' (fig. 11). Integrala (1) satisface condițiile teoremei 1.1.3 pentru $G = \Omega$, $D = \overline{\Omega}_j'$, $u(\xi) = \rho(\xi)$, $\omega = r^{2-m}$. Rezultă astfel că $w \in C^{(\infty)}(\overline{\Omega}_j')$ și cum Ω_j' este un subdomeniu interior arbitrar al lui Ω_j, atunci $w \in C^{(\infty)}(\Omega_j)$ și pentru orice multiindice α avem

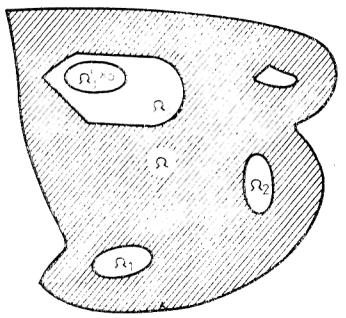

Fig. 11

$$D^{\alpha} w(x) = \int_{\Omega} \rho(\xi)\, D_x^{\alpha} \frac{1}{r^{m-2}}\, d\xi;$$

în particular, $\Delta w(x) = \int_{\Omega} \rho(\xi)\, \Delta_x \frac{1}{r^{m-2}}\, d\xi = 0$. Dacă domeniul Ω este mărginit, atunci armonicitatea funcției (1) este demonstrată; dacă însă Ω este nemărginit, atunci este necesară stabilirea estimării (1.3) la infinit. Aceasta se face aplicînd întocmai raționamentul de la teorema 11.4.1 : dacă H este diametrul domeniului Ω și originea coordonatelor se află în acest domeniu, atunci pentru $|x| > 2H$ vom avea $r > \frac{|x|}{2}$ și $|w(x)| \leqslant 2^{m-2} C |\Omega| \cdot |x|^{2-m}$.

Teorema 11.5.2. *Fie* $\rho \in L_p(\Omega)$, *atunci* :

1) *dacă* $1 \leqslant p < \frac{m}{2}$, *atunci* $w \in L_q(E_m)$, $1 < q < \frac{mp}{m-2p}$;

2) *dacă* $p > \frac{m}{2}$, *atunci* $w \in C(E_m)$;

3) *dacă* $1 \leqslant p < m$, *atunci* $w \in W_q^{(1)}(E_m)$, $1 < q < \frac{mp}{m-p}$;

4) *dacă* $p > m$, *atunci* $w \in C^{(1)}(E_m)$.

Plasăm domeniul Ω în interiorul bilei $B = \{\xi : |\xi| < R\}$, de rază R suficient de mare, și definim densitatea $\rho(\xi)$ ca fiind egală cu zero în exteriorul lui Ω. Evident că $\rho \in L_p(B)$ și

$$w(x) = \int_B \frac{1}{r^{m-2}} \rho(\xi)\, d\xi.$$

Din teorema 1.3.2 rezultă că în condițiile de la punctul 1) ale teoremei de mai sus $w \in L_q(B)$. În exteriorul lui B, după cum se vede din demonstrația teoremei 11.4.1, are loc inegalitatea (1.3) și de aceea $w \in L_q(E_m \setminus B)$, ceea ce conduce la $w \in L_q(E_m)$. În mod analog, utilizînd teorema 1.3.1 se demonstrează afirmația de la punctul 2), iar cu ajutorul teoremei 2.8.1 și a celor de la punctele 3) și 4).

Teorema 11.5.3. *Dacă* $\rho \in L_2(\Omega)$, *atunci potențialul de volum* (1) *admite derivate generalizate ce aparțin de asemenea lui* $L_2(\Omega)$; *acestea se exprimă prin relațiile*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{(m-2)\,|S_1|}{m}\,\delta_{ij}\rho(x) + \int_{\Omega} \rho(\xi)\,\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\,\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi,$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, m. \qquad (2)$$

Dacă $\rho \in \mathrm{Lip}_{\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$, *atunci* $\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathrm{Lip}_{\alpha}(\overline{\Omega}')$ *pentru orice subdomeniu al lui* Ω.

Integrala din relația (2) este singulară. Teorema 11.5.3 este o consecință directă a teoremelor 7.6.2 (prima afirmație) și 7.6.1 (a doua afirmație). Rămîne deci să evaluăm termenul din formula (2) aflat în afara integralei.

Dar

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\,\frac{1}{r^{m-2}} = \frac{(m-2)(\xi_i - x_i)}{r}\,\frac{1}{r^{m-2}};$$

în acest fel, cu notațiile teoremei 7.6.1, $\varphi(x, \theta) = (m-2)(\xi_i - x_i)/r = (m-2)\,(\xi_i - x_i)$, pentru că $r = 1$ pe sfera unitate cu centrul în x, ceea ce conduce la

$$-\int_{S_1} \varphi(x, \theta)\cos(r, x_j)\, dS_1 = -(m-2)\int_{S_1} (\xi_i - x_i)\cos(r, x_j)\, dS_1.$$

Notăm cu B_1 bila de rază unitate cu centrul în x. Pe sfera S_1, care mărginește această bilă, direcția r coincide cu direcția normalei exterioare. Transformînd ultima integrală de suprafață în integrală de volum, după formula de integrare prin părți, găsim expresia căutată :

$$-(m-2)\int_{B_1} \frac{\partial(\xi_i - x_i)}{\partial \xi_j}\, d\xi = -\frac{(m-2)\,|S_1|}{m}\,\delta_{ij};$$

ne-am folosit aici de formula (2.10) cap. 1.

Observaţie. Teorema 11.5.3 poate fi întărită în modul următor : dacă $\rho \in L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, atunci derivatele generalizate $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}$ există şi $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \in L_p(\Omega)$; relaţia (2) rămîne adevărată.

Teorema 11.5.4. *Dacă* $\rho \in L_p(\Omega)$, $p \geqslant 1$, *atunci potenţialul de volum* (1) *este soluţie generalizată a ecuaţiei lui Laplace neomogenă (ecuaţia lui Poisson).*

$$-\Delta w(x) = (m-2)|S_1|\rho(x). \tag{3}$$

Pentru orice $p \geqslant 1$ potenţialul de volum (1) este integrabil, deci şi local integrabil în Ω. Fie $\varphi \in \mathfrak{M}^{(2)}(\Omega)$; atunci

$$-\int_\Omega w(x)\,\Delta\varphi(x)\mathrm{d}x = -\iint_{\Omega\,\Omega} \frac{\rho(\xi)\,\Delta\varphi(x)}{r^{m-2}}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x =$$

$$= -\int_\Omega \rho(\xi)\left\{\int_\Omega \frac{\Delta_x\varphi(x)}{r^{m-2}}\,\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}\xi = -\int_\Omega \rho(x)\left\{\int_\Omega \frac{\Delta_\xi\varphi(\xi)}{r^{m-2}}\,\mathrm{d}\xi\right\}\mathrm{d}x.$$

Pe $\partial\Omega$ are loc relaţia $\varphi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0$ şi din reprezentarea integrală a funcţiilor de clasă $C^{(2)}$ (formula 2.3) rezultă

$$\int_\Omega \frac{\Delta_\xi\varphi(\xi)}{r^{m-2}}\,\mathrm{d}\xi = -(m-2)|S_1|\,\varphi(x).$$

Astfel,

$$-\int_\Omega w(x)\,\Delta\varphi(x)\mathrm{d}x = (m-2)|S_1|\int_\Omega \rho(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \forall\varphi \in \mathfrak{M}^{(2)}(\Omega),$$

ceea ce arată că $w(x)$ este soluţie generalizată a ecuaţiei (3).

Observaţie. Dacă $\rho \in L_2(\Omega)$, atunci ecuaţia (3) rezultă imediat din relaţia (2) : este suficient să facem în aceasta $i = j$, să sumăm după j şi să folosim faptul că $\Delta r^{2-m} = 0$ dacă $x \neq \xi$.

Relaţia (3) permite construirea unei soluţii particulare a ecuaţiei lui Laplace neomogenă şi totodată să o reducem pe aceasta la o ecuaţie omogenă. Presupunem dată ecuaţia lui Laplace neomogenă

$$-\Delta u = f(x), \tag{4}$$

şi să admitem că se cere să se determine funcţia $u(x)$ într-un domeniu mărginit Ω, în care termenul liber f este integrabil. Soluţia particulară a ecuaţiei (4) se poate obţine sub forma

$$u_0(x) = \frac{1}{(m-2)|S_1|}\int_\Omega \frac{f(\xi)}{r^{m-2}}\,\mathrm{d}\xi.$$

Făcînd schimbarea $u = u_0 + w$, obţinem că w satisface ecuaţia lui Laplace omogenă.

§ 6. TEOREME DE MEDIE

În acest paragraf vom demonstra două teoreme cunoscute sub denumirea de teorema directă şi reciprocă de medie pentru funcţiile armonice.

Teorema 11.6.1. *Fie funcţia* u *armonică într-o anumită bilă şi continuă pe bila închisă corespunzătoare. Atunci valoarea acestei funcţii în centrul bilei este egală cu media aritmetică a valorilor ei pe sfera care mărgineşte bila dată.*

Înainte de a demonstra această teoremă, amintim o formulă care va juca un rol important şi în cele ce urmează. Să presupunem în relaţia (6.9) cap. 9 că $u(x)$ de clasă $C^{(2)}(\bar\Omega)$ este armonică în Ω. Atunci $\Delta u = 0$, membrul drept al relaţiei amintite se anulează şi obţinem

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial\nu}\,\mathrm{d}\Gamma = 0. \tag{1}$$

Să trecem acum la demonstrarea teoremei. Notăm cu B_R bila din enunţul teoremei, cu centrul x_0 şi raza R. Sfera ce mărgineşte bila B_R o notăm cu S_R. Fie de asemenea $B_{R'}$ bila de rază $R' < R$, concentrică cu B_R şi $S_{R'}$ sfera ce mărgineşte pe $B_{R'}$. Evident că $u \in C^{(2)}(\bar B_{R'})$. Conform formulei (3.5) avem

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)|S_1|}\int_{S_{R'}}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\frac{\partial u(\xi)}{\partial\nu} - u(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right)\mathrm{d}S_{R'}\,;\ x \in B_{R'}. \tag{2}$$

Punînd în formula (2) $x = x_0$, atunci $r = R'$. Mai departe, ν fiind normala exterioară la bilă, ea este orientată de-a lungul razei şi de aceea

$$\left.\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right|_{r=R'} = \left.\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r^{m-2}}\right|_{r=R'} = -\frac{m-2}{R'^{m-1}}.$$

Formula (2) capătă forma

$$u(x_0) = \frac{1}{(m-2)|S_1|R'^{m-2}} \int_{S_{R'}} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS_{R'} + \frac{1}{|S_1| \, R'^{m-1}} \int_{S_{R'}} u \, dS_{R'}.$$

Prima integrală dispare conform relației (1) și deci

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_1| \, R'^{m-1}} \int_{S_{R'}} u \, dS_{R'}.$$

Fie $R' \to R$. În $\bar{B}_R$, funcția u este continuă și deci se poate trece la limită sub integrală. Astfel,

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_1| R^{m-1}} \int_{S_R} u \, dS_R. \tag{3}$$

Membrul drept din formula (3) reprezintă așa-numita medie aritmetică a valorilor funcției u pe sfera S_R; aceasta este dată de cîtul dintre integrala funcției respective (pe sfera S_R) și aria suprafeței acestei sfere.

Înainte de a trece la reciproca teoremei de medie, să deducem expresia mediei sub forma unei integrale de volum. Fie a un număr suficient de mic și fie $x \in \Omega \setminus \Omega_{2a}$. Înconjurăm punctul x cu bila B_r de rază $r < a$. Conform celor demonstrate la punctul 1, pentru funcția u, armonică în B_r, are loc teorema de medie, adică

$$u(x) = \frac{1}{r^{m-1}|S_1|} \int_{S_r} u(\xi) dS_r. \tag{4}$$

Fie $\omega_a(|\xi - x|) = \omega_a(r)$ un nucleu de medie cu raza de medie a. Înmulțim ambele părți ale egalității (4) cu $r^{m-1}\omega_a(r)dr$ și integrăm după r de la zero la a. În stînga se obține expresia $cu(x)$, unde $c = \int_0^a r^{m-1}\omega_a(r)dr$. Conform proprietății (3) a nucleului de medie (§ 1 cap. 2), $c = |S_1|^{-1}$, ceea ce conduce la

$$u(x) = \int_0^a \int_{S_r} u(\xi) \, \omega_a(r) \, dr \, dS_r = \int_{B_a} u(\xi)\omega_a(r) \, d\xi. \tag{5}$$

În exteriorul bilei B_a nucleul de mediere $\omega_a(r) = 0$ și de aceea egalitatea (5) poate fi scrisă sub forma

$$u(x) = \int_{\Omega} u(\xi) \, \omega_a(r) \, d\xi, \; \forall x \in \Omega \quad \Omega_{2a}. \tag{6}$$

Această nouă formă are avantajul că domeniul de integrare Ω nu depinde de alegerea punctului x. Formula (6) conține de asemenea următoarea afirmație. Fie Ω un domeniu mărginit și u o funcție armonică în Ω. Atunci pentru orice $\delta > 0$ funcția $u(x)$ coincide în $\Omega \setminus \Omega_\delta$ cu media ei $u_h(x)$, dacă raza de mediere $h < \delta$.

Teorema 11.6.2. *Fie Ω un domeniu mărginit din spațiul E_m și $u \in C(\Omega)$. Dacă pentru orice bilă, care aparține împreună cu frontiera ei domeniului Ω, funcția $u(x)$ satisface identitatea* (3), *atunci această funcție este armonică în Ω.*

Fie a un număr pozitiv suficient de mic și fie $x \in \Omega \setminus \Omega_{2a}$. Dacă $r < a$, atunci condițiile teoremei arată că formula (6) este adevărată. Conform teoremei 1.1.3, $u \in C^{(\infty)}(\Omega \setminus \Omega_{2a})$ și deoarece a este arbitrar de mic, atunci $u \in C^{(\infty)}(\Omega)$.

Să arătăm că $\Delta u = 0$. Pentru bila B_a de rază a cu centrul în punctul $x \in \Omega \setminus \Omega_{2a}$ scriem reprezentarea integrală (3.3):

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)|S_1|} \left\{ \int_{S_a} \frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} \, d_\xi S_a - \right.$$

$$\left. - \int_{S_a} u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \, d_\xi S_a - \int_{B_a} \frac{1}{r^{m-2}} \Delta u(\xi) \, d\xi \right\}. \tag{7}$$

Dar

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^{m-2}} \Big|_{r=a} = - \frac{m-2}{a^{m-1}},$$

și a doua integrală de suprafață este egală cu

$$- \frac{(m-2)}{a^{m-1}} \int_{S_a} u(\xi) \, d_\xi S_a = - (m-2)|S_1|u(x).$$

Apoi, conform formulei (6.9) cap. 9, avem

$$\int_{S_a} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} \, d_\xi S_a = \int_{B_a} \Delta u(\xi) \, d\xi.$$

Acum identitatea (7) se reduce la

$$\int_{B_a}\left(\frac{1}{r^{m-2}}-\frac{1}{a^{m-2}}\right)\Delta u(\xi)\,d\xi=0. \tag{8}$$

În B_a avem $r<a$ și de aceea $r^{-m+2}-a^{-m+2}>0$. În același timp integrala (8) este egală cu zero. De aceea este necesar ca funcția $\Delta u(\xi)$ să-și schimbe sensul în bila indicată; deoarece ea este și continuă, atunci există $x'\in B_a$ în care $\Delta u(x')=0$. Fie $a\to 0$, atunci $x'\to x$ și conform continuității derivatelor de ordinul al doilea rezultă $\Delta u(x)=0$.

§ 7. PRINCIPIUL DE MAXIM

Teorema 11.7.1 (principiul de maxim). *Fie $\Omega\subset E_m$ un domeniu mărginit, $u\in C^{(2)}(\Omega)$ și $\Delta u\geqslant 0$. Dacă $u(x)$ își atinge maximul într-un punct interior domeniului Ω, atunci $u(x)=\text{const}$. În mod analog, dacă $\Delta u\leqslant 0$ și $u(x)$ își atinge minimul într-un punct interior domeniului Ω, atunci conform celor de mai sus $u(x)=\text{const}$.*

Este suficient să se demonstreze prima afirmație a teoremei; a doua afirmație se reduce la prima, înlocuind pe u cu $-u$.

Fie x_0 un punct din Ω în care $u(x)$ își atinge maximul. Să arătăm că $u(x)\equiv u(x_0)$. Construim bila $B_a(x_0)$ de rază a cu centrul în x_0; alegem raza a astfel încît bila amintită împreună cu frontiera ei $S_a(x_0)$ să se găsească în Ω. Atunci $u\in C^{(2)}(\bar{B}_a(x_0))$ și deci putem folosi reprezentarea integrală (3.3) pentru punctul x_0:

$$u(x_0)=\frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\left\{\int_{S_a(x_0)}\frac{1}{a^{m-2}}\frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu}\,d_\xi S_a-\right.$$

$$\left.-\int_{S_a(x_0)}u(\xi)\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r_0^{m-2}}\,d_\xi S_a-\int_{B_a(x_0)}\frac{1}{r_0^{m-2}}\Delta u(\xi)\,d\xi\right\}; \tag{1}$$

aici $r_0=|\xi-x_0|$. Conform formulei (6.9) cap. 9, avem

$$\int_{S_a(x_0)}\frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu}\,d_\xi S_a=\int_{B_a(x_0)}\Delta u(\xi)\,d\xi.$$

Dar

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r_0^{m-2}}=\frac{\partial}{\partial r_0}\frac{1}{r_0^{m-2}}\bigg|_{r_0=a}=-\frac{m-2}{a^{m-1}}.$$

Înlocuind aceasta în formula (1), obținem

$$u(x_0)=\frac{1}{a^{m-1}|S_1|}\int_{S_a(x_0)}u(\xi)\,d_\xi S_a-$$

$$-\frac{1}{(m-2)|S_1|}\int_{B_a(x_0)}\left(\frac{1}{r_0^{m-2}}-\frac{1}{a^{m-2}}\right)\Delta u\,(\xi)\,d\xi. \tag{2}$$

Primul membru din dreapta este media aritmetică a valorilor funcției $u(x)$ pe sfera $S_a(x_0)$. În punctul x_0 această funcție își atinge maximul și de aceea

$$\frac{1}{a^{m-1}|S_1|}\int_{S_a}u(\xi)d_\xi S_a\leqslant u(x_0),$$

egalitatea avînd loc numai dacă $u(\xi)\equiv u(x_0)$, $\xi\in S_a(x_0)$. Al doilea termen din dreapta relației (2) este nenegativ deoarece $\Delta u\geqslant 0$; el se anulează numai dacă $\Delta u(x)\equiv 0$, $x\in B_a(x_0)$. Din cele spuse rezultă că egalitatea (2) are loc, atunci și numai atunci cînd $u(x)\equiv u(x_0)$, $x\in S_a(x_0)$ și $\Delta u(x)\equiv 0$, $x\in B_a(x_0)$. Făcînd în (2) raza a arbitrar de mică, găsim că

$$u(\xi)\equiv u(x_0),\quad \xi\in B_a(x_0). \tag{3}$$

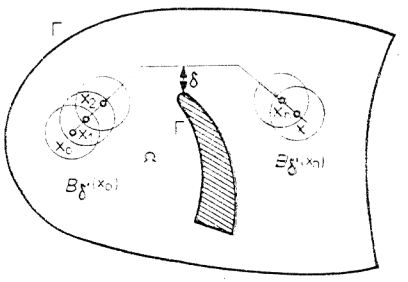

Fig. 12

Să arătăm acum că identitatea (3) are loc în tot domeniul Ω. Fie $x\in\Omega$ arbitrar și să unim punctul x_0 cu x printr-o linie frîntă situată în întregime în Ω (fig. 12). Fie δ cea mai mică distanță de la punctele liniei frînte pînă la punctele frontierei Γ a domeniului Ω iar $\delta'=\frac{1}{2}\delta$. Orice bilă de rază δ' și centrul pe linia frîntă se va găsi, împreună cu frontiera ei, în domeniul Ω.

Fie $B_{\delta'}(y)$ bila de rază δ' cu centrul în y. În interiorul bilei $B_{\delta'}(x_0)$ alegem pe linia frîntă punctul x_1 astfel încît $|x_1 - x_0| > \frac{1}{2}\delta'$ și construim bila $B_{\delta'}(x_1)$. În interiorul acestei noi bile alegem pe linia frîntă punctul x_2 astfel încît $|x_2 - x_1| > \frac{1}{2}\delta'$ și punctul x_1 să se găsească între punctele x_0 și x_2. Continuînd acest procedeu ne convingem ușor că se poate acoperi, cu un număr finit de astfel de bile, toată linia frîntă. Să presupunem că aceste bile sînt $B_{\delta'}(x_j)$, $j = 0,1,2,\ldots, n$. Conform construcției, $x_j \in B_{\delta'}(x_{j-1})$, $j = 1,2,\ldots, n$. După cum arată identitatea (3), în bila $B_{\delta'}(x_0)$ funcția $u(x)$ are valoarea constantă, egală cu valoarea maximă, și deci funcția își atinge maximul și în punctul x_1, adică $u(x_1) = u(x_0)$. Conform aceleiași identități (3), $u(\xi) = u(x_1) = u(x_0)$, $\xi \in B_{\delta'}(x_1)$. Continuînd acest raționament obținem în final identitatea

$$u(\xi) = u(x_0), \quad \forall \xi \in B_{\delta'}(x_n).$$

Dar $x \in B_{\delta'}(x_n)$ și de aceea $u(x) = u(x_0)$.

Corolarul 11.7.1. *Dacă o funcție armonică într-un domeniu mărginit își atinge maximul sau minimul într-un punct interior acestui domeniu, atunci această funcție este constantă.*

Corolarul 11.7.2. *Dacă o funcție armonică într-un domeniu mărginit este continuă pe domeniul închis corespunzător, atunci această funcție își atinge atît maximul, cît și minimul pe frontiera domeniului.*

§ 8. SUBSPAȚII DE FUNCȚII ARMONICE

Teorema 11.8.1 (teorema lui Harnack). *Fie $\{u_n(x)\}$ un șir de funcții armonice în domeniul mărginit Ω. Fie, de asemenea, funcțiile $u_n(x)$ continue în domeniul închis $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Dacă șirul $\{u_n(x)\}$ converge uniform pe Γ, atunci:* 1) *șirul $\{u_n(x)\}$ converge uniform pe domeniul închis $\bar{\Omega}$;* 2) *funcția limită este armonică în Ω;* 3) *în orice subdomeniu închis $\bar{\Omega}'$ al domeniului Ω derivatele de orice ordin ale funcțiilor $u_n(x)$ converg uniform la derivatele corespunzătoare ale funcției limită.*

Șirul $\{u_n(x)\}$ converge uniform pe Γ. Aceasta înseamnă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr N, astfel încît pentru orice $n \geqslant N$ și orice număr natural p are loc inegalitatea

$$|u_{n+p}(x) - u_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \Gamma; \tag{1}$$

dar diferența a două funcții armonice este o funcție armonică. Mai mult, ea este continuă pe $\bar{\Omega}$. Dar o astfel de funcție își atinge atît minimul, cît și maximul pe frontiera domeniului.

Din inegalitatea (1) rezultă că

$$-\varepsilon < \min_{\xi \in \Gamma} [u_{n+p}(\xi) - u_n(\xi)] \leqslant \max_{\xi \in \Gamma} [u_{n+p}(\xi) - u_n(\xi)] < \varepsilon,$$

iar din principiul de maxim pentru orice $x \in \Omega$, obținem inegalitatea

$$\min_{\xi \in \Gamma} [u_{n+p}(\xi) - u_n(\xi)] \leqslant u_{n+p}(x) - u_n(x) \leqslant \max_{\xi \in \Gamma} [u_{n+p}(\xi) - u_n(\xi)].$$

Dar atunci

$$-\varepsilon < u_{n+p}(x) - u_n(x) < \varepsilon, \quad \forall x \in \bar{\Omega},$$

adică

$$|u_{n+p}(x) - u_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Ultima inegalitate arată că șirul $\{u_n(x)\}$ converge uniform pe domeniul închis $\bar{\Omega}$. Există deci funcția limită

$$u(x) = \lim_{n \to \infty} u_n(x), \tag{2}$$

definită și continuă pe $\bar{\Omega}$.

Fie $x \in \Omega$. Construim bila $B_R(x)$ cu centrul în punctul x și raza R, astfel încît B_R împreună cu frontiera ei — sfera S_R — să se găsească în interiorul lui Ω. Conform teoremei directe de medie, avem

$$u_n(x) = \frac{1}{|S_R|} \int_{S_R} u_n(\xi)\, dS_R. \tag{3}$$

Fie $n \to \infty$. Deoarece șirul $\{u_n(x)\}$ converge uniform pe $\bar{\Omega}$, atunci se poate trece la limită sub integrală și deci

$$u(x) = \frac{1}{|S_R|} \int_{S_R} u(\xi)\, dS_R. \tag{4}$$

În virtutea teoremei reciproce de medie funcția $u(x)$ este armonică în Ω.

Rămîne să arătăm convergența uniformă a derivatelor. Să considerăm un subdomeniu arbitrar Ω' interior din Ω și să notăm prin $2a$ cea mai mică distanță dintre frontierele domeniilor Ω și Ω'. Folosim formula (6.6) pe care o aplicăm funcțiilor $u_n(x)$, presupunînd că $x \in \overline{\Omega}'$:

$$u_n(x) = \int_\Omega u_n(\xi)\, \omega_a(r)\, \mathrm{d}\xi. \tag{5}$$

Diferențiind această expresie în raport cu coordonatele punctului x, pentru orice multiindice α, obținem

$$D^\alpha u_n(x) = \int_\Omega u_n(\xi) D_x^\alpha \omega_a(r) \mathrm{d}\xi, \tag{6}$$

În mod analog,

$$D^\alpha u(x) = \int_\Omega u(\xi)\, D_x^\alpha \omega_a(r)\, \mathrm{d}\xi. \tag{7}$$

Șirul $\{u_n(\xi)\}$ converge uniform pe $\overline{\Omega}$ la funcția $u(\xi)$, iar funcția $D_x^\alpha \omega_a(r)$ este continuă pentru orice x și ξ. În acest caz integrala din (6) converge uniform la integrala din (7) și, prin urmare, $D^\alpha u_n(x) \to$ $\to D^\alpha u(x)$ uniform pe $\overline{\Omega}'$.

Teorema 11.8.2 (teorema de convergență în medie). *Fie Ω un domeniu mărginit. Fie $\{u_n(x)\}$ un șir de funcții armonice în Ω, ce converge în metrica lui $L_p(\Omega)$, unde $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Atunci* : 1) *funcția limită este armonică în Ω*; 2) *în orice subdomeniu interior atît șirul dat cît și șirurile obținute din acesta prin diferențierea lui converg uniform.*

Conform condițiilor teoremei, limita $u(x) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)$ există în sensul convergenței din $L_p(\Omega)$. Aceasta înseamnă că $u \in L_p(\Omega)$ și

$$\int_\Omega |u(\xi) - u_n(\xi)|^p \mathrm{d}\xi \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Utilizînd formula (5) :

$$\left.\begin{aligned} u_n(x) &= \int_\Omega u_n(\xi)\omega_a(r)\mathrm{d}\xi, \\ u_k(x) &= \int_\Omega u_k(\xi)\omega_a(r)\mathrm{d}\xi, \end{aligned}\right\} \quad \forall x \in \overline{\Omega}';$$

de unde

$$|u_n(x) - u_k(x)| \leqslant \int_\Omega |u_n(\xi) - u_k(\xi)|\, \omega_a(r)\mathrm{d}\xi.$$

Pentru o rază de medie a fixată, funcția $\omega_a(r)$ este mărginită. Fie $\omega_a(r) \leqslant K$, atunci

$$|u_n(x) - u_k(x)| \leqslant K\|u_n - u_k\|_1 \leqslant K_1\|u_n - u_k\|_p, \tag{8}$$

unde K_1 este o nouă constantă. Conform condițiilor teoremei $\|u_n - u_k\|_p \xrightarrow[n,k\to\infty]{} 0$; dar atunci din identitatea (8) rezultă că șirul $\{u_n(x)\}$ converge uniform pe $\overline{\Omega}'$. De aici rezultă că pe $\overline{\Omega}'$ funcția $u(x)$ este continuă ; cum Ω' este arbitrar, atunci $u(x)$ este continuă în domeniul deschis Ω.

În formula (3), făcînd pe $n \to \infty$, obținem formula (4) ; de aici, ca mai sus, se deduce că funcția $u(x)$ este armonică în Ω. Afirmația despre convergența derivatelor șirului $\{u_n(x)\}$ se arată ca și în teorema 11.8.1.

Din teoremele acestui paragraf rezultă următoarele corolare.

Corolarul 11.8.1. *Fie Ω un domeniu mărginit. În spațiul $C(\overline{\Omega})$ funcțiile armonice formează un subspațiu. Din convergența în acest subspațiu rezultă convergența uniformă a derivatelor de orice ordin în orice subdomeniu interior închis.*

Corolarul 11.8.2. *Fie Ω un domeniu mărginit și p o constantă, $1 \leqslant$ $\leqslant p \leqslant \infty$. În spațiul $L_p(\Omega)$ funcțiile armonice formează un subspațiu. Din convergența în acest subspațiu rezultă convergența uniformă atît a funcțiilor, cît și a derivatelor lor de orice ordin în orice subdomeniu interior închis.*

Teorema 11.8.3. *Soluția generalizată local integrabilă a ecuației lui Laplace omogenă este o funcție armonică în acest domeniu.*

Fie Ω un domeniu mărginit din E_m și fie $u \in L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ soluția generalizată a ecuației lui Laplace omogenă în Ω. Conform definiției,

$$\int_\Omega u(\xi)\, \Delta_\xi \varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = 0, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{M}^{(\infty)}(\Omega). \tag{9}$$

Fie $h > 0$ un număr suficient de mic și $x \in \Omega \setminus \Omega_{2h}$. În identitatea (9) punem $\varphi(\xi) = \omega_h(r)$, $r = |\xi - x|$. Menționăm că r depinde

numai de diferența vectorilor ξ și x și de aceea $\Delta_\xi \tilde{\omega}_h(r) = \Delta_x \omega_h(r)$. Astfel, formula (9) arată că $\Delta u_h(x) = 0$. În acest fel, funcția de medie $u_h(x)$ este armonică în domeniul $\Omega \setminus \Omega_{2h}$; pentru $\delta > 0$ oarecare, alegînd $h < \delta/2$, deducem că $u_h(x)$ este armonică în $\Omega \setminus \Omega_\delta$. În acest domeniu funcția $u(x)$ este integrabilă. Conform teoremei 2.2.3, $u_h(x) \to u(x)$ în metrica lui $L_1(\Omega \setminus \Omega_\delta)$. Conform teoremei 11.8.2, $u(x)$ este armonică în $\Omega \setminus \Omega_\delta$ și cum δ este oarecare, atunci $u(x)$ este armonică în Ω.

Observație. Are loc teorema mai generală: dacă o funcție generalizată satisface ecuația lui Laplace omogenă într-un domeniu mărginit, atunci în acest domeniu distribuția dată este o funcție armonică în sens clasic.

Capitolul 12

PROBLEMELE DIRICHLET ȘI NEUMANN

§ 1. FORMULAREA PROBLEMEI

Problemele fundamentale ale teoriei ecuațiilor eliptice sînt așa-numitele *probleme Dirichlet și Neumann*. Acestea vor fi formulate pentru ecuația eliptică generală de ordinul al doilea; începînd însă cu § 2 vom reveni la ecuația lui Laplace.

Vom considera două tipuri de domenii: mărginite și nemărginite. În ambele cazuri frontiera domeniului se presupune mărginită; ca de obicei, vom presupune că frontiera este formată dintr-un număr finit de suprafețe netede pe porțiuni (vezi fig. 9 și 10).

Problema la limită pentru ecuația eliptică se numește *interioară*, dacă funcția căutată trebuie să fie definită într-un domeniu mărginit și *exterioară*, dacă această funcție trebuie să fie definită într-un domeniu nemărginit.

Cele mai importante probleme la limită pentru ecuația eliptică de ordinul al doilea sînt problema Dirichlet (prima problemă la limită) și problema Neumann (a doua problemă la limită).

Să examinăm ecuația eliptică de forma generală

$$-A_{jk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0 u = F(x). \tag{1}$$

Problema Dirichlet interioară pentru această ecuație se formulează **în modul** următor. Fie Ω un domeniu mărginit cu frontiera Γ netedă pe porțiuni și $\varphi(x)$ o funcție dată, continuă pe Γ. Se cere să se găsească soluția ecuației (1) de clasă $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ care pe frontiera Γ coincide cu funcția dată $\varphi(x)$:

$$u(x) = \varphi(x), \qquad x \in \Gamma. \tag{2}$$

Problema Neumann interioară pentru aceeași ecuație (1) se formulează astfel. Să se găsească soluția $u(x)$ a ecuației (1) cu proprietățile: $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$; pe mulțimea acelor puncte $x \in \Gamma$, în care normala ν la suprafața Γ există, să fie îndeplinită egalitatea

$$\lim_{x' \to x} A_{jk}(x') \frac{\partial u(x')}{\partial x'_j} \cos(\nu, x_k) = \psi(x). \tag{3}$$

Aici x' este un punct care se găsește în interiorul lui Ω pe normala ν; x'_k reprezintă coordonatele carteziene ale acestui punct, iar $\psi(x)$ este o funcție dată pe mulțimea menționată de puncte ale suprafeței Γ.

Condiția la limită a problemei Neumann o vom scrie, pe scurt, sub forma

$$A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\nu, x_k)|_\Gamma = \psi(x). \qquad (3_1)$$

Cînd $u \in C^{(1)}(\bar{\Omega})$, atunci relația (3_1) are sens ca atare.

Dacă $A_{jk} = \delta_{jk}$, atunci termenii dominanți ai ecuației (1) reprezintă operatorul lui Laplace, iar ecuația capătă forma

$$-\Delta u + A_k\frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0 u = F(x). \qquad (4)$$

Condiția la limită (3_1) are în acest caz forma simplă :

$$\left.\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right|_\Gamma = \psi(x). \qquad (5)$$

Observație. Formulările de mai sus ale problemelor la limită Dirichlet și Neumann prezentate nu sînt cele mai generale. Astfel, de exemplu, se poate examina cazul cînd în condiția la limită (2) a problemei Dirichlet funcția $\varphi(x)$ este discontinuă pe Γ. În acest caz nu se poate cere ca $u \in C(\bar{\Omega})$; condiția la limită (2) trebuie să fie îndeplinită numai în punctele de continuitate ale funcției $\varphi(x)$. Se poate de asemenea renunța la condiția ca frontiera să fie netedă pe porțiuni.

Problemele exterioare se deosebesc de problemele interioare corespunzătoare numai prin aceea că funcției necunoscute i se impune și condiția

$$u(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{m-2}}\right), \qquad x \to \infty. \qquad (6)$$

§2. TEOREME DE UNICITATE PENTRU ECUAȚIA LUI LAPLACE

Teorema 12.2.1. *Problema Dirichlet interioară, cît și cea exterioară, au pentru ecuația lui Laplace cel mult o soluție.*

Să presupunem că problema Dirichlet admite două soluții : $u_1(x)$ și $u_2(x)$. Avem atunci

$$-\Delta u_1 = F(x), \qquad u_1|_\Gamma = \varphi(x); \qquad (1)$$

$$-\Delta u_2 = F(x), \qquad u_2|_\Gamma = \varphi(x). \qquad (2)$$

Introducem notația $u_1(x) - u_2(x) = v(x)$. Scăzînd (1) din (2), obținem

$$\Delta v = 0, \qquad v|_\Gamma = 0. \qquad (3)$$

Să examinăm problema Dirichlet interioară. Problema se reduce la aflarea funcției $v(x)$ armonică în Ω și continuă pe $\bar{\Omega}$. Conform principiului de maxim funcția $v(x)$ își atinge minimul și maximul pe frontieră și cum ambele sînt egale cu zero rezultă că $v \equiv 0$, adică $u_1(x) \equiv u_2(x)$.

Să trecem la problema Dirichlet exterioară. Dacă $m = 2$, atunci printr-o transformare conformă (de exemplu, printr-o transformare omografică) putem transforma domeniul nemărginit într-unul mărginit. Prin această transformare ecuația lui Laplace trece în ecuația lui Laplace, iar funcția v — armonică în domeniul nemărginit — trece într-o funcție armonică în domeniul mărginit, și această funcție, ca și mai înainte, este egală cu zero pe frontiera domeniului. În acest mod reducem problema la unicitatea problemei Dirichlet pentru domenii mărginite, care a fost demonstrată. De aceea este suficient să analizăm cazul $m > 2$. În baza condiției (1.6) diferența soluțiilor $v = u_1 - u_2$ este armonică în Ω. Înconjurăm frontiera Γ cu sfera S_R de rază R și analizăm acum funcția $v(x)$ în domeniul inelar Ω_R cuprins între Γ și S_R. Știm că $v|_\Gamma = 0$, în afară de aceasta, la distanță suficient de mare de originea coordonatelor, pe care o presupunem în centrul sferei S_R, avem

$$|v(x)| \leqslant C/|x|^{m-2}, \qquad C = \text{const}.$$

Prin urmare, pe sfera S_R pentru R suficient de mare avem $v(x) \leqslant C/R^{m-2}$. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar și fie R astfel încît $CR^{2-m} < \varepsilon$. În domeniul inelar Ω_R funcția $v(x)$ își atinge maximul și minimul fie pe Γ, fie pe S_R și prin urmare în modul aceste valori nu depășesc pe ε.

Fie x un punct arbitrar din Ω. Pentru R suficient de mare punctul se găsește în domeniul Ω_R și de aceea $|v(x)| < \varepsilon$. Dar ε este un număr pozitiv arbitrar și de aceea $v(x) = 0$, adică $u_1(x) \equiv u_2(x)$.

Observație. Cu privire la condițiile de unicitate ale soluției problemei Dirichlet pentru ecuația eliptică generală (1.1) vezi [32]. Dacă matricea coeficienților dominanți este pozitiv definită în domeniul închis $\bar{\Omega}$ și dacă $A_0(x) > 0$, atunci unicitatea soluției problemei Dirichlet decurge din principiul de maxim (§ 9 cap. 11).

Să revenim la problema Neumann și să examinăm mai întîi problema interioară. Fie că în domeniul mărginit Ω de frontieră Γ s-a formulat problema Neumann

$$-\Delta u = F(x), \quad x \in \Omega; \quad u \in C^{(2)}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}); \qquad (4)$$
$$\lim_{x' \to x}\frac{\partial u(x')}{\partial \nu} = \psi(x), \quad x \in \Gamma.$$

Este evident că soluția problemei Neumann interioară pentru ecuația lui Laplace (dacă aceasta există) nu este unică: dacă funcția $u(x)$ este o soluție a problemei (4), atunci, după cum se observă ușor, funcția $u(x) + C$, unde C este o constantă arbitrară, este de asemenea o soluție a aceleiași probleme. În acest caz teorema de unicitate constă în afirmația că expresia $u(x) + C$ furnizează toate soluțiile acestei probleme.

Teorema 12.2.2. *Două soluții ale problemei Neumann interioare pentru ecuația lui Laplace diferă numai printr-o constantă aditivă.*

Să demonstrăm teorema, presupunînd că Γ este o suprafață Liapunov: $\Gamma \in C^{(1,\alpha)}$, $0 < \alpha \leqslant 1$ (vezi Introducere, §2). Să mai presupunem că problema (4) admite două soluții. Diferența lor $v(x)$ satisface ecuațiile

$$\Delta v = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{\Gamma} = 0, \tag{5}$$

cu condiția ca $v \in C^{(2)}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Să presupunem că $v(x) \not\equiv \text{const}$. În virtutea principiului de maxim funcția $v(x)$ își atinge minimul pe Γ; fie că această valoare este atinsă în punctul $x_0 \in \Gamma$. Diferența $v(x) - v(x_0)$ satisface de asemenea ecuațiile (5); înlocuind $v(x)$ cu $v(x) - v(x_0)$, se poate considera că $v(x)$ însăși satisface relațiile

$$v(x)|_{\Gamma} \geqslant 0, \quad v(x_0) = 0. \tag{6}$$

Introducem coordonatele locale $y_1, y_2, \ldots, y_m$ cu originea în punctul x_0; axa y_m o orientăm după direcția normalei interioare la Γ. Notăm, de asemenea, $y' = (y_1, y_2, \ldots, y_{m-1})$ și $y = (y', y_m)$. Într-o anumită vecinătate a lui x_0 suprafața Γ se poate reprezenta sub forma

$$y_m = f(y'). \tag{7}$$

Mai jos (cap. 14 §1) vom arăta că dacă $\Gamma \in C^{(1,\alpha)}$, $0 < \alpha \leqslant 1$, atunci $|f(y')| \leqslant c\,|y'|^{1+\alpha}$. De aici rezultă că $|f(y')| \leqslant c\,|y|^{1+\alpha}$, deoarece $|y'| \leqslant |y|$.

Fie b un număr suficient de mic, astfel încît domeniul $G = \{y : 2c|y|^{1+\alpha} < y_m < b\}$ să fie conținut în Ω; el este mărginit de suprafețele σ_1 și σ_2 pe care $y_m = 2c\,|y|^{1+\alpha}$ și respectiv $y_m = b$ (v. fig. 13, p. 278). Fie funcția $\varphi \in C^{(2)}(G) \cap C^{(1)}(\bar{G})$, ce satisface condițiile:

$$a)\ \varphi(x_0) = 0; \quad b)\ \varphi(x) \leqslant 0, \quad x \in \sigma_1; \quad c)\ \Delta\varphi \geqslant 0, \quad x \in G;$$

$$d)\ \frac{\partial \varphi(x_0)}{\partial y_m} > 0. \tag{8}$$

O astfel de funcție este, de exemplu,

$$\varphi(x) = \gamma\left[y_m + \frac{4\widetilde{m}c}{\alpha}\, y_m^{1+\alpha} - 4c\,|y|^{1+\alpha}\right];$$

$$\widetilde{m} = m - 1 + \alpha, \quad \gamma = \text{const} > 0.$$

Într-adevăr, condițiile (8; a, d) sînt îndeplinite. Mai mult, dacă $x \in \sigma_1$, atunci $y_m = 2c\,|y|^{1+\alpha}$ și $\varphi(x) = \gamma[-y_m + 4\widetilde{m}c\alpha^{-1}\, y_m^{1+\alpha}]$, care nu este pozitiv dacă y_m este suficient de mic; condiția (8; b) este de asemenea îndeplinită. În sfîrșit, folosind formula (*) § 5 cap. 10 și inegalitatea $y_m \leqslant |y|$, găsim că

$$\Delta\varphi = 4\widetilde{m}c\,(1 + \alpha)\,\gamma\,(y_m^{\alpha-1} - |y|^{\alpha-1}) \geqslant 0$$

și deci condiția (8; c) este de asemenea îndeplinită.

Din principiul de maxim (§7 cap. 11) rezultă că există o constantă $c_1 > 0$ astfel încît $v(x) \geqslant c_1$, $x \in \sigma_2$. Pentru γ suficient de mic, avem și $\varphi(x) \leqslant c_1$, $x \in \sigma_2$. De aici și din (8; b) rezultă că $v(x) - \varphi(x) \geqslant 0$ pe ∂G, totodată $\Delta[v(x) - \varphi(x)] \leqslant 0$ în domeniul G și de aceea pe baza aceluiași principiu de maxim, $v(x) \geqslant \varphi(x)$ pe $\bar{G}$ și, prin urmare,

$$\frac{\partial v(x_0)}{\partial n} = \lim_{y_m \to 0} \frac{v(0, y_m)}{y_m} \geqslant \lim_{y_m \to 0} \frac{\varphi(0, y_m)}{y_m} = \frac{\partial \varphi(x_0)}{\partial y_m} > 0.$$

În coordonatele inițiale $x_1, x_2, \ldots, x_m$, ultima inegalitate se poate scrie sub forma $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{v(x) - v(x_0)}{|x - x_0|} > 0$, unde x este un punct pe normala prin x_0 la Γ. Conform formulei lui Lagrange

$$v(x) - v(x_0) = \frac{\partial v(x_0 + \theta(x - x_0))}{\partial n}\,|x - x_0|, \quad 0 < \theta < 1;$$

adică

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\partial v(x_0 + \theta(x - x_0))}{\partial n} > 0.$$

Aceasta contrazice a doua egalitate din (5), de unde rezultă

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\partial v(x_0 + \theta(x - x_0))}{\partial n} = 0.$$

Observație. Dacă presupunem că soluția căutată are pe $\overline{\Omega}$ derivatele de ordinul al doilea continue, atunci teorema 12.2.2 se demonstrează ușor presupunînd că suprafața Γ este numai netedă pe porțiuni.

În încheiere, menționăm că problema Neumann interioară (4) nu este rezolvabilă în cazul general și deducem condiția necesară pentru rezolvabilitatea ei presupunînd, pentru simplificare, că $u \in C^{(2)}(\Omega)$. Atunci putem folosi formula (6.10) cap. 9, care este

$$\int_\Omega F(x)\,dx + \int_\Gamma \psi(x)\,d\Gamma = 0; \qquad (9)$$

aceasta reprezintă tocmai condiția necesară căutată.

În cazul condițiilor la limită omogene trebuie îndeplinită prima, iar în cazul ecuației diferențiale a doua din următoarele egalități

$$\int_\Omega \Delta u\,dx = \int_\Omega F(x)\,dx = 0, \qquad (10)$$

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\Gamma = \int_\Gamma \psi(x)\,d\Gamma = 0. \qquad (11)$$

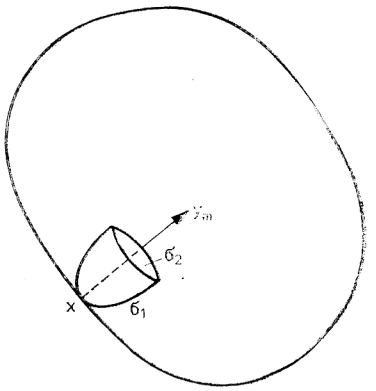

Fig. 13

Pentru problema Neumann exterioară are loc următoarea teoremă de unicitate.

Teorema 12.2.3. *Dacă dimensiunea spațiului este $m > 2$, atunci problema Neumann exterioară pentru ecuația lui Laplace admite cel mult o soluție.*

Ca și în cazul problemei interioare, presupunem că frontiera domeniului considerat este o suprafață Liapunov. Fie Ω un domeniu mărginit de frontiera Γ, o suprafață Liapunov, și să presupunem că în acest domeniu problema Neumann admite două soluții. Diferența lor $v(x)$ satisface relațiile

$$v \in C^{(2)}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \quad \text{și} \quad \Delta v = 0, \quad x \in \Omega;$$

$$|v(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^{m-2}}, \quad x \to \infty; \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_\Gamma = 0. \qquad (12)$$

Presupunem că $v(x) \not\equiv 0$. Atunci $v(x) \not\equiv 0$ pentru $x \in \Gamma$ deoarece în caz contrar, conform teoremei de unicitate a problemei Dirichlet

interioară vom avea $v(x) \equiv 0$, $x \in \Omega$. Notăm $a = \min_{x \in \Gamma} v(x)$ și fie că acest minim este atins în punctul $x_0 \in \Gamma$. Să arătăm că putem presupune $a < 0$. Într-adevăr, dacă $a \geqslant 0$, atunci $a_1 = \max_{x \in \Gamma} v(x) > 0$. Funcția $-v(x)$ satisface relațiile (12) și $\min_{x \in \Gamma} [-v(x)] = -a_1 < 0$. Cu originea coordonatelor ca centru, descriem sfera S_R de rază R suficient de mare, astfel încît suprafața Γ să se găsească în interiorul acestei sfere (vezi fig. 21) și astfel ca $C/R^{m-2} < |a|$, unde C este constanta din estimările (12). Atunci în domeniul Ω_R, mărginit de suprafețele Γ și S_R, funcția armonică $v(x)$ își atinge minimul în punctul $x_0 \in \Gamma$. Ca și în cazul problemei interioare, analizăm diferența $v(x) - v(x_0)$, domeniul G și funcția $\varphi(x)$ avînd proprietățile (8). La fel ca în teorema precedentă, arătăm că $\partial v(x_0)/\partial n > 0$, unde n este normala la Γ în punctul x_0, interioară relativ la Ω_R. Inegalitatea obținută contrazice condiția la limită (12).

Dacă dimensiunea spațiului este $m = 2$, atunci pentru problema Neumann exterioară are loc teorema 12.2.2, aceeași ca și pentru problema interioară.

§ 3. SOLUȚIA PROBLEMEI DIRICHLET PENTRU SFERĂ

Începînd cu acest paragraf, în întreg capitolul vom examina numai ecuația lui Laplace omogenă — cea neomogenă se reduce la aceasta prin metoda indicată în §5 cap. 11; amintim că această metodă se bazează pe construirea unei soluții particulare a ecuației lui Laplace neomogene de forma unui potențial de volum.

Fie acum dată bila B_R de rază R cu centrul în originea axelor de coordonate. Se pune problema găsirii funcției $u \in C(B_R)$, armonică în bilă, satisfăcînd condiția la limită

$$u|_{S_R} = \varphi(x), \qquad (1)$$

unde S_R este frontiera bilei, iar $\varphi(x)$ o funcție dată, continuă pe sfera S_R.

Vom rezolva problema în modul următor. Presupunînd că soluția există și satisface anumite condiții mai restrictive, construim formula ce definește soluția problemei date. După aceea arătăm că formula construită dă într-adevăr soluția problemei.

Să presupunem că problema pusă are soluția $u(x)$, ce aparține clasei $C^{(2)}(\overline{B}_R)$. Scriem reprezentarea integrală a acestei soluții (formula (3.5) cap. 11)

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|} \int_{S_R} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right) d_\xi S_R. \qquad (2)$$

Fie punctul x interior bilei și fie x' punctul simetric cu punctul x în raport cu sfera S_R (fig. 14). Aceasta înseamnă că punctele x și x' sînt situate pe aceeași dreaptă ce trece prin centrul sferei, astfel încît

$$|x| \cdot |x'| = R^2. \tag{3}$$

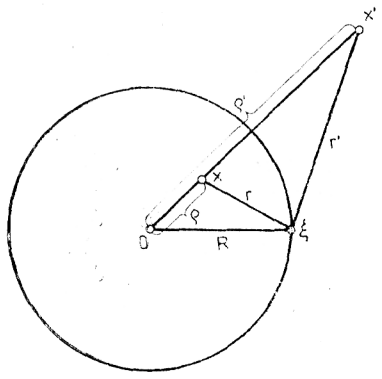

Fig. 14

Notăm $r = |x - \xi|$, $r' = |x' - \xi|$. Remarcăm că $r' \neq 0$ cînd punctul ξ se deplasează în interiorul sferei sau pe suprafața ei. Fie funcția

$$v(\xi) = \frac{1}{r'^{m-2}}; \tag{4}$$

ea este armonică în orice domeniu ce nu conține punctul x'. În particular, funcția (4) este armonică în bila B_R.

Aplicăm funcțiilor u și v formula Green (6.10) cap. 9. Ambele funcții sînt armonice și de aceea integrala de volum dispare și obținem

$$\int_{S_R} \left(\frac{1}{r'^{m-2}} \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r'^{m-2}} \right) d\xi S_R = 0. \tag{5}$$

Pentru cele ce urmează este important faptul că primii membri de sub integralele (2) și (5) diferă numai printr-un factor care nu depinde de ξ. Acest lucru reiese din asemănarea triunghiurilor $Ox\xi$ și $Ox'\xi$ (vezi fig. 14). Într-adevăr, în aceste triunghiuri unghiul din punctul O este comun, iar laturile adiacente sînt proporționale conform relației (3). Din asemănarea triunghiurilor rezultă că $r/r' = |x|/R$, deci $1/r = R/|x|r'$ și, prin urmare,

$$\frac{1}{r^{m-2}} = \left(\frac{R}{|x|} \right)^{m-2} \frac{1}{r'^{m-2}},$$

ceea ce arată că $1/r^{m-2}$ și $1/r'^{m-2}$ diferă prin factorul $\left(\frac{R}{|x|} \right)^{m-2}$ ce nu depinde de ξ.

Mai departe, vom nota $|x| = \rho$, $|x'| = \rho'$. Înmulțim formula (5) cu $\frac{1}{(m-2)|S_1|} \left(\frac{R}{\rho} \right)^{m-2}$ și scădem din formula (2):

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)|S_1|} \int_{S_R} u(\xi) \left[\left(\frac{R}{\rho} \right)^{m-2} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r'^{m-2}} - \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right] d_\xi S_R.$$

Remarcînd faptul că în baza condiției la limită a problemei Dirichlet avem $u(\xi)S_R = \varphi(\xi)$, obținem formula pentru soluție (în ipoteza că există și este de clasă $C^{(2)}(\bar{B}_R)$:

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)|S_1|} \int_{S_R} \varphi(\xi) \left[\left(\frac{R}{\rho} \right)^{m-2} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r'^{m-2}} - \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right] d_\xi S_R. \tag{6}$$

Formula (6) poate fi simplificată. Mai întîi, pentru bilă direcția normalei exterioare coincide cu direcția razei și de aceea $\cos(\nu, x_k) = \xi_k/R$ și $\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{\xi_k}{R} \frac{\partial}{\partial \xi_k}$. Menționăm de asemenea formulele

$$\frac{\partial r}{\partial \xi_k} = \frac{\zeta_k - x_k}{r}, \qquad \frac{\partial r'}{\partial \xi_k} = \frac{\xi_k - x'_k}{r'},$$

unde x_k și x'_k sînt respectiv coordonatele punctelor x și x'.

Al doilea termen de sub integrala (6) se calculează ușor:

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} = -(m-2) \frac{\xi_k}{R} \frac{1}{r^{m-1}} \frac{\partial r}{\partial \xi_k} = -\frac{m-2}{r^m R} \xi_k(\xi_k - x_k) = \tag{7}$$

$$= -\frac{m-2}{r^m R} \times (R^2 - \xi_k x_k).$$

În mod analog,

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r'^{m-2}} = -\frac{m-2}{r'^m R} (R^2 - \xi_k x'_k).$$

Înmulțim această ecuație cu $(R/\rho)^{m-2}$; ținînd seama de relația $R/\rho r' = 1/r$ găsită mai înainte, obținem

$$\left(\frac{R}{\rho} \right)^{m-2} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r'^{m-2}} = -\frac{m-2}{r^m R} \left(\rho^2 - \xi_k x'_k \frac{\rho^2}{R^2} \right).$$

Punctele x și x' fiind pe aceeași dreaptă ce trece prin originea coordonatelor, atunci $x_k = x'_k \frac{|x|}{|x'|} = x'_k \frac{\rho^2}{\rho\rho'} = x'_k \frac{\rho^2}{R^2}$ și prin urmare

$$\left(\frac{R}{\rho} \right)^{m-2} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r'^{m-2}} = -\frac{m-2}{r^m R} (\rho^2 - \xi_k x_k). \tag{8}$$

Înlocuind expresiile (7) și (8) în integrala (6), obținem în final

$$u(x) = \frac{1}{|S_1|} \int_{S_R} \varphi(\xi) \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^m} \, d_\xi S_R. \tag{9}$$

Formula (9) se numește *formula lui Poisson*, iar expresia $\frac{R^2 - \rho^2}{Rr^m}$, $\rho \leqslant R$ — *nucleul lui Poisson*. Din cele de mai sus rezultă că formula lui Poisson este adevărată cel puțin pentru funcții armonice de clasă $C^{(2)}(\bar{B}_R)$.

Menționăm cîteva proprietăți ale nucleului lui Poisson.

1. Nucleul lui Poisson este nenegativ. Pentru $\rho = R$ el este peste tot egal cu zero, cu excepția punctului $x = \xi$ în vecinătatea căruia nucleul este nemărginit.

2. Pentru x în interiorul bilei, nucleul lui Poisson este o funcție armonică de x.

Să arătăm acest lucru. Dacă punctul x se află în interiorul bilei, atunci $r \neq 0$ și nucleul lui Poisson are derivate continue de orice ordin. Rămîne să arătăm că el satisface ecuația lui Laplace omogenă. Conform formulei lui Leibniz,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \frac{R^2 - \rho^2}{r^m} = \frac{1}{r^m} \frac{\partial^2 (R^2 - \rho^2)}{\partial x_k^2} + 2 \frac{\partial (R^2 - \rho^2)}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{r^m} \right) +$$

$$+ (R^2 - \rho^2) \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left(\frac{1}{r^m} \right).$$

Remarcăm că $\frac{\partial \rho}{\partial x_k} = \frac{x_k}{\rho}$, $\frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{x_k - \xi_k}{r}$, și sumînd după k, obținem

$$\Delta \frac{R^2 - \rho^2}{r^m} = \frac{2m}{r^m} \left[-1 + \frac{1}{r^2} (R^2 + \rho^2 - 2x_k \xi_k) \right],$$

care este egală cu zero, deoarece

$$r^2 = (\xi - x, \xi - x) = R^2 + \rho^2 - 2(\xi, x) = R^2 + \rho^2 - 2x_k \xi_k.$$

3. Are loc identitatea

$$\frac{1}{|S_1|} \int_{S_R} \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^m} \, d_\xi S_R \equiv 1, \qquad \rho < R. \tag{10}$$

Într-adevăr, să examinăm funcția identic egală cu unitatea. Ea este armonică în bila B_R și aparține clasei $C^{(2)}(\bar{B}_R)$; conform demonstrației, pentru ea este adevărată formula lui Poisson care coincide în cazul dat cu (10).

Să arătăm acum că *dacă funcția $\varphi(x)$ este continuă pe sfera S_R, atunci formula lui Poisson furnizează o funcție armonică în B_R, care în orice punct x_0 al sferei S_R are valoarea la limită $\varphi(x_0)$.*

Fie $u(x)$, de argument x, funcția definită în interiorul bilei B_R de formula lui Poisson (9). Este evident că această funcție este continuă și are derivate de orice ordin în interiorul bilei. Se observă că ea este armonică:

$$\Delta u = \frac{1}{|S_1|} \int_{S_R} \varphi(\xi) \Delta_x \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^m} \, d_\xi S_R = 0.$$

Fie punctul x, tinzînd din interior la punctul x_0 de pe sfera S_R. Înmulțim egalitatea (10) cu $\varphi(x_0)$ și scăzînd rezultatul din egalitatea (9), obținem

$$u(x) - \varphi(x_0) = \frac{1}{|S_1|} \int_{S_R} [\varphi(\xi) - \varphi(x_0)] \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^m} \, d_\xi S_R. \tag{11}$$

Funcția $\varphi(x)$ este continuă pe sfera S_R; atunci dacă $\forall \varepsilon > 0$ putem alege pe S_R o vecinătate simetrică σ a punctului x_0, astfel încît $|\varphi(\xi) - \varphi(x_0)| < \frac{1}{2} \varepsilon$, $\forall \xi \in \sigma$. Remarcăm că pe $S_R \setminus \sigma$ are loc inegalitatea $|\xi - x_0| \geqslant \delta$, unde δ este raza vecinătății σ.

Să estimăm diferența $u(x) - \varphi(x_0)$. În acest scop să descompunem integrala (11) pe σ și pe $S_R \setminus \sigma$ astfel:

$$u(x) - \varphi(x_0) = \frac{1}{|S_1|} \int_{\sigma} \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^m} [\varphi(\xi) - \varphi(x_0)] \, d_\xi S_R +$$

$$+ \frac{1}{|S_1|} \int_{S_R \setminus \sigma} \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^m} [\varphi(\xi) - \varphi(x_0)] \, d_\xi S_R.$$

Pentru prima integrală avem

$$\frac{1}{|S_1|} \left| \int_{\sigma} \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^m} [\varphi(\xi) - \varphi(x_0)] \, d_\xi S_R \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2|S_1|} \int_{\sigma} \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^m} \, d_\xi S_R < \frac{\varepsilon}{2|S_1|} \int_{S_R} \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^m} \, d_\xi S_R = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Estimarea pentru prima integrală este independentă de poziția punctului x. Valoarea celei de a doua integrale se micșorează odată cu apropierea punctelor x și x_0. Alegem aceste puncte astfel încît să avem $|x - x_0| < \delta/2$. Atunci

$$r = |\xi - x| = |(\xi - x_0) + (x_0 - x)| \geqslant |\xi - x_0| - |x_0 - x| \geqslant \frac{\delta}{2},$$

de unde $1/r < 2/\delta$; deci

$$\frac{R^2 - \rho^2}{Rr^m} = \frac{(R + \rho)(R - \rho)}{Rr^m} < \frac{2^{m+1}(R - \rho)}{\delta^m}.$$

Cum funcția φ este continuă pe o mulțime compactă, ea este mărginită. Fie $|\varphi(\xi)| \leqslant M = \text{const}$, atunci $|\varphi(\xi) - \varphi(x_0)| \leqslant 2M$. Avem deci

$$|u(x) - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2^{m+2}M(R - \rho)}{\delta^m} \frac{1}{|S_1|} \int_{S_R \setminus \sigma} dS_R <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2^{m+2}MR^{m-1}(R - \rho)}{\delta^m}.$$

Fie $h > 0$ astfel încît $\dfrac{2^{m+2}MR^{m-1}h}{\delta^m} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. În acest caz, dacă $|x_0 - x| < h$, atunci $R - \rho = |x_0| - |x| \leqslant |x_0 - x| < h$ și $|u(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$, de unde rezultă că

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0), \qquad \forall\, x_0 \in S_R. \tag{12}$$

Funcția $u(x)$, definită în bila deschisă de formula lui Poisson (9), o prelungim pe sfera S_R, punînd $u(x) = \varphi(x)$, $x \in S_R$. Funcția astfel prelungită este armonică în interiorul bilei, continuă în baza formulei (12) în bila închisă și satisface condiția la limită (1). Deci problema Dirichlet pentru sferă este rezolvată.

Formula (2), iar cu ea și întreaga demonstrație, presupune că $m > 2$. Totodată formula lui Poisson este adevărată și pentru $m = 2$. În acest caz formula se poate obține plecînd de la reprezentarea integrală (3.6) cap. 11.

§ 4. TEOREMA LUI LIOUVILLE

Din formula lui Poisson decurge ca un corolar teorema demonstrată de Liouville.

Teorema 12.4.1. *O funcție armonică în orice domeniu mărginit și mărginită superior sau inferior este o constantă.*

Dacă funcția $u(x)$ este armonică și $u(x) \leqslant M$, $M = \text{const}$, atunci $-u(x)$ este de asemenea armonică și $-u(x) \geqslant -M$. Prin urmare, este suficient să examinăm cazul cînd funcția armonică este mărginită inferior: $u(x) \geqslant \mu = \text{const}$. Putem presupune că $\mu > 0$; în caz contrar, putem adăuga lui $u(x)$ o constantă pozitivă suficient de mare.

Să fixăm un punct arbitrar x și să descriem în jurul originei coordonatelor o bilă B_R cu raza R, astfel încît punctul x să se afle în interiorul bilei. Funcția dată $u(x)$ este armonică în orice domeniu mărginit, deci este armonică și în bilă și pentru ea are loc formula lui Poisson

$$u(x) = \frac{1}{|S_1|} \int_{S_R} \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^m} u(\xi)\, d_\xi S_R,$$

unde S_R este frontiera bilei. Se observă ușor că $R - \rho \leqslant r \leqslant R + \rho$ și cum funcția $u(x)$ este pozitivă obținem evaluarea

$$\frac{R - \rho}{R(R + \rho)^{m-1}} \frac{1}{|S_1|} \int_{S_R} u(\xi)\, dS_R \leqslant u(x) \leqslant \tag{1}$$

$$\leqslant \frac{R + \rho}{R(R - \rho)^{m-1}} \frac{1}{|S_1|} \int_{S_R} u(\xi)\, dS_R.$$

În virtutea teoremei de medie $u(0) = \dfrac{1}{|S_1| R^{m-1}} \displaystyle\int_{S_R} u(\xi)\, dS_R$ și inegalitatea (1) capătă forma

$$\frac{(R - \rho)R^{m-2}}{(R + \rho)^{m-1}} u(0) \leqslant u(x) \leqslant \frac{(R + \rho)R^{m-2}}{(R - \rho)^{m-1}} u(0).$$

Pentru $R \to \infty$ obținem $u(0) \leqslant u(x) \leqslant u(0)$, adică $u(x) = u(0)$.

§ 5. PROBLEMA DIRICHLET PENTRU EXTERIORUL SFEREI

Fie Ω exteriorul unei bile de rază R și frontieră S_R și să presupunem că se cere să se găsească o funcție $u(x)$ armonică în Ω, satisfăcînd condiția la limită $u|_{S_R} = \varphi(x)$.

Să arătăm că soluția acestei probleme este dată de *formula lui Poisson*

$$u(x) = \frac{1}{|S_1|} \int_{S_R} \frac{\rho^2 - R^2}{Rr^m} \varphi(\xi)\, d_\xi S_R, \qquad \rho > R, \tag{1}$$

unde, cu notațiile din §3, $r = |\xi - x|$ și $\rho = |x|$. Ca și în § 3, se arată că funcția $u(x)$, definită de formula (1), are în exteriorul sferei S_R derivate continui de orice ordin și satisface ecuația lui Laplace. Să studiem comportarea acestei funcții la infinit. Este evident că $r \geqslant \rho - R$. Atunci

$$|u(x)| \leqslant c \frac{\rho + R}{(\rho - R)^{m-1}}; \qquad c = \frac{1}{|S_1| R} \int_{S_R} |\varphi(\xi)|\, dS_R.$$

Ne interesează valorile mari ale lui ρ, de aceea putem presupune că $\rho > 2R$, adică $\rho - R > \frac{1}{2}\rho$. Deci $|u(x)| < \frac{2^m c}{\rho^{m-2}}$ și funcția $u(x)$ este armonică în exteriorul bilei.

Rămîne să demonstrăm egalitatea

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0), \qquad \forall\, x_0 \in S_R. \tag{2}$$

Pentru aceasta calculăm integrala (1) pentru $\varphi(\xi) \equiv 1$. Fie x' simetricul lui x relativ la sfera S_R. Avem ($\rho = |x|$, $\rho' = |x'|$, $r' = |\xi - x'|$)

$$\rho^2 = R^4/\rho'^2, \quad 1/r = 1/r' \cdot R/\rho,$$

și nucleul lui Poisson se poate reprezenta sub forma

$$\frac{\rho^2 - R^2}{Rr^m} = \frac{R^{m-2}}{\rho^{m-2}} \frac{R^2 - \rho'^2}{Rr'^m}. \tag{3}$$

Punctul x' se găsește în interiorul sferei S_R și conform identității (3.10)

$$\frac{1}{|S_1|} \int_{S_R} \frac{\rho^2 - R^2}{Rr^m}\, dS_R = \frac{R^{m-2}}{\rho^{m-2}} \frac{1}{|S_1|} \int_{S_R} \frac{R^2 - \rho'^2}{Rr'^m}\, dS_R = \frac{R^{m-2}}{\rho^{m-2}}. \tag{4}$$

Înmulțim egalitatea (4) cu $\varphi(x_0)$ și o scădem din formula lui Poisson (1):

$$u(x) - \frac{R^{m-2}}{\rho^{m-2}} \varphi(x_0) = \frac{1}{|S_1|} \int_{S_R} \frac{\rho^2 - m^2}{Rr^m} [\varphi(\xi) - \varphi(x_0)]\, dS_R.$$

Repetînd raționamentele din § 3, obținem

$$\lim_{x \to x_0} \left[u(x) - \frac{R^{m-2}}{\rho^{m-2}} \varphi(x_0) \right] = 0.$$

Atunci

$$|u(x) - \varphi(x_0)| \leqslant \left| u(x) - \frac{R^{m-2}}{\rho^{m-2}} \varphi(x_0) \right| + |\varphi(x_0)| \left(1 - \frac{R^{m-2}}{\rho^{m-2}} \right) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

și egalitatea (2) este demonstrată.

§ 6. DERIVATELE FUNCȚIEI ARMONICE LA INFINIT

Teorema 12.6.1. *Fie $u(x)$ o funcție armonică în domeniul nemărginit Ω cu frontiera mărginită Γ. Atunci pentru $|x|$ suficient de mare și pentru orice multiindice α are loc inegalitatea*

$$|D^\alpha u(x)| \leqslant \frac{C_\alpha}{|x|^{m+k-2}}, \qquad k = |\alpha|, \tag{1}$$

unde C_α nu depinde de x.

Frontiera Γ este mărginită și de aceea se poate construi o sferă S_R de rază R, astfel încît Γ să se afle în întregime în interiorul acestei sfere. Pentru funcția $u(x)$ pe exteriorul sferei S_R are loc formula lui Poisson:

$$u(x) = \frac{1}{|S_1|} \int_{S_R} \frac{\rho^2 - R^2}{Rr^m} u(\xi)\, d_\xi S_R, \quad \rho = |x|.$$

În această formulă se poate diferenția sub semnul integralei, așa că

$$D^\alpha u = \frac{1}{|S_1| R} \int_{S_R} u(\xi) D_x^\alpha \left(\frac{\rho^2 - R^2}{r^m} \right) d_\xi S_R. \tag{2}$$

Să arătăm că are loc reprezentarea

$$D^\alpha\left(\frac{\rho^2 - R^2}{r^m}\right) = \frac{p_{k+2}(x)}{r^{m+2k}}, \tag{3}$$

unde $p_{k+2}(x)$ este un polinom de grad cel mult $k+2$, de coeficienți polinoame de ξ. Într-adevăr, polinomul $p_{k+2}(x)$ depinde nu numai de $k = |\alpha|$, ci și de toate componentele multiindicelui α; acest lucru nu-l pune în evidență notația utilizată.

Formula (3) este evident adevărată pentru $k = 0$. Să arătăm că dacă această formulă are loc pentru un k oarecare, atunci ea este adevărată și pentru $k+1$. Fie β un multiindice de lungime $k+1$ și $D^\beta = \dfrac{\partial^{k+1}}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_k}\partial x_{i_{k+1}}}$. Notăm $D^\alpha = \dfrac{\partial^k}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_k}}$; este evident că $|\alpha| = k$; dar

$$D^\beta\left(\frac{\rho^2 - R^2}{r^m}\right) = \frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}} D^\alpha\left(\frac{\rho^2 - R^2}{r^m}\right) = \frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}}\left(\frac{p_{k+2}(x)}{r^{m+2k}}\right) =$$

$$= \frac{1}{r^{m+2k+2}}\left[r^2\frac{\partial p_{2k+2}}{\partial x_{i_{k+1}}} - (m+2k)(x_{i_{k+1}} - \xi_{i_{k+1}})\,p_{k+2}(x)\right].$$

Expresia dintre parantezele drepte este un polinom de grad cel mult $k+3$ și coeficienții acestui polinom sînt polinoame de ξ. Reprezentarea (3) a fost astfel stabilită.

Fie ρ suficient de mare, de exemplu, fie $\rho > 2R$. Atunci $r > \rho - R > \rho/2$ și obținem evaluarea derivatei nucleului lui Poisson

$$D^\alpha\left(\frac{\rho^2 - R^2}{Rr^m}\right) \leqslant \frac{2^{m+2k}\,|p_{k+2}(x)|}{R\,|x|^{m+2k}} \leqslant \frac{C'_\alpha}{|x|^{m+k-2}}, \qquad C'_\alpha = \text{const}.$$

Astfel,

$$|D^\alpha u(x)| \leqslant \frac{C_\alpha}{|x|^{m+k-2}}, \qquad C_\alpha = \frac{C'_\alpha}{|S_1|}\int_{S_R}|u(\xi)|\,dS_R.$$

Remarcăm că pentru $m = 2$ se poate obține o evaluare a derivatelor unei funcții armonice ce este de un ordin mai mare decît cel dat de formula (1).

§ 7. SINGULARITĂȚI NEESENȚIALE ALE FUNCȚIILOR ARMONICE

Fie x_0 un punct arbitrar într-un domeniu Ω. Fie funcția $u(x)$ armonică în domeniul $\Omega\setminus\{x_0\}$. Să presupunem că pentru $x \to x_0$ această funcție crește mai încet decît soluția fundamentală a ecuației lui Laplace cu singularitate în x_0. Mai precis, să presupunem că există o funcție $\mu(\delta)$, definită pentru $\delta > 0$, astfel încît $\mu(\delta) \to 0$ cînd $\delta \to 0$ și pentru $|x - x_0| < \delta$ avem

$$\left.\begin{aligned} |u(x)| &\leqslant \mu(\delta)\,|x - x_0|^{2-m}, && m > 2;\\ |u(x)| &\leqslant \mu(\delta)\ln\frac{1}{|x - x_0|}, && m = 2. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Atunci spunem că în punctul x_0 funcția $u(x)$ are o singularitate neesențială.

Teorema 12.7.1. *Dacă funcția $u(x)$ este armonică în $\Omega\setminus\{x_0\}$ și are în x_0 o singularitate neesențială, atunci există $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)$; dacă se prelungește funcția u în x_0, punînd $u(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} u(x)$, atunci această funcție este armonică în domeniul Ω.*

Dăm demonstrația, presupunînd că $m > 2$; cazul $m = 2$ se analizează în mod analog. Plasăm originea coordonatelor în punctul x_0; atunci $x_0 = 0$. Construim o bilă cu centrul în originea coordonatelor și cu raza R astfel încît bila respectivă împreună cu frontiera ei S_R să se găsească în Ω. Construim funcția $u_1(x)$ armonică în bila $|x| < R$ și care coincide cu $u(x)$ pe sfera S_R:

$$u_1(x) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\int_{S_R} u(\xi)\,\frac{R^2 - \rho^2}{Rr^m}\,d_\xi S_R.$$

Diferența $w(x) = u(x) - u_1(x)$ este armonică în domeniul $0 < |x| < R$ (bilă fără centru), este egală cu zero pe sfera S_R și pentru δ suficient de mic satisface (în virtutea mărginirii funcției $u_1(x)$) inegalitatea

$$|x| \leqslant \delta, \qquad |w(x)| \leqslant 2\mu(\delta)\,|x|^{2-m}. \tag{2}$$

Fie δ astfel încît $\delta^{2-m} > 4R^{2-m}$. Introducem funcția ajutătoare

$$w_\delta(x) = 4\mu(\delta)\,[|x|^{2-m} - R^{2-m}]. \tag{3}$$

În coroana sferică $\delta < |x| < R$, funcțiile $w_\delta(x) + w(x)$ și $w_\delta(x) - w(x)$ sînt armonice, iar pe frontiera acestei coroane ele sînt

nenegative: aceste funcţii sînt egale cu zero pentru $|x| = R$ şi mai mari decît $\mu(\delta)\delta^{2-m}$ pentru $|x| = \delta$. În virtutea principiului de maxim (§ 7 cap. 11) avem

$$|w(x)| \leqslant w_\delta(x), \qquad \delta \leqslant |x| \leqslant R. \tag{4}$$

Fixăm pe x, $0 < x < R$, şi facem $\delta \to 0$. Din relaţiile (3) şi (4) rezultă că $w(x) = 0$. Astfel, în domeniul $0 < |x| < R$ funcţia $u(x)$ coincide cu funcţia $u_1(x)$, armonică în bila $|x| < R$. De aici rezultă că există limita

$$\lim_{x\to 0} u(x) = \frac{1}{R^{m-1}|S_1|} \int_{S_R} u(\xi)\, d_\xi S_R. \tag{5}$$

Dacă se presupune că $u(0)$ are valoarea dată de (5), atunci funcţia $u(x)$ va fi reprezentată prin integrala lui Poisson în toată bila $|x| < R$ şi va fi armonică în această bilă şi, prin urmare, în tot domeniul Ω.

Corolar la teorema 12.7.1. *Fie Ω' un domeniu m-dimensional nemărginit, $m > 2$ şi funcţia $u'(x')$ armonică în Ω' mai puţin punctul de la infinit. Fie, de asemenea,*

$$|u'(x')| \leqslant \mu(\delta), \qquad |x'| \geqslant \frac{1}{\delta}, \tag{6}$$

unde funcţia $\mu(\delta)$ este definită pentru $\delta > 0$ şi converge la zero pentru $\delta \to 0$. Atunci $u'(x') = O(|x|^{2-m})$ pentru $|x'|$ suficient de mare şi, prin urmare, funcţia $u'(x')$ este armonică în Ω'.

Plasăm originea coordonatelor în domeniul complementar lui Ω' şi aplicăm transformarea lui Kelvin. Prin aceasta Ω' trece într-un domeniu mărginit Ω, punctul de la infinit trece în originea coordonatelor, iar funcţia $u(x)$ corespunzătoare funcţiei $u'(x')$, prin transformarea lui Kelvin, va fi armonică în $\Omega \setminus \{0\}$ şi va satisface inegalităţile (1). Conform celor demonstrate, $u(x)$ este mărginită în vecinătatea originei coordonatelor şi, prin urmare, $u'(x') = O(|x'|^{2-m})$, adică ea este armonică în Ω'.

Pentru $m = 2$ corolarul de mai sus este adevărat dacă în locul inegalităţii (6) este satisfăcută inegalitatea

$$|u'(x')| \leqslant \mu(\delta) \ln |x'|, \qquad |x'| > \frac{1}{\delta}.$$

Capitolul 13

FUNCŢII SFERICE

Acest capitol conţine elemente de teoria funcţiilor sferice în spaţiul cu mai multe dimensiuni. Teoria funcţiilor sferice este prezentată mai pe larg într-o serie de lucrări, dintre care menţionăm [52], [19], [44] (vol. III), precum şi în vechiul, dar din multe puncte de vedere actualul articol [18]; în [19] şi [44] se analizează funcţiile sferice în spaţiul cu trei dimensiuni. Unele probleme din teoria funcţiilor sferice sînt studiate în monografia [29].

Teoria funcţiilor sferice are importante aplicaţii în fizica matematică, în fizica teoretică, precum şi în teoria ecuaţiilor integrale singulare.

§ 1. NOŢIUNEA DE FUNCŢIE SFERICĂ

Să considerăm spaţiul euclidian m-dimensional de coordonate $x_1, x_2, \ldots, x_m$ şi polinoamele omogene de aceste coordonate, satisfăcînd ecuaţia lui Laplace omogenă. Astfel de polinoame sînt, evident, armonice în orice domeniu mărginit. Polinoamele armonice omogene de un grad n dat nu sînt greu de construit: pentru aceasta este suficient să se considere polinomul omogen de gradul n cu coeficienţi arbitrari şi să se aplice operatorul lui Laplace; să se egaleze cu zero rezultatul obţinut în urma aplicării operatorului lui Laplace. Aceasta conduce la o anumită relaţie între coeficienţi; polinoamele ale căror coeficienţi satisfac această relaţie vor fi şi armonice.

De exemplu, să examinăm cazul a trei variabile independente x_1, x_2, x_3. Este evident că orice polinom de gradul zero sau de gradul întîi este armonic. Polinomul omogen de gradul al doilea are în cazul general forma

$$\sum_{j,k=1}^{3} a_{jk} x_j x_k, \quad a_{jk} = a_{ki}.$$

Operatorul lui Laplace aplicat acestuia are valoarea $2(a_{11} + a_{22} + a_{33})$; egalînd-o cu zero, obținem $a_{33} = -(a_{11} + a_{22})$. Aceasta dă forma generală a polinomului armonic de gradul al doilea cu trei variabile independente

$$a_{11}(x_1^2 - x_3^2) + a_{22}(x_2^2 - x_3^2) + 2a_{11}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3.$$

Ultima formă arată, printre altele, că între polinoamele amintite există cinci liniar independente. Acestea sînt, de exemplu, polinoamele

$$x_1^2 - x_3^2,\ x_1^2 - x_2^2,\ x_1x_2,\ x_1x_3,\ x_2x_3.$$

Există $2n + 1$ polinoame independente, omogene, armonice de gradul n în trei variabile independente. În cazul general a m variabile independente, numărul polinoamelor liniar independente, omogene, armonice de gradul n este egal cu

$$(2n + m - 2)\frac{(m + n - 3)!}{(m - 2)!\,n!}. \tag{1}$$

Mărimea (1) va fi desemnată în cele ce urmează prin $K_{n,m}$.

Să justificăm formula (1). Mai întîi să calculăm numărul $K_{n,m}$ al tuturor polinoamelor omogene liniar independente de gradul n dat, în spațiul m-dimensional. Evident, $K_{n,m}$ este egal cu numărul monoamelor diferite de forma $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}$, $|\alpha| = n$. Un astfel de monom se poate reprezenta simbolic în modul următor (fig. 15).

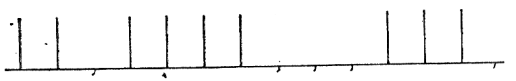

Fig. 15

Plasăm pe dreaptă $n + m - 1$ puncte. În primele α_1 puncte ridicăm segmente verticale, în următorul punct plasăm o virgulă, apoi în următoarele α_2 puncte ridicăm iar segmente verticale, apoi din nou o virgulă și așa mai departe. Obținem o figură care conține n segmente verticale și $m - 1$ virgule; virgulele (fig. 15) separă segmentele verticale în m ansambluri respectiv cu $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ segmente verticale. Astfel, figura 15 corespunde unui monom de gradul nouă $x_1^2 x_2^4 x_5^3$ în spațiul cu șase dimensiuni de coordonate $x_1, x_2, \dots, x_6$. Obținem toate monoamele posibile de gradul n cu m variabile independente dacă transformăm $m - 1$ puncte în virgule în toate modurile posibile. Numărul acestor modalități este egal cu numărul combinărilor de $n + m - 1$ elemente luate cîte $m - 1$; deci

$$K_{n;m} = \frac{(n + m - 1)!}{(m - 1)!\,n!}. \tag{2}$$

Pentru a obține polinoamele armonice omogene de gradul n este necesar ca laplaceianul (adică operatorul lui Laplace) să se anuleze. Evident, un astfel de laplaceian va fi un polinom omogen de gradul $n - 2$. Să arătăm că și reciproc, orice polinom omogen de gradul $n - 2$ poate fi considerat ca laplaceianul unui anumit polinom omogen de gradul n.

Fie dat un polinom de gradul $n - 2$, în general, neomogen $f(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{n-2} a_\alpha x^\alpha$. Scriem ecuația $\Delta g = f(x)$ și vom căuta soluția ei sub forma produsului

$$g(x) = \left(1 - \sum_{k=1}^{m} x_k^2\right) \sum_{|\alpha|=0}^{n-2} b_\alpha x^\alpha;$$

este evident că numărul coeficienților b_α, cît și numărul coeficienților a_α este egal cu $N = \sum_{j=0}^{n-1} K_{j,m}$. Expresia Δg reprezintă un polinom de gradul $n - 2$; egalînd-o cu polinomul $f(x)$, sîntem conduși la un sistem de N ecuații algebrice liniare cu N necunoscute b_α. Acest sistem are soluție unică deoarece, în caz contrar, punînd $f(x) \equiv 0$, am obține polinomul armonic $g(x) \neq 0$, care se anulează pe sfera $\sum_{k=1}^{m} x_k^2 = 1$, ceea ce ar contrazice teorema de unicitate a soluției problemei Dirichlet interioară.

Fie acum $f(x)$ un polinom omogen de gradul $n - 2$. Să reprezentăm polinomul $g(x)$ sub forma unei sume de polinoame omogene:

$$g(x) = g_n(x) + g_{n-1}(x) + \dots + g_0(x),$$

indicele inferior indică gradul polinomului respectiv; de aici

$$f(x) = \Delta g_n(x) + \Delta g_{n-1}(x) + \dots + \Delta g_0(x). \tag{3}$$

Termenii din dreapta expresiei (3) sînt polinoame de gradul $n - 2$, $n-3, \dots, 0$, respectiv, și expresia (3) reprezintă descompunerea polinomului $f(x)$ într-o sumă de polinoame omogene. Această descompunere este însă unică iar $f(x)$ este un polinom omogen de gradul $n - 2$; de aici rezultă că $\Delta g_{n-1}(x) = \dots \Delta g_0(x) \equiv 0$, iar $\Delta g_n(x) = f(x)$. Ca rezultat am obținut un polinom omogen $g_n(x)$ de gradul n, al cărui laplaceian coincide cu polinomul omogen dat $f(x)$ de gradul $n - 2$.

Astfel, operatorul lui Laplace transformă spațiul Π_n al polinoamelor omogene de gradul n pe spațiul Π_{n-2} al polinoamelor omogene

de gradul $n-2$. Polinoamele armonice omogene de gradul n reprezintă nucleul acestor transformări. Dimensiunea acestui nucleu (notată mai sus cu $k_{n,m}$) este egală cu diferența dimensiunilor spațiilor Π_n și Π_{n-2}:

$$k_{n,m} = K_{n,m} - K_{n-2,m} = \frac{(n+m-1)!}{(m-1)!n} - \frac{(n+m-3)!}{(m-1)!\,(n-2)!} =$$

$$= (2n+m-2)\,\frac{(n+m-3\,!)}{(m-2)!\,n!}.$$

Formula (1) a fost astfel justificată. Expresia (1) admite o evaluare simplă care va fi folosită în cele ce urmează, și anume

$$k_{n,m} = \frac{(2n+m-2)(n+m-3)(n+m-4)\ldots(n+1)}{(m-2)!} = O(n^{m-2}). \tag{4}$$

Pentru $m=2$, $n>0$ există numai două polinoame armonice omogene liniar independente de gradul n, și anume polinoamele $\mathrm{Re}\,(z^n)$ și $\mathrm{Im}\,(z^n)$, unde $z = x_1 + ix_2$.

Să trecem de la coordonatele carteziene $x_1, x_2, \ldots, x_m$ la coordonatele sferice $\rho, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{m-2}, \vartheta_{m-1}$ conform formulelor:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \rho\cos\vartheta_1,\\
x_2 &= \rho\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{m-1} &= \rho\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\ldots\sin\vartheta_{m-2}\cos\vartheta_{m-1},\\
x_m &= \rho\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\ldots\sin\vartheta_{m-2}\sin\vartheta_{m-1}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Fie $P_{n,m}(x)$ un polinom armonic omogen de gradul n de variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Utilizînd relațiile (5), polinomul omogen de gradul n dat, capătă forma

$$P_{n,m}(x) = \rho^n Y_{n,m}(\Theta). \tag{6}$$

Aici prin Θ am desemnat punctul de pe sfera unitate de coordonate unghiulare $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{m-1}$.

Funcția $Y_{n,m}(\Theta)$ se numește *funcție sferică m-dimensională de ordinul n*. În cele ce urmează vom considera dimensiunea m a spațiului fixată și de aceea vom neglija cuvîntul „m-dimensional" din denumirea funcțiilor sferice.

Din definiție rezultă imediat că funcția sferică de ordinul n este un polinom de gradul n în raport cu sinusurile și cosinusurile coordonatelor unghiulare; în particular, $Y_{0,m}(\Theta) = \text{const}$. Este de asemenea evident că există $k_{n,m}$ funcții sferice liniar independente de ordinul n; le vom nota cu $Y^{(k)}_{n,m}(\Theta)$, $k = 1, 2, \ldots, k_{n,m}$.

Dacă $m=2$, atunci există două funcții sferice liniar independente de ordinul $n>0$. Drept astfel de funcții pot fi luate $\cos n\vartheta$ și $\sin n\vartheta$, unde ϑ este unghiul polar în plan. Din această cauză $m=2$ nu prezintă un interes deosebit pentru teoria funcțiilor sferice și mai jos, peste tot în acest capitol, se va presupune că $m>2$.

§ 2. ECUAȚIA DIFERENȚIALĂ A FUNCȚIILOR SFERICE

Să considerăm expresia operatorului lui Laplace în coordonate sferice (formulele (2,7) și (2.8) cap. 11)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{m-1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho^2}\,\delta, \tag{1}$$

unde

$$\delta = -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{q_j\,\sin^{m-j-1}\vartheta_j}\,\frac{\partial}{\partial\vartheta_j}\left(\sin^{m-j-1}\vartheta_j\,\frac{\partial}{\partial\vartheta_j}\right). \tag{2}$$

Operatorul lui Laplace este invariant la rotația axelor de coordonate carteziene; din formula (1) reiese că și operatorul δ are aceeași proprietate. În ecuația lui Laplace omogenă $\Delta u = 0$ să punem în locul lui u expresia $\rho^n Y^k_{n,m}(\Theta)$; simplificînd cu ρ^{n-2}, obținem ecuația diferențială a funcțiilor sferice

$$\delta Y^{(k)}_{n,m}(\Theta) - n(n+m-2)\,Y^{(k)}_{n,m}(\Theta) = 0. \tag{3}$$

Ecuația (3) arată, în particular, că valorile $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 1, 2, \ldots$, sînt valorile proprii ale operatorului δ de multiplicitate (cel puțin) $k_{n,m}$; $Y^{(k)}_{n,m}(\Theta)$, $1 \leqslant k \leqslant k_{n,m}$, reprezintă funcțiile proprii ale operatorului δ corespunzătoare valorilor proprii $n(n+m-2)$. Mai jos (§7) se va arăta că operatorul δ nu are alte funcții proprii și, prin urmare, multiplicitatea valorilor proprii $n(n+m-2)$ este exact egală cu $k_{n,m}$.

După cum s-a spus mai sus, produsul $\rho^n Y_{n,m}(\Theta)$ satisface ecuația lui Laplace omogenă. Să căutăm pentru ce valori ale factorului $\varphi(\rho)$ produsul $\varphi(\rho)\,Y_{n,m}(\Theta)$ satisface aceeași ecuație. Egalăm cu zero laplaceianul acestui produs

$$\left[\varphi''(\rho) + \frac{m-1}{\rho}\,\varphi'(\rho)\right] Y_{n,m}(\Theta) - \frac{1}{\rho^2}\,\varphi(\rho)\,\delta Y_{n,m}(\Theta) = 0.$$

Eliminînd $\delta Y_{n,m}(\Theta)$ cu ajutorul ecuației (3), obținem

$$\varphi''(\rho) + \frac{m-1}{\rho}\varphi'(\rho) - \frac{n(n+m-2)}{\rho^2}\varphi(\rho) = 0. \qquad (4)$$

Aceasta este o ecuație diferențială liniară de ordinul al doilea de tip Euler. Soluțiile sale liniar independente sînt ρ^n și ρ^{-n-m+2}. Prima dintre ele ne este deja cunoscută, a doua furnizează funcțiile $Y_{n,m}(\Theta)/\rho^{n+m-2}$, armonice în domeniile ce nu conțin originea coordonatelor.

§ 3. NOTAȚII ȘI CONSTRUCȚII AUXILIARE

Clasa $C^{(k)}(S_1)$. Vom considera o anumită clasă de funcții definite pe sfera unitate S_1; această clasă, pe care o vom desemna prin $C^{(k)}(S_1)$, se definește în modul următor. Fie pe sfera S_1 un punct arbitrar Θ_0 și $\sigma(\Theta_0)$ o vecinătate a sa suficient de mică, $\sigma(\Theta_0) \subset S_1$. În punctul Θ_0 considerăm planul tangent la sferă; proiectăm ortogonal vecinătatea $\sigma(\Theta_0)$ pe acest plan și fie $G(\Theta_0)$ proiecția astfel obținută. Evident, $G(\Theta_0) \subset E_{m-1}$. Notăm cu y punctul din $G(\Theta_0)$ obținut prin proiecția punctului variabil $\Theta \in \sigma(\Theta_0)$. Fie $f(\Theta)$ o funcție dată pe sfera S_1. Notăm $F(y) = f(\Theta)$, $\Theta \in \sigma(\Theta_0)$. Vom spune că $f \in C^{(k)}(S_1)$ dacă $F \in C^{(k)}(G(\Theta_0))$ pentru orice $\Theta_0 \in S_1$.

Pentru clasa $C^{(k)}(S_1)$ se poate da o altă definiție echivalentă. Fie $f(\Theta)$ o funcție dată pe S_1. Construim coroana sferică $\Sigma = \{x : \rho_1 \leqslant |x| \leqslant \rho_2\}$, unde ρ_1 și ρ_2 sînt numere arbitrare, pozitive, fixate. Dacă $\rho_1 < 1 < \rho_2$, atunci $S_1 \subset \Sigma$. Să prelungim funcția $f(\theta)$ pe Σ prin relația $f^*(x) = f\left(\frac{x}{|x|}\right)$; aici f^* desemnează funcția prelungită. Este clar că $f^*(x)$ este constantă pe orice dreaptă ce trece prin originea axelor de coordonate și, prin urmare, ea nu depinde de $\rho = |x|$.

Clasa $C^{(k)}(S_1)$ poate fi acum definită astfel: $f \in C^{(k)}(S_1)$ dacă $f^* \in C^{(k)}(\Sigma)$.

Medierea pe sferă. Pentru funcțiile definite pe sfera S_1 se poate dezvolta un aparat de mediere similar cu cel din cap. 2. Pentru aceasta, comparativ cu cazul spațiului euclidian, vom avea unele modificări, deoarece sfera este o varietate compactă fără margine (bord).

Fie Θ și Θ' puncte pe sfera S_1 și, de asemenea, vectorii corespunzători lor în spațiul euclidian E_m și fie $\delta = |\theta - \theta'| = \|\Theta - \Theta'\|_{E_m}$.

Numim *nucleu de mediere* funcția $\omega_h(\delta)$, satisfăcînd condițiile 1 și 2 §1 cap. 2, precum și condiția

$$\int_{S_1} \omega_h(\delta)\, d_{\Theta'} S_1 = \int_{\delta \leqslant h} \omega_h(\delta)\, d_{\Theta'} S_1 = 1, \qquad (1)$$

care înlocuiește condiția 3 §1 cap. 2. În particular, $\omega_h(\delta)$ poate fi funcția

$$\omega_h(\delta) = \begin{cases} c_h e^{-\frac{h^2}{h^2-\delta^2}}, & \delta < h, \\ 0, & \delta \geqslant h, \end{cases} \qquad (2)$$

unde c_h este determinat de relația (1).

Dacă funcția $f(\Theta)$ este integrabilă pe S_1, atunci media ei se definește prin formula

$$f_h(\Theta) = \int_{S_1} \omega_h(\delta) f(\Theta')\, d_{\Theta'} S_1. \qquad (3)$$

Amintim următoarele proprietăți ale funcțiilor de medie pe sferă, ele demonstrîndu-se ca și în cap. 2:

a) $f_h \in C^{(\infty)}(S_1)$; b) dacă $1 \leqslant \rho < \infty$ și $f \in L_p(S_1)$, atunci $\|f_h - f\|_{L_p(S_1)} \xrightarrow[h \to \infty]{} 0$; c) dacă $f \in C(S_1)$, atunci $f_h(\Theta) \to f(\Theta)$ uniform pe S_1.

Din proprietățile a) și b) rezultă că mulțimea $C^{(\infty)}(S_1)$ este densă în $L_p(S_1)$ pentru orice p, $1 \leqslant p < \infty$.

Inegalitatea lui Markov. Fie t o variabilă reală, $f(t)$ un polinom de gradul n și $M = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t)|$. Atunci are loc inegalitatea lui Markov[1]

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |f'(t)| \leqslant \frac{2M}{b-a} n^2. \qquad (4)$$

Din inegalitatea (4) rezultă și cunoscuta evaluare pentru derivatele de ordin superior

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |f^{(s)}(t)| \leqslant \frac{2^s M}{(b-a)^s} n^{2s}. \qquad (5)$$

§ 4. OPERATORUL δ ȘI PUTERILE LUI. ORTOGONALITATEA FUNCȚIILOR SFERICE

Se dă operatorul δ pe mulțimea $C^{(2)}(S_1)$. Să arătăm că în spațiul $L_2(S_1)$ acest operator este simetric. Într-adevăr, domeniul său de definiție este dens în $L_2(S_1)$, deoarece el conține mulțimea densă $C^{(\infty)}(S_1)$ (vezi §3). Mai mult, dacă $f, g \in C^{(2)}(S_1)$, atunci

$$(\delta f, g) = (\delta f, g)_{L_2(S_1)} = \int_{S_1} g \delta f\, dS_1 = \int_{S_1} g^* \delta f\, dS_1;$$

[1] Vezi, de exemplu, demonstrația din lucrarea Natanson I. P., *Teoria constructivă a funcțiilor*, Gostehizdat, Moskova, 1949, p. 174.

aici și în cele ce urmează steluța desemnează prelungirea funcției la coroana sferică Σ (§3).

Din formula (2.1) se deduce ușor că

$$\delta f = -[\rho^2 \Delta f^*]_{\rho=1} = -[\Delta f^*]_{\rho=1};$$

de aici

$$(\delta f, g) - (f, \delta g) = \int_{S_1} (f^* \Delta g^* - g^* \Delta f^*)\, dS_1.$$

Înmulțind aceasta cu $\rho^{m-1} d\rho$ și integrînd între limitele $\rho_1 < \rho < \rho_2$, obținem

$$(\delta f, g) - (f, \delta g) = \frac{m}{\rho_2^m - \rho_1^m} \int_{\Sigma} (f^* \Delta g^* - g^* \Delta f^*)\, dx. \tag{1}$$

Mai departe, conform formulei Green (6.10) cap. 9, avem

$$\int_{\Sigma} (f^* \Delta g^* - g^* \Delta f^*)\, dx = \int_{S_{\rho_1} \cup S_{\rho_2}} \left(f^* \frac{\partial g^*}{\partial \nu} - g^* \frac{\partial f^*}{\partial \nu} \right) dS.$$

Normala ν, exterioară relativ la Σ, este îndreptată în direcția razei-vectoare pe S_{ρ_2} și în sens contrar razei-vectoare pe S_{ρ_1}. De aceea

$$\left.\frac{\partial g^*}{\partial \nu}\right|_{S_{\rho_1}} = -\left.\frac{\partial g^*}{\partial \rho}\right|_{\rho=\rho_1}, \quad \left.\frac{\partial g^*}{\partial \nu}\right|_{S_{\rho_2}} = \left.\frac{\partial g^*}{\partial \rho}\right|_{\rho=\rho_2};$$

în ambele cazuri această derivată este nulă, deoarece g^* nu depinde de ρ. Din formula (1) rezultă deci $(\delta f, g) = (f, \delta g)$ și afirmația noastră este demonstrată.

Nu este greu de arătat că operatorul δ este pozitiv, adică satisface inegalitatea $(\delta f, f) \geqslant 0$. Într-adevăr, repetînd raționamentele de mai sus, obținem egalitatea

$$(\delta f, f) = -\frac{m}{\rho_2^m - \rho_1^m} \int_{\Sigma} f^* \Delta f^*\, dx$$

și din formula Green (6.7) cap. 9 deducem

$$(\delta f, f) = \frac{m}{\rho_2^m - \rho_1^m} \left[\int_{\Sigma} (\operatorname{grad} f^*)^2\, dx - \int_{S_{\rho_1} \cup S_{\rho_2}} f^* \frac{\partial f^*}{\partial \nu}\, dS \right] =$$

$$= \frac{m}{\rho_2^m - \rho_1^m} \int_{\Sigma} (\operatorname{grad} f^*)^2\, dx \geqslant 0.$$

Din cele demonstrate rezultă, printre altele, că toate valorile proprii ale operatorului δ sînt nenegative.

Operatorul δ^l este definit pe $C^{(2l)}(S_1)$; din ecuația (2.3) este evident că funcțiile sferice sînt funcții proprii ale acestui operator, corespunzătoare valorilor proprii $n^l(n+m-2)^l$; de aici rezultă că pentru orice număr natural l, funcțiile sferice satisfac ecuația diferențială

$$\delta^l Y_{n,m}(\Theta) - n^l(n+m-2)^l Y_{n,m}(\Theta) = 0. \tag{2}$$

Ca funcții proprii ale operatorului simetric δ, funcțiile sferice de ordine diferite sînt ortogonale în $L_2(S)$. Funcțiile sferice liniar independente de același ordin pot fi ortogonalizate, de exemplu, prin procedeul de ortogonalizare Schmidt, astfel

$$\int_{S_1} Y^{(k)}_{n,m}(\Theta)\, Y^{(k')}_{n',m}(\Theta)\, dS_1 = \begin{cases} 0, & n \neq n' \text{ sau } k \neq k', \\ 1, & n = n' \text{ și } k = k'. \end{cases} \tag{3}$$

De aici, ca de obicei, rezultă că orice funcție $f \in L_2(S_1)$ poate fi comparată cu seria sa ortogonală în raport cu funcțiile sferice

$$f(\Theta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_{n,m}} a_n^{(k)} Y^{(k)}_{n,m}(\Theta), \tag{4}$$

unde

$$a_n^{(k)} = \int_{S_1} f(\Theta)\, Y^{(k)}_{n,m}(\Theta)\, dS_1. \tag{5}$$

Seria (4) converge în metrica lui $L_2(S_1)$. Mai jos (§7) vom arăta că sistemul funcțiilor sferice este complet în $L_2(S_1)$ și, prin urmare, semnul de echivalență din relația (4) poate fi înlocuit cu semnul egalității.

§ 5. DEZVOLTAREA SOLUȚIEI FUNDAMENTALE ÎN SERIE DE POLINOAME

Să analizăm funcția r^{2-m}, $r = |\xi - x|$, care diferă de soluția fundamentală a ecuației lui Laplace numai printr-un factor constant. Notăm $|\xi| = R$, $|x| = \rho$, și fie $\rho < R$. Avem $r^2 = R^2 - 2\rho R \cos\gamma + \rho^2$, unde γ este unghiul dintre vectorii x și ξ. Notînd $\cos\gamma = t$, obținem

$$\frac{1}{r^{m-2}} = \frac{1}{(R^2 - 2\rho R t + \rho^2)^{\frac{m-2}{2}}}.$$

Deoarece am presupus $\rho < R$, are loc dezvoltarea

$$\frac{1}{r^{m-2}} = \frac{1}{R^{m-2}} \frac{1}{\left(1 - 2\frac{\rho}{R}t + \frac{\rho^2}{R^2}\right)^{\frac{m-2}{2}}} = \frac{1}{R^{m-2}} \sum_{n=0}^{\infty} I_{n;m}(t) \frac{\rho^n}{R^n}; \quad (1)$$

ea converge pentru $\rho < R$, deoarece punctele singulare ale funcției $(1 - 2zt + z^2)^{-\frac{m-2}{2}}$ sînt $e^{\pm i\gamma}$ ce se găsesc pe cercul unitate. Notînd $\rho/R = \sigma$ și calculînd direct coeficienții din dezvoltarea Taylor, se constată ușor că produsul $I_{n,m}(t)\rho^n = I_{n,m}(\cos\gamma)\rho^n$ este un polinom omogen de gradul n în raport cu coordonatele carteziene ale punctului x.

Să analizăm mai amănunțit caracterul dezvoltării (1). Să presupunem că $R = 1$ și prin urmare $\rho < 1$. Atunci seria (1) devine

$$\frac{1}{r^{m-2}} = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n,m}(t)\, \rho^n. \quad (1a)$$

Să examinăm mai întîi cazul cînd numărul m este impar, $m = 2s + 3$; atunci

$$\frac{1}{r^{m-2}} = \frac{1}{(1 - 2\rho t + \rho^2)^{s+\frac{1}{2}}} = \frac{2^s s!}{(2s)!\,\rho^s} \frac{d^s}{dt^s} \frac{1}{(1 - 2\rho t + \rho^2)^{1/2}}. \quad (2)$$

Din teoria polinoamelor Legendre este cunoscută dezvoltarea

$$\frac{1}{(1 - 2\rho t + \rho^2)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)\rho^n, \quad (3)$$

unde P_n este polinomul Legendre de gradul n. În cazul $m = 3$, foarte important pentru aplicații, formula (3) conduce imediat la dezvoltarea căutată a soluției fundamentale. În cazul general, înlocuind seria (3) în identitatea (2), obținem

$$\frac{1}{r^{m-2}} = \frac{2^s s!}{(2s)!\,\rho^s} \frac{d^s}{dt^s} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)\rho^n.$$

Să arătăm că se poate diferenția sub semnul sumei. Pentru aceasta este suficient să arătăm că seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^s P_n(t)}{dt^s} \rho^n, \quad (4)$$

obținută din diferențiere, converge uniform în dreptunghiul $-1 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant \rho \leqslant \rho'$, unde ρ' este orice număr între 0 și 1. Se știe că $|P_n(t)| \leqslant 1$, dacă $-1 \leqslant t \leqslant 1$; conform inegalității lui Markov (§ 3), avem $\left|\frac{d^s P_n(t)}{dt^s}\right| \leqslant n^{2s}$, seria (4) este majorată de seria numerică convergentă $\sum_{n=0}^{\infty} n^{2s}\rho'^n$ și, prin urmare, converge uniform. Deci

$$\frac{1}{r^{m-2}} = \frac{2^s s!}{(2s)!\,\rho^s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^s P_n(t)}{dt^s} \rho^n =$$

$$= \frac{2^s s!}{(2s)!\,\rho^s} \sum_{n=s}^{\infty} \frac{d^s P_n(t)}{dt^s} \rho^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{s+\frac{1}{2}}(t)\rho^n, \quad (5)$$

unde s-a introdus notația

$$C_n^{s+\frac{1}{2}}(t) = \frac{2^s s!}{(2s)!} \frac{d^s P_{n+s}(t)}{dt^s}. \quad (6)$$

Fie acum m par, $m = 2s + 2$. În acest caz,

$$\frac{1}{r^{m-2}} = \frac{1}{(1 - 2\rho t + \rho^2)^s} = \frac{1}{2^{s-1}(s-1)!\rho^{s-1}} \frac{d^{s-1}}{dt^{s-1}} \frac{1}{1 - 2\rho t + \rho^2}. \quad (7)$$

Avem $t = \cos\gamma = \frac{1}{2}(\zeta + \zeta^{-1})$, $\zeta = e^{i\gamma}$; de aici

$$\frac{1}{1 - 2t\rho + \rho^2} = \left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)^{-1} \left(\frac{1}{\frac{1}{\zeta} - \rho} - \frac{1}{\zeta - \rho}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n+1)\gamma}{\sin\gamma} \rho^n. \quad (8)$$

Dar

$$\frac{\sin(n+1)\gamma}{\sin\gamma} = \frac{1}{n+1} \frac{d\cos(n+1)\gamma}{d\cos\gamma} =$$

$$= \frac{1}{n+1} \frac{d}{dt} \cos[(n+1)\arccos t] = \frac{1}{n+1} \frac{dT_{n+1}(t)}{dt},$$

unde T_k este un polinom Cebîșev de gradul k. Folosind din nou inegalitatea lui Markov, precum și inegalitatea evidentă $|T_k(t)| =$

$= |\cos k \arccos t| \leqslant 1$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$, găsim că după înlocuirea seriei (8) în identitatea (7) se poate efectua diferențierea termen cu termen. Aceasta conduce la dezvoltarea

$$\frac{1}{r^{m-2}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^s(t)\,\rho^n, \quad m = 2s + 2, \tag{9}$$

unde

$$C_n^s(t) = \frac{1}{2^{s-1}(s-1)!\,(n+s)} \frac{\mathrm{d}^s T_{n+s}(t)}{\mathrm{d}t^s}. \tag{10}$$

Polinoamele $C_n^{s+\frac{1}{2}}(t)$ și $C_n^s(t)$ sînt cazuri particulare ale așa-numitelor *polinoame Gegenbauer*; seriile (5) și (9) au fost obținute de E. Heine [18]. Din expresiile obținute rezultă că

$$I_{n,m}(t) = \begin{cases} C_n^{s+\frac{1}{2}}(t), & m = 2s + 3, \\ C_n^s(t), & m = 2s + 2. \end{cases} \tag{11}$$

După cum se vede din formulele (6) și (10), $I_{n,m}(t)$ este un polinom de gradul n în t. Să evaluăm aceste polinoame, precum și derivatele lor. Fie la început m impar, $m = 2s + 3$, atunci conform formulei (6), avem

$$I_{n,m}(t) = C_n^{s+\frac{1}{2}}(t) = \frac{2^s s!}{(2s)!} \frac{\mathrm{d}^s P_{n+s}(t)}{\mathrm{d}t^s},$$

și, conform inegalității lui Markov,

$$\max_{-1\leqslant t\leqslant 1} |I_{n,m}(t)| \leqslant c'(n+s)^{2s} \max_{-1\leqslant t\leqslant 1} |P_{n+s}(t)| \leqslant cn^{2s} \max_{-1\leqslant t\leqslant 1} |P_{n+s}(t)|.$$

După cum s-a menționat $\max\limits_{-1\leqslant t\leqslant 1} |P_{n+s}(t)| = 1$, adică, în final, avem

$$\max_{-1\leqslant t\leqslant 1} |I_{n,m}(t)| \leqslant cn^{m-3}. \tag{12}$$

Dacă m este par, $m = 2s + 2$, atunci, conform formulei (10)

$$I_{n,m}(t) = C_n^s(t) = \frac{1}{2^{s-1}(s-1)!\,(n+s)} \frac{\mathrm{d}^s T_{n+s}(t)}{\mathrm{d}t^s}.$$

De aici, conform inegalității lui Markov, avem

$$\max_{-1\leqslant t\leqslant 1} |I_{n,m}(t) \leqslant c''\, n^{2s-1} \max_{-1\leqslant t\leqslant 1} |T_{n+s}(t)| = c'' n^{m-3} \max_{-1\leqslant t\leqslant 1} |T_{n+s}(t)|.$$

Dar $\max\limits_{-1\leqslant t\leqslant 1} |T_{n+s}(t)| = 1$ și ajungem din nou la inegalitatea (12), care se dovedește adevărată atît pentru m par, cît și pentru m impar.

Inegalitatea lui Markov împreună cu inegalitatea (2) permit stabilirea de evaluări pentru derivate

$$\left| \frac{\mathrm{d}^k I_{n,m}(t)}{\mathrm{d}t^k} \right| \leqslant c_k n^{m+2k-3}; \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \; c_k = \text{const}. \tag{13}$$

Să arătăm acum că seria (1a) poate fi derivată termen cu termen în raport cu coordonatele sferice ale punctului x. Acest lucru este evident în cazul coordonatei ρ și noi vom analiza derivatele numai în raport cu coordonatele unghiulare. Fie $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{m-1}$ coordonatele unghiulare ale punctului x. Diferențiind formal seria (1a) în raport cu ϑ_j obținem noua serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n I'_{n,m}(t) \frac{\partial t}{\partial \vartheta_j}. \tag{14}$$

Dacă $|\xi| = R = 1$, atunci

$$\frac{\partial t}{\partial \vartheta_j} = \frac{\partial \cos\gamma}{\partial \vartheta_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \xi_k x_k}{\partial \vartheta_j} = \frac{1}{\rho}\, \xi_k \frac{\partial x_k}{\partial \vartheta_j}.$$

Din formula (2.1) cap. 1 rezultă, evident, că mărimea $\partial t/\partial \vartheta_j$ este mărginită. Inegalitatea (13) arată că pentru $0 \leqslant \rho \leqslant \rho'$, unde $\rho' = \text{const} < 1$, seria (14) este majorată de seria numerică convergentă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^{m-1} \rho'^n$, adică seria (14) converge uniform. În acest fel am arătat că seria (1a) poate fi derivată termen cu termen în raport cu coordonatele unghiulare. În mod analog se arată că este posibilă derivarea termen cu termen de un ordin superior arbitrar.

Din cele demonstrate, în particular, rezultă egalitatea

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta_x [I_{n,m}(\cos\gamma)\,\rho^n] = \Delta_x \frac{1}{r^{m-2}} = 0.$$

Remarcînd că γ nu depinde de ρ și folosind expresia operatorului lui Laplace în coordonate sferice (formula (2.1)), obținem

$$\Delta[I_{n,m}(\cos\gamma)\rho^n] = -\rho^{n-2}[\delta I_{n;m}(\cos\gamma) - n(n+m-2)I_{n;m}(\cos\gamma)]$$

și, prin urmare,

$$\sum_{n=0}^{\infty}[\delta I_{n;m}(\cos\gamma) - n(n+m-2)I_{n;m}(\cos\gamma)]\rho^{n-2} = 0.$$

De aici rezultă că expresia din parantezele drepte este egală cu zero, polinomul omogen de gradul n, $I_{n,m}(\cos\delta)\rho^n$ este armonic și că, pentru ξ fixat, funcția $I_{n,m}(\cos\gamma)$ este sferică de ordinul n. Punînd $\xi = (1,0,\ldots,0)$, deducem că $I_{n,m}(\cos\vartheta_1)$ este o funcție sferică de ordinul n.

§ 6. ECUAȚIA INTEGRALĂ A FUNCȚIILOR SFERICE

Fie $Y_{n,m}(\Theta)$ o funcție sferică de ordinul n. Să scriem pentru funcția armonică $u_n(x) = \rho^n Y_{n,m}(\Theta)$ reprezentarea integrală (3.5) cap. 11 în bila de rază R, cu centrul în originea coordonatelor:

$$u_n(x) = \frac{1}{(m-2)|S_1|}\int_{S_R}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\frac{\partial u_n(\xi)}{\partial\nu} - u_n(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right)dS_R. \quad (1)$$

Dacă notăm $\xi/R = \xi/|\xi| = \Theta'$, atunci $u_n(\xi) = R^n Y_{n,m}(\Theta')$ și $\partial u_n(\xi)/\partial\nu = nR^{n-1}Y_{n,m}(\Theta')$. Conform formulei (5.1)

$$\frac{1}{r^{m-2}} = \sum_{k=0}^{\infty} I_{k;m}(\cos\gamma)\frac{\rho^k}{R^{k+m-2}} \quad (2)$$

și, prin urmare,

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}} = -\sum_{k=0}^{\infty}(k+m-2)I_{k;m}(\cos\gamma)\frac{\rho^k}{R^{k+m-1}}. \quad (3)$$

Dacă $\rho < \rho'$, unde $\rho' < R$ și $\rho' = \text{const}$, atunci, conform inegalității (4.10), termenii generali ai seriilor (2) și (3) au respectiv evaluările $c_1 n^{m-3}(\rho'/R)^n$ și $c_2 n^{m-2}(\rho'/R)^n$, pentru anumite constante c_1 și c_2. De aici rezultă că seriile amintite converg uniform în raport cu ρ și t pentru $\rho \leqslant \rho'$, $|t| \leqslant 1$. Înlocuind aceste serii

în formula (1), intervertind ordinea sumării cu integrarea pentru $R = 1$, obținem

$$\rho^n Y_{n,m}(\Theta) = \frac{1}{(m-2)|S_1|}\sum_{k=0}^{\infty}(k+n+m-2)\rho^k \times$$

$$\times\int_{S_1} I_{n;m}(\cos\gamma)\, Y_{k;m}(\Theta')\,d_{\Theta'}S_1.$$

Identificînd coeficienții puterilor corespunzătoare ale lui ρ, obținem relațiile:

$$Y_{n,m}(\Theta) = \frac{2n+m-2}{(m-2)|S_1|}\int_{S_1} I_{n,m}(\cos\gamma)\, Y_{n,m}(\Theta')\,d_{\Theta'}S_1; \quad (4)$$

$$\int_{S_1} I_{k,m}(\cos\gamma)\, Y_{n,m}(\Theta')\,d_{\Theta'}S_1 = 0,\ k \neq n. \quad (5)$$

Ecuația (4) reprezintă tocmai *ecuația integrală* a funcțiilor sferice. Ecuația (5) nu dă nimic nou: ea rezultă din ortogonalitatea funcțiilor sferice. Într-adevăr, $\cos\gamma = \Theta\cdot\Theta'$, unde punctul reprezintă produsul scalar în E_m. Funcția $I_{k,m}(\cos\gamma) = I_{k,m}(\Theta\cdot\Theta')$ este simetrică în raport cu Θ și Θ' și de aceea, pentru un Θ fixat, funcția sferică de ordinul k în raport cu Θ' pentru $k \neq n$ este ortogonală cu $Y_{n,m}(\Theta')$.

Ecuația integrală (3) permite să obținem evaluări, importante în cele ce urmează, ale modulului funcțiilor sferice. Fie $Y_{n,m}(\Theta)$ o funcție sferică arbitrară de ordinul n. Conform inegalității lui Buniakovski, avem

$$|Y_{n,m}(\Theta)| \leqslant \frac{2n+m-2}{(m-2)|S_1|}\|Y_{n,m}\|_{L_2(S_1)}\left\{\int_{S_1} I^2_{n,m}(\Theta\cdot\Theta')\,d_{\Theta'}S_1\right\}^{1/2}.$$

Dacă Θ este fixat, iar Θ_1 este variabil pe S_1, atunci $I_{n;m}(\Theta\cdot\Theta_1)$ este o funcție sferică de ordinul n relativă la Θ_1 și, conform aceleiași ecuații (3), avem

$$I_{n,m}(\Theta\cdot\Theta_1) = \frac{2n+m-2}{(m-2)|S_1|}\int_{S_1} I_{n,m}(\Theta_1\cdot\Theta')\, I_{n;m}(\Theta\cdot\Theta')\,d_{\Theta'}S_1.$$

Înlocuind $\Theta_1 = \Theta$, obținem

$$I_{n,m}(1) = \frac{2n+m-2}{(m-2)|S_1|}\int_{S_1} I^2_{n,m}(\Theta\cdot\Theta')\,d_{\Theta'}S_1 \tag{6}$$

și prin urmare

$$|Y_{n,m}(\Theta)| \leqslant \sqrt{\frac{2n+m-2}{(m-2)|S_1|}}\,\|Y_{n,m}\|\sqrt{I_{n,m}(1)} \leqslant$$

$$\leqslant c_1\|Y_{n,m}\|\sqrt{I_{n,m}(1)}\sqrt{n};\ c_1 = \text{const}. \tag{7}$$

Conform formulei (4.10), $I_{n,m}(1) \leqslant cn^{m-3}$; înlocuind aceasta în (7) obținem evaluarea căutată:

$$|Y_{n,m}(\Theta)| \leqslant C\|Y_{n,m}\|\,n^{\frac{m}{2}-1};\ C = \text{const}. \tag{8}$$

În particular, dacă $\{Y^k_{n,m}(\Theta)\}$ este șirul ortonormat al funcțiilor sferice, introdus în § 3, atunci

$$|Y^{(k)}_{n,m}(\Theta)| \leqslant Cn^{\frac{m}{2}-1}. \tag{9}$$

Remarcăm că constanta C depinde de m.

§ 7. COMPLETITUDINEA SISTEMULUI FUNCȚIILOR SFERICE

Teorema 13.7.1. *Sistemul funcțiilor sferice este complet în $L_p(S_1)$ pentru orice p, $1 \leqslant p < \infty$.*

Dezvoltăm demonstrația în patru etape.

1°. Fie $\varphi \in C^{(2l)}(S_1)$, cu l suficient de mare. În bila $\rho = |x| < 1$ construim funcția armonică $u(x)$, care coincide cu $\varphi(\Theta)$ pe sfera S_1 (pentru $x = \Theta$). Conform formulei lui Poisson (formula (9.4) cap. 12)

$$u(x) = \frac{1}{|S_1|}\int_{S_1}\varphi(\Theta')\frac{1-\rho^2}{r^m}\,d_{\Theta'}S_1;\ |x| = \rho < 1; \tag{1}$$

am înlocuit aici ξ cu Θ'.

Nucleul Poisson $(1-\rho^2)/r^m$ poate fi dezvoltat în serie după puterile lui ρ. Pentru aceasta dezvoltăm pe r^{-m} în serie, în mod analog ca în § 5:

$$\frac{1}{r^m} = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n,m+2}(t)\,\rho^n,$$

unde $t = \cos\gamma = \Theta\cdot\Theta'$, $\Theta = x/\rho$. Astfel,

$$\frac{1-\rho^2}{r^m} = \sum_{n=0}^{\infty} J_{n,m}(t)\,\rho^n; \tag{2}$$

aici $J_{0,m}(t) = I_{0,m+2}(t)$, $J_{1,m}(t) = I_{1,m+2}(t)$ și $J_{n,m}(t) = I_{n,m+2}(t) - I_{n-2,m+2}(t)$, $n \geqslant 2$. Ca și în paragraful 5, se deduce că produsul $\rho^n J_{n,m}(t)$ este un polinom omogen, armonic, de gradul n și prin urmare $J_{n,m}(\Theta\cdot\Theta')$ este o funcție sferică de ordinul n în raport cu Θ, pentru Θ' fixat. Rezultă atunci că are loc reprezentarea

$$J_{n,m}(\Theta\,\Theta') = \sum_{k=1}^{k_{n,m}} \alpha_n^{(k)}(\Theta')\,Y^{(k)}_{n,m}(\Theta).$$

Repetînd raționamentele din § 5 deducem că seria (2) converge uniform. Înlocuind-o în formula (1) și intervertind sumarea cu integrarea, obținem

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\frac{1}{|S_1|}\int_{S_1}\varphi(\Theta')\,J_{n,m}(\Theta\,\Theta')\,d_{\Theta'}S_1. \tag{3}$$

Coeficientul lui ρ^n din ultima formulă este funcția sferică de ordinul n:

$$\frac{1}{|S_1|}\int_{S_1}\varphi(\Theta')\,J_{n,m}(\Theta\Theta')\,d_{\Theta'}S_1 = \sum_{k=1}^{k_{n,m}} a_n^{(k)}\,Y^{(k)}_{n,m}(\Theta),$$

unde

$$a_n^{(k)} = \frac{1}{|S_1|}\int_{S_1}\alpha_n^{(k)}(\Theta')\,\varphi(\Theta')\,dS_1; \tag{4}$$

și prin urmare

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\sum_{k=1}^{k_{n,m}} a_n^{(k)}\,Y^{(k)}_{n,m}(\Theta). \tag{5}$$

2°. Să evaluăm coeficienții $a_n^{(k)}$. Din formula (5) se observă că mărimile $\rho^n a_n^k$ sînt coeficienții Fourier ai funcției $u(x)$, $x = \rho\Theta$, în raport cu sistemul funcțiilor sferice ortonormate $Y^{(k)}_{n,m}(\Theta)$; deci

$$\rho^n a_n^{(k)} = \int_{S_1} u(\rho\Theta)\,Y^{(k)}_{n,m}(\Theta)\,dS_1. \tag{6}$$

Fie $\rho \to 1$. După cum s-a arătat în § 4 cap. 12, $u(\rho\Theta) \xrightarrow[\rho\to 1]{} \varphi(\Theta)$ uniform în raport cu Θ; în formula (6) se poate trece la limită sub semnul integralei și se obține egalitatea

$$a_n^{(k)} = \int_{S_1} \varphi(\Theta)\ Y_{n,m}^{(k)}(\Theta)\ dS_1. \tag{7}$$

Funcția $\varphi \in C^{(2l)}(S_1)$ și prin urmare $\varphi \in D(\delta^l)$. Operatorul δ și odată cu el și puterile lui sînt simetrice și conform formulei (4.2)

$$a_n^{(k)} = \frac{1}{n^l(n+m-2)^l} \int_{S_1} \varphi(\Theta)\ \delta^l Y_{n,m}^{(k)}(\Theta)\ dS_1 =$$

$$= \frac{1}{n^l(n+m-2)^l} \int_{S_1} \delta^l \varphi(\Theta)\ Y_{n,m}^{(k)}(\Theta)\ dS_1. \tag{8}$$

Integrala din formula (8) este chiar coeficientul Fourier al funcției continue $\delta^l\varphi(\Theta)$ în raport cu sistemul funcțiilor sferice ortonormate: seria pătratelor acestor coeficienți converge, adică ei sînt în orice caz mărginiți și din formula (8) rezultă că

$$|a_n^{(k)}| \leqslant \frac{c}{n^{2l}},\ c = \text{const}. \tag{9}$$

De aici obținem și evaluarea pentru coeficienții lui ρ^n din formula (5). Conform inegalităților (6.9) și (1.4) avem

$$\sum_{k=1}^{k_{n,m}} |a_n^{(k)}|\,|Y_{n,m}^{(k)}(\Theta)| \leqslant \frac{c'}{n^{2l+3-\frac{3m}{2}}},\ c' = \text{const}.$$

3°. Fie l astfel încît $2l + 3 - \frac{3m}{2} > 1$. Considerînd seria (5) ca serie după puterile lui ρ vedem că ea satisface condițiile teoremei lui Tauber *); coeficienții seriei descresc mai repede decît n^{-1} și suma seriei are limită (egală cu $\varphi(\theta)$) pentru $\rho \to 1$. Din teorema lui Tauber rezultă că seria (5) converge pentru $\rho = 1$ și deci

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_{n,m}} a_n^k\ Y_{n,m}^{(k)}(\Theta) = \varphi(\Theta). \tag{10}$$

*) Vezi, de exemplu, Markușevici A. I., *Teoria funcțiilor analitice*. Gostehizdat, 1950, p. 266.

Amintim că pentru aceeași condiție $2l + 3 - \frac{3m}{2} > 1$ seria (10) converge absolut și uniform; cu atît mai mult ea converge în metrica lui $L_p(S_1)$.

4°. Fie acum $f \in L_p(S_1), 1 \leqslant p < \infty$. Mulțimea $C^{(\infty)}(S_1)$ este densă în $L_p(S_1)$ și de aceea există o funcție $\varphi \in C^{(\infty)}(S_1)$ astfel încît $\|f - \varphi\|_{L_p(S_1)} < \frac{\varepsilon}{2}$, unde ε este un număr pozitiv arbitrar dat. Conform celor demonstrate la punctul 3°, funcția $\varphi(\theta)$ poate fi dezvoltată în seria (10), care converge în metrica lui $L_p(S_1)$; deci există N astfel încît

$$\left\| \varphi - \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{k_{n,m}} a_n^{(k)}\ Y_{n,m}^{k} \right\|_{L_p(S_1)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Atunci, conform inegalității triunghiului, avem

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{k_{n,m}} a_n^{(k)} Y_{n,m}^{(k)} \right\|_{L_p(S_1)} < \varepsilon.$$

Menționăm două proprietăți, consecințe imediate ale completitudinii sistemului funcțiilor sferice.

1. Funcțiile sferice reprezintă un sistem complet de funcții proprii ale operatorului δ.

2. Dacă o funcție oarecare satisface ecuația diferențială (2.7), atunci ea este sferică, de ordinul n.

Capitolul 14

TEORIA POTENȚIALULUI

§ 1. SUPRAFEȚE LIAPUNOV

Conform definiției (vezi Introducere, § 2) suprafețele Liapunov sînt suprafețe de clasă $C^{(1,\alpha)}$, $0 < \alpha \leqslant 1$. Amintim că aceasta înseamnă următoarele. Dacă Γ este o suprafață Liapunov, atunci ea are normală în fiecare punct al său. Mai departe, există constantele d, a, α, unde $d > 0$, $a > 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$, astfel încît pentru $x \in \Gamma$ oarecare, sfera $S_d(x)$ de rază d cu centrul în x delimitează din Γ o porțiune $\Gamma(x)$, care în sistemul local de coordonate ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_m$ asociat punctului x poate fi reprezentată printr-o ecuație de forma

$$\xi_m = f(\xi'); \tag{1}$$

aici și în cele ce urmează accentul va reprezenta proiecția punctului dat pe planul tangent la Γ în punctul x, adică în planul $\xi_m = 0$. Astfel, ξ' poate fi privit ca punct al spațiului $(m-1)$-dimensional de coordonate $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}$. În sfîrșit, dacă ξ și ζ sînt două puncte ale porțiunii $\Gamma(x)$ și t o direcție arbitrară în planul $\xi_m = 0$, atunci

$$\left| \frac{\partial f(\xi')}{\partial t} - \frac{\partial f(\zeta')}{\partial t} \right| \leqslant a \left[\sum_{k=1}^{m-1} (\xi_k - \zeta_k)^2 \right]^{\alpha/2}. \tag{2}$$

Sfera $S_d(x)$ va fi numită *sferă Liapunov*. Amintim, de asemenea, că raza d poate fi făcută oricît de mică.

Planul $\xi_m = 0$ este tangent la suprafața Γ în punctul x care reprezintă originea coordonatelor locale; astfel $f(0,0,\ldots,0) = 0$; $\dfrac{\partial}{\partial t} f(0,0,\ldots,0) = 0$.

Introducem următoarele notații. Fie ξ un punct al porțiunii $\Gamma(x)$. Distanța între x și ξ se desemnează prin r; litera ρ va desemna distanța între x și ξ', adică

$$\rho^2 = \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k^2, \quad r^2 = \sum_{k=1}^{m} \xi_k^2 = \rho^2 + \xi_m^2.$$

Presupunînd în (2) $\zeta = x$, găsim evaluarea pentru derivatele parțiale ale funcției f:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| \leqslant a\rho^\alpha \tag{3}$$

și cu atît mai mult

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \xi_k} \right| \leqslant a r^\alpha, \; k = 1, 2, \ldots, m-1. \tag{4}$$

Să analizăm și mărimea $\xi_m = f(\xi')$, $\xi \in \Gamma(x)$. Ducem segmentul ce unește punctul x cu ξ' și notăm $\zeta' = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{m-1})$ un punct variabil al acestui segment. Fie ρ' distanța între punctul x și ζ'. Conform inegalității (3)

$$|f(\xi')| = \left| \int_0^\rho \frac{\partial f}{\partial \rho'} \, d\rho' \right| \leqslant \int_0^\rho \left| \frac{\partial f}{\partial \rho'} \right| d\rho' \leqslant$$

$$\leqslant a \int_0^\rho \rho'^\alpha d\rho' = c\rho^{\alpha+1}; \quad c = \frac{a}{\alpha+1} \tag{5}$$

și prin urmare

$$|f(\xi')| \leqslant c r^{\alpha+1}. \tag{6}$$

Inegalitatea (5) permite să se evalueze r prin intermediul lui ρ, și anume

$$r^2 = \rho^2 + \xi_m^2 \leqslant \rho^2 + c^2\rho^{2\alpha+2} \leqslant (1 + c^2 d^{2\alpha})\, \rho^2.$$

După cum s-a menționat mai sus, raza d poate fi oricît de mică; să presupunem că ea este astfel încît

$$a d^\alpha \leqslant 1. \tag{7}$$

Atunci, cu atît mai mult $cd^\alpha = \dfrac{a}{1+\alpha} d^\alpha < 1$ și, în final,

$$r \leqslant \sqrt{2}\rho \leqslant 2\rho. \tag{8}$$

Notăm cu n și ν normalele la Γ în punctul x, respectiv ξ. Să presupunem că $\xi \in \Gamma(x)$ și să stabilim evaluarea pentru mărimea $|\cos(n, r)|$; aici r reprezintă vectorul de origine x și extremitate ξ. Avem astfel $\cos(n, r) = \cos(\xi_m, r) = \xi_m/r$ și conform inegalității (6)

$$|\cos(n, r)| \leqslant cr^{\alpha}. \tag{9}$$

Schimbînd rolul punctelor x și ξ (ceea ce este posibil), obținem încă o inegalitate importantă:

$$|\cos(\nu, r) \leqslant cr^{\alpha}. \tag{10}$$

Pentru cele ce urmează vor fi de asemenea utile evaluările cosinusurilor directoare ale normalelor ν. Conform unei cunoscute formule din geometria diferențială

$$\cos(\nu, \xi_m) = \left[1 + \sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_k}\right)^2\right]^{-1/2} = \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)^2\right]^{-1/2},$$

unde τ este direcția gradientului funcției f. Conform inegalităților (3) și (7)

$$\cos(\nu, \xi_m) \geqslant (1 + a^2\rho^{2\alpha})^{-1/2} \geqslant (1 + a^2 d^{2\alpha})^{-1/2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \geqslant \frac{1}{2}. \tag{11}$$

Dacă $k = 1,2,\ldots, m-1$, atunci conform aceleiași formule din geometria diferențială avem

$$\cos(\nu, \xi_k) = \pm \frac{\partial f}{\partial \xi_k}\left[1 + \sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_k}\right)^2\right]^{-1/2}$$

și în virtutea inegalității (3)

$$|\cos(\nu, \xi_k)| \leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial \xi_k}\right| \leqslant a\rho^{\alpha} \leqslant ar^{\alpha}, \; k = 1,2, \ldots, m-1. \tag{12}$$

§ 2. UNGHI SOLID

Să analizăm suprafața netedă pe porțiuni Σ, în general neînchisă, pe care este definită o direcție pozitivă a normalelor. Notăm cu ξ un punct arbitrar al lui Σ și prin ν normala în punctul ξ la Σ. Fie $x \in E_m$ astfel încît în orice punct $\xi \in \Sigma$ raza-vectoare r, ce unește punctul x cu ξ, formează cu normala ν un unghi ascuțit sau cel mult un unghi drept și deci $\cos(r, \nu) \geqslant 0$. Din punctul x ducem raza-vectoare la toate punctele suprafeței Σ. Aceste raze-vectoare umplu domeniul mărginit de suprafața Σ și suprafața conică K determinată de razele-vectoare corespunzătoare frontierei suprafeței Σ (fig. 16). Din punctul x ca centru descriem o sferă de rază R arbitrară. Notăm cu σ_R porțiunea din această sferă inclusă în conul amintit mai sus. Relația

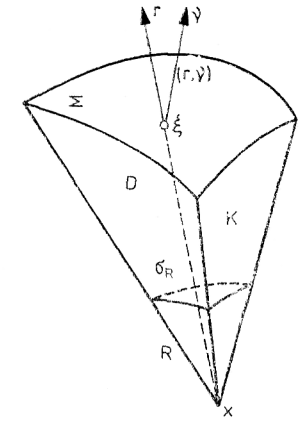

Fig. 16.

$$\omega_x(\Sigma) = \frac{|\sigma_R|}{R^{m-1}} \tag{1}$$

nu depinde de R. Ea se numește *unghiul solid sub care suprafața* Σ *se vede din punctul* x.

Construcția descrisă se poate realiza și atunci cînd pe suprafața Σ, $\cos(r,\nu) \leqslant 0$. În acest caz unghiul solid $\omega_x(\Sigma)$, sub care se vede suprafața Σ din punctul x, are valoarea opusă celei date de relația (1).

În cazul general, cînd $\cos(r, \nu)$ poate să schimbe semnul, vom presupune că suprafața Σ se poate divide în porțiunile $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$, pe fiecare din acestea $\cos(r, \nu)$ păstrîndu-și semnul. Pentru o astfel de suprafață unghiul solid se definește prin formula

$$\omega_x(\Sigma) = \Sigma\, \omega_x(\Sigma_k) \tag{2}$$

numai dacă seria (2) este absolut convergentă (de exemplu, dacă porțiunile Σ_k sînt în număr finit).

Să arătăm că în toate cazurile enumerate unghiul solid $\omega_x(\Sigma)$ se definește pentru $m > 2$ prin formula

$$\omega_x(\Sigma) = -\frac{1}{m-2}\int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}\, d_{\xi}\Sigma. \tag{3}$$

Este suficient să analizăm cazul cînd $\cos(r, \nu)$ păstrează semnul pe suprafața Σ. Să deducem în prealabil o formulă ajutătoare care se dovedește utilă și în cele ce urmează. Să observăm că $\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}} =$

$$= -\frac{m-2}{r^{m-1}}\frac{\partial r}{\partial \xi_k}\cos(\nu, \xi_k);\ \text{dar}\ \frac{\partial r}{\partial \xi_k} = \frac{\xi_k - x_k}{r} = \cos(r, \xi_k);\ \text{de unde}$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}} = -\frac{m-2}{r^{m-1}}\cos(r, \xi_k)\cos(\nu, \xi_k),$$

sau, în final,

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}} = -\frac{m-2}{r^{m-1}}\cos(r, \nu). \tag{4}$$

Fie $x \notin \Gamma$ și $\cos(r, \nu) \geqslant 0$. Alegem raza R suficient de mică, astfel încît suprafețele σ_R și Σ să nu aibă puncte comune (vezi fig. 16). Să analizăm domeniul D mărginit de suprafețele Σ și σ_R, precum și de porțiunea din conul K cuprinsă între ele. În acest domeniu $1/r^{m-2}$ este o funcție armonică de punctele ξ, de aceea (formula (6.9) cap. 9)

$$\int_\Sigma \frac{\partial}{\partial \nu^*}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Sigma + \int_{\sigma_R}\frac{\partial}{\partial \nu^*}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\sigma_R + \int_K \frac{\partial}{\partial \nu^*}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi K = 0.$$

Prin ν^* s-a notat aici normala exterioară la suprafață în raport cu domeniul D; cum $\cos(r, \nu) \geqslant 0$ pe Σ, atunci pe această suprafață $\nu^* = \nu$. Pe suprafața K avem $\cos(r, \nu^*) = 0$, deoarece r are direcția generatoarei, iar ν^* este perpendiculara pe aceasta. În baza formulei (4) integrala după K dispare și

$$\int_\Sigma \frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Sigma = -\int_{\sigma_R}\frac{\partial}{\partial \nu^*}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\sigma_R.$$

Pe σ_R normala ν^* are direcție opusă razei-vectoare și de aceea

$$\frac{\partial}{\partial \nu^*}\frac{1}{r^{m-2}} = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r^{m-2}}\bigg|_{r=R} = \frac{m-2}{R^{m-1}}.$$

Astfel, avem

$$\int_\Sigma \frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Sigma = -\frac{m-2}{R^{m-1}}\int_{\sigma_R} d_\xi\,\sigma_R = -(m-2)\frac{|\sigma_R|}{R^{m-1}} =$$

$$= -(m-2)\omega_x(\Sigma).$$

Dacă $\cos(r, \nu) \leqslant 0$, atunci $\nu^* = -\nu$ pe Σ; raționînd ca mai înainte, obținem în acest caz

$$\int_\Sigma \frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Sigma = \frac{m-2}{R^{m-1}}\int_{\sigma_R} d_\xi\sigma_R = (m-2)\frac{|\sigma_R|}{R^{m-1}} = -(m-2)\,\omega_x(\Sigma).$$

Dacă suprafața Σ este divizată în porțiunile $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$, pe fiecare din acestea $\cos(r, \nu)$ păstrîndu-și semnul, atunci, evident,

$$\Sigma|\omega_x(\Sigma_k)| = \int_\Sigma \left|\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right| d_\xi\Sigma. \tag{5}$$

Teorema 14.2.1. *Dacă Γ este o suprafață Liapunov închisă, atunci există o constantă C, astfel încît*

$$\int_\Gamma \left|\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right| d_\xi\,\Gamma \leqslant C, \quad \forall x \in E_m. \tag{6}$$

Fie d raza sferei Liapunov pentru suprafața Γ. Se poate întîmpla ca distanța de la punctul x la suprafața Γ să nu fie mai mică decît $d/2$. Atunci $r = |x - \xi| \geqslant d/2$ și conform formulei (4)

$$\left|\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right| = (m-2)\frac{|\cos(r, \nu)|}{r^{m-1}} \leqslant \frac{2^{m-1}(m-2)}{d^{m-1}},$$

$$\int_\Gamma \left|\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right| d_\xi\,\Gamma \leqslant \frac{2^{m-1}(m-2)}{d^{m-1}}\,|\Gamma|. \tag{7}$$

Fie acum distanța de la punctul x pînă la suprafața Γ mai mică decît $d/2$. Atunci, există $x_0 \in \Gamma$ astfel încît

$$|x - x_0| = \min_{\xi \in \Gamma}|x - \xi| < \frac{d}{2}. \tag{8}$$

După cum se știe, punctul x se găsește pe normala n_0 la Γ în punctul x_0.

Să considerăm sfera Liapunov $S(x_0)$. Notăm cu $\Gamma(x_0)$, respectiv $\Gamma''(x_0)$, porțiunile din suprafața Γ situate în interiorul, respectiv exteriorul sferei $S(x_0)$, (fig. 17). Dacă $\xi \in \Gamma''(x_0)$, atunci $|\xi - x_0| \geqslant d$ și $|\xi - x| \geqslant |\xi - x_0| - |x - x_0| > d/2$, de unde

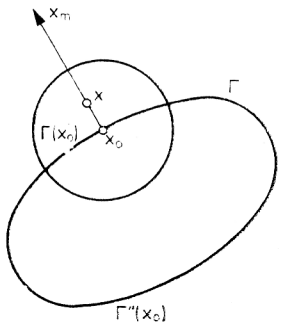

Fig. 17

$$\int_{\Gamma''(x_0)} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| d_\xi \Gamma < \frac{2^{m-1}(m-2)|\Gamma''(x_0)|}{d^{m-1}} < \frac{2^{m-1}(m-2)|\Gamma|}{d^{m-1}}. \tag{9}$$

Rămîne să analizăm integrala

$$\int_{\Gamma(x_0)} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| d_\xi \Gamma = (m-2) \int_{\Gamma(x_0)} \frac{|\cos(r,\nu)|}{r^{m-1}} \, d_\xi \Gamma.$$

Să considerăm sistemul local de coordonate cu originea în punctul x_0 și cu axa x_m în direcția normalei la Γ în x_0. Punînd $|x - x_0| = \delta$ rezultă $\delta < d/2$. Coordonatele locale ale punctului x sînt $(0,0,\ldots, 0, \pm\delta)$. Notăm cu $G'(x_0)$ proiecția suprafeței $\Gamma(x_0)$ pe planul tangent în punctul x_0 și deci

$$\int_{\Gamma(x_0)} \frac{|\cos(r,\nu)|}{r^{m-1}} d_\xi \Gamma = \int_{G'(x_0)} \frac{|\cos(r,\nu)| d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{r^{m-1} \cos(\nu, \xi_m)} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int_{G'(x_0)} \frac{|\cos(r,\nu)|}{r^{m-1}} d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}; \tag{10}$$

aici s-a folosit evaluarea (1.11).

Fie $\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_{m-1}^2$. Din formulele

$$r^2 = \sum_{k=1}^{m} (\xi_k - \xi_k)^2 = \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k^2 + (\xi_m - x_m)^2 = \rho^2 + (\xi_m \pm \delta)^2$$

rezultă că $r \geqslant \rho$. Pe de altă parte, domeniul $G'(x_0)$ se definește prin inegalitatea $r < d$. Dar $r \geqslant \rho$ și de aceea $\rho < d$. Aceasta

înseamnă că domeniul $G'(x_0)$ este situat în bila $(m-1)$-dimensională $\rho \leqslant d$ și din formulele (10) obținem inegalitatea

$$\int_{\Gamma(x_0)} \frac{|\cos(r,\nu)|}{r^{m-1}} d_\xi \Gamma \leqslant 2 \int_{\rho<d} \frac{\cos|(r,\nu)|}{r^{m-1}} d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}. \tag{11}$$

Dacă $\delta = 0$, adică $x = x_0 \in \Gamma$, atunci în virtutea inegalității (1.10)

$$\frac{|\cos(r,\nu)|}{r^{m-1}} \leqslant \frac{c}{r^{m-1-\alpha}} \leqslant \frac{c}{\rho^{m-1-\alpha}} \tag{12}$$

și, prin urmare,

$$\int_{\Gamma(x_0)} \frac{|\cos(r,\nu)|}{r^{m-1}} d_\xi \Gamma \leqslant 2c \int_{\rho>d} \frac{d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{\rho^{m-1-\alpha}} = \text{const}. \tag{13}$$

Pe parcurs s-a demonstrat totodată că integrala (6) există pentru orice $x \in \Gamma$.

Fie acum $\delta > 0$. Are loc succesiunea de inegalități

$$|\cos(r,\nu)| = |\cos(r,\xi_k)\cos(\nu,\xi_k)| \leqslant$$

$$\leqslant a(m-1) r_0^\alpha + \frac{|\xi_m \pm \delta|}{r} \leqslant a(m-1) r_0^\alpha +$$

$$+ c \frac{r_0^{\alpha+1}}{r} + \frac{\delta}{r} \leqslant a(m-1) r_0^\alpha + a \frac{r_0^{\alpha+1}}{r} + \frac{\delta}{r},$$

unde $r_0 = |\xi - x_0|$; am folosit evaluările (1.6) și (1.12). Pe de altă parte, avem și relațiile

$$2 \int_{\rho<d} \frac{|\cos(r,\nu)|}{r^{m-1}} d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1} \leqslant 2a(m-1) \int_{\rho<d} \frac{r_0^\alpha}{r^{m-1}} d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1} +$$

$$+ 2a \int_{\rho<d} \frac{r_0^{\alpha+1}}{r^m} d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1} + 2\delta \int_{\rho<d} \frac{1}{r^m} d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}. \tag{14}$$

Evaluăm mărimile r_0 și r prin intermediul lui ρ. Mărimea r_0 se evaluează după formula (1.8), deoarece în aceasta r este distanța de la punctul ξ pînă la originea sistemului local de coordonate. Astfel $r_0 \leqslant 2\rho$. Pentru a evalua pe r, procedăm astfel. Observăm mai întîi că $r^2 = \rho^2 + \xi_m^2 + \delta^2 \pm 2\xi_m\delta$; dar $|2\xi_m\delta| \leqslant \frac{1}{2}\delta^2 + 2\xi_m^2$. De aici obținem $r^2 \geqslant \rho^2 + \frac{1}{2}\delta^2 - \xi_m^2$. Conform formulei (1.5) avem $|\xi_m| \leqslant c\,\rho^{\alpha+1} \leqslant c\,d^\alpha\,\rho$. Raza d poate fi luată oricît de mică. Să o presupunem astfel încît $cd^\alpha \leqslant 1/\sqrt{2}$; atunci $r^2 \geqslant (\rho^2 + \delta^2)/2$.

Acum nu este greu de evaluat integralele din partea dreaptă a relației (14). Primele două se evaluează imediat:

$$\int\limits_{\rho<d} \frac{r_0^\alpha d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{r^{m-1}} \leqslant \int\limits_{\rho<d} \frac{2^{m-1+\alpha}\rho^\alpha d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{(\rho^2+\delta^2)^{(m-1)/2}} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{m-1+\alpha} \int\limits_{\rho<d} \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{\rho^{m-1-\alpha}} = \text{const}$$

și, în mod analog,

$$\int\limits_{\rho<d} \frac{r_0^{\alpha+1}\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{r^m} \leqslant 2^{m+1+\alpha} \int\limits_{\rho<d} \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{\rho^{m-1-\alpha}} = \text{const}.$$

Să trecem la evaluarea ultimei integrale. Folosind evaluarea pentru r, găsim

$$\delta \int\limits_{\rho<d} \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{r^m} \leqslant 2^{\frac{m}{2}}\delta \int\limits_{\rho<d} \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{(\rho^2+\delta^2)^{m/2}} <$$

$$< 2^{\frac{m}{2}}\delta \int\limits_{E_{m-1}} \frac{d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{(\rho^2+\delta^2)^{m/2}}.$$

În ultima integrală notăm

$$\xi_k = \delta\,\eta_k,\ k = 1, 2, \ldots, m-1;\quad \sum_{k=1}^{m-1} \eta_k^2 = \rho_1^2,$$

atunci

$$\delta \int\limits_{E_{m-1}} \frac{d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{(\rho^2+\delta^2)^{m/2}} = \int\limits_{E_{m-1}} \frac{d\eta_1\, d\eta_2 \ldots d\eta_{m-1}}{(\rho_1^2+1)^{m/2}}.$$

Integrala obținută converge și este deci egală cu o anumită constantă.

Acum este clar că pentru $0 < \delta < d/2$ integrala (14) nu depășește o anumită constantă. Dar această afirmație este adevărată și pentru $\delta = 0$ (formula (13). În acest caz există o constantă C', astfel încît

$$\int\limits_{\Gamma'(r_0)} \frac{|\cos(r, \nu)|}{r^m}\, d_\xi\Gamma \leqslant C',\ 0 \leqslant \delta < d/2.$$

Ținînd seama de inegalitatea (9), se observă că teorema 14.2.1 este adevărată și pentru $\delta > d/2$, de aceea putem considera

$$C = \frac{2^{m-1}(m-2)|\Gamma|}{d^{m-1}} + C'.$$

§ 3. VALOAREA PRIMARĂ A POTENȚIALULUI DE DUBLU STRAT

În § 4 cap. 11 s-a definit potențialul de dublu strat ca o integrală de forma

$$W(x) = \int\limits_\Gamma \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}\, d_\xi\Gamma, \tag{1}$$

unde ν este normala exterioară la suprafața Γ în punctul ξ. S-a arătat că $W(x)$ este o funcție armonică atît în interiorul, cît și în exteriorul lui Γ; pe suprafața Γ potențialul (1) nu a fost definit.

Vom considera acum că Γ este o suprafață Liapunov închisă și că densitatea $\sigma(\xi)$ este continuă pe această suprafață. În aceste condiții are loc următoarea teoremă.

Teorema 14.3.1. *Potențialul de dublu strat* (1) *are sens pentru orice x situat pe suprafața Γ; ca funcție de x, funcția respectivă este continuă.*

Faptul că integrala (1) există, dacă $x \in \Gamma$, se demonstrează simplu. Densitatea $\sigma(\xi)$ este continuă pe mulțimea compactă Γ și de aceea este mărginită. Fie $|\sigma(\xi)| \leqslant M = \text{const}$, atunci

$$\left| \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| \leqslant M \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right|. \tag{2}$$

În paragraful precedent am arătat că integrala (2.6) există pentru $x \in \Gamma$, altfel spus, că pentru $x \in \Gamma$ funcția $\left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right|$ este integrabilă pe Γ. Dar atunci și partea stîngă a inegalității (2) este integrabilă pe Γ și prin urmare integrala (1) există pentru $x \in \Gamma$.

Să arătăm acum că pentru $x \in \Gamma$ integrala (1) este continuă. Evaluarea (1.10) arată că potențialul (1) este valoarea operatorului integral cu singularitate slabă pentru funcția $\sigma(\xi)$; nucleul acestui operator $\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} = -\frac{(m-2)\cos(r, \nu)}{r^{m-1}}$ îl reprezentăm sub forma

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} = \frac{(m-2)\, r^{-\frac{\alpha}{2}} \cos(r, \nu)}{r^{m-1-\frac{\alpha}{2}}}.$$

Notînd numărătorul cu $A(x, \xi)$, observăm că pentru $x \neq \xi$ funcția $A(x, \xi)$ este continuă pe Γ. Dacă $x \in \Gamma$ și $x \to \xi$, atunci, în baza inegalității (1.17), $A(x, \xi) \to 0$. Punînd $A(x, x) = 0$, atunci $A(x, \xi)$ este continuă pe Γ pentru orice poziție a punctelor x și ξ. Conform teoremei 1.3.1 operatorul (1) transformă orice funcție de clasă $L_p(\Gamma)$ într-o funcție continuă, dacă p este suficient de mare. Ca funcție continuă pe o mulțime compactă Γ, ea este mărginită și, prin urmare, integrabilă de orice ordin și de aceea operatorul (1) transformă o funcție continuă într-una continuă. Dar $\sigma(\xi)$ este continuă conform ipotezei și atunci și potențialul de dublu strat este continuu cînd x parcurge suprafața Γ.

Valoarea potențialului de dublu strat pentru $x \in \Gamma$ se numește *valoarea primară* a acestui potențial. Teorema 14.3.1 se poate, evident, formula astfel:

Dacă Γ este o suprafață Liapunov închisă și densitatea $\sigma(\xi)$ este continuă pe Γ, atunci valoarea primară a potențialului de dublu strat (1) *există și este continuă pe Γ.*

§ 4. INTEGRALA LUI GAUSS

Integrala lui Gauss reprezintă potențialul de dublu strat a cărui densitate este identic egală cu unitatea:

$$W_0(x) = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \, d_\xi \Gamma. \tag{1}$$

Aici Γ este o suprafață închisă iar ν normala exterioară la ea în punctul ξ.

Teorema 14.4.1. *Dacă suprafața Γ este o suprafață Liapunov închisă, atunci valoarea integralei lui Gauss este definită prin*

$$W_0(x) = \begin{cases} -(m-2)|S_1| = -\dfrac{2(m-2)\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} & \text{pentru } x \text{ în interiorul lui } \Gamma, \\ 0 & \text{pentru } x \text{ în exteriorul lui } \Gamma, \\ -\dfrac{m-2}{2}|S_1| = -\dfrac{(m-2)\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} & \text{pentru } x \in \Gamma. \end{cases} \tag{2}$$

Remarcăm imediat că primele două egalități din (2) sînt adevărate pentru orice suprafață Γ închisă, netedă pe porțiuni.

Într-adevăr, fie Γ o suprafață închisă, netedă pe porțiuni și fie punctul x în interiorul lui Γ. Descriem în jurul acestui punct sfera S_ε de rază ε; alegem ε suficient de mic, astfel încît sfera S_ε să se găsească în interiorul lui Γ. În domeniul mărginit de suprafețele Γ și S_ε, funcția $1/r^{m-2}$ este armonică și de aceea, în baza formulei (6.9) cap. 9, avem

$$\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \, d\Gamma + \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \, dS_\varepsilon = 0. \tag{3}$$

Pe S_ε normala ν este orientată în sens opus razei-vectoare și de aceea

$$\int_{S_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \, dS_\varepsilon = \int_{S_\varepsilon} \frac{m-2}{\varepsilon^{m-1}} \, dS_\varepsilon = (m-2) \frac{|S_\varepsilon|}{\varepsilon^{m-1}} = (m-2)|S_1|, \tag{4}$$

și prima egalitate (2) este demonstrată. Și mai simplu se demonstrează cea de a doua egalitate (2); dacă punctul x este în exteriorul lui Γ, atunci funcția $1/r^{m-2}$ este armonică în interiorul lui Γ și

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \, d\Gamma = 0.$$

Să ne ocupăm de a treia egalitate (2). Fie Γ o suprafață Liapunov închisă și $x \in \Gamma$. Este vorba de valoarea primară a integralei lui Gauss, a cărei existență rezultă din teorema de la paragraful precedent. Rămîne să calculăm această valoare. Alegem ε, $0 < \varepsilon < d$, și descriem în jurul punctului $x \in \Gamma$ sfera S_ε de rază ε. Porțiunea din suprafața Γ situată în exteriorul sferei o notăm cu Γ'_ε, porțiunea din sferă situată în interiorul lui Γ o notăm cu S'_ε (fig. 18). Deoarece integrala lui Gauss converge pentru $x \in \Gamma$, atunci

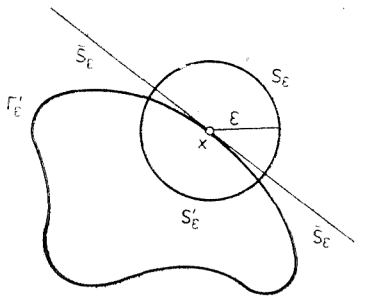

Fig. 18

$$W_0(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \, d_\xi \Gamma. \quad (5)$$

Punctul x se găsește în exteriorul domeniului mărginit de suprafețele Γ'_ε și S'_ε. În acest domeniu funcția $1/r^{m-2}$ este armonică și, prin urmare,

$$\int_{\Gamma'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi \Gamma + \int_{S'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S_\varepsilon = 0.$$

Dar atunci

$$W_0(x) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \, d_\xi S_\varepsilon. \quad (6)$$

În integrala (6) normala ν este orientată în sens opus razei-vectoare și de aceea

$$\int_{S'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \, d_\xi S_\varepsilon = \frac{m-2}{\varepsilon^{m-1}} \int_{S'_\varepsilon} d_\xi S_\varepsilon = (m-2) \frac{|S'_\varepsilon|}{\varepsilon^{m-1}}. \quad (7)$$

Pentru ε suficient de mic, suprafața S'_ε este aproape de semisfera ce se sprijină pe planul tangent (vezi fig. 18); marginea $|S'_\varepsilon|$ diferă de aria semisferei $\frac{\pi^{m/2} \varepsilon^{m-1}}{\Gamma(m/2)}$ prin aria (luată cu același semn sau cu semn contrar) zonei $\bar{S}_\varepsilon$ cuprinsă între Γ și planul tangent. Înălțimea zonei este egală cu valoarea maximă a lui $|\xi_m|$ în punctele de intersecție ale suprafeței Γ cu sfera S_ε. Deoarece $\varepsilon < d$, atunci aceste puncte se găsesc în interiorul sferei Liapunov și pentru ele are loc evaluarea (1.6):

$$|\xi_m| \leqslant c r^{\alpha+1} = c \varepsilon^{\alpha+1}.$$

Notăm cu h valoarea maximă, amintită mai sus, a lui $|\xi_m|$; atunci $h \leqslant c\varepsilon^{\alpha+1}$. Aria zonei $\bar{S}_\varepsilon$ nu depășește aria zonei sferice Σ de înălțime $2h$, simetrică relativ la planul diametral. Notînd axele ca în fig. 19 și introducînd coordonatele sferice corespunzătoare, găsim că aria $|\Sigma|$ a zonei Σ este egală cu integrala

$$\int_{\Sigma} d\mathcal{S}_\varepsilon = \varepsilon^{m-1} \int_{\pi/2 - \arcsin h/\varepsilon}^{\pi/2 + \arcsin h/\varepsilon} \sin^{m-2}\vartheta_1 d\vartheta_1 \times$$

$$\times \left\{ \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{m-3}\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{m-2} d\vartheta_2 \ldots \right.$$

$$\left. \ldots d\vartheta_{m-1} \right\}.$$

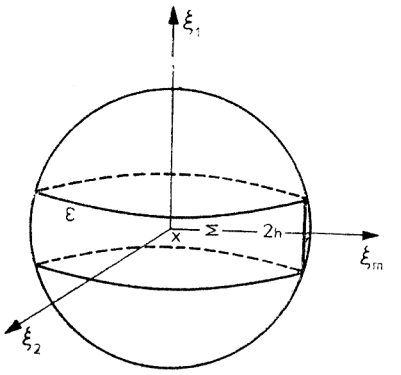

Fig. 19

Partea din dreapta are, evident, evaluarea $O\left(\varepsilon^{m-1} \arcsin\frac{h}{\varepsilon}\right) = O(\varepsilon^{m-1+\alpha})$. De aici rezultă că

$$\int_{S'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \, d_\xi S_\varepsilon = \frac{(m-2)\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)} + O(\varepsilon^\alpha)$$

și prin urmare

$$W_0(x) = -\frac{(m-2)\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}, \; x \in \Gamma.$$

§ 5. VALORI LIMITĂ ALE POTENȚIALULUI DE DUBLU STRAT

În exemplul referitor la integrala Gauss este clar că, în general, potențialul de dublu strat are o discontinuitate cînd punctul x traversează suprafața Γ. Totodată, după cum vom vedea acum, pentru condiții suficient de largi, există valori limită ale potențialului de dublu strat cînd punctul x tinde la un punct arbitrar $x_0 \in \Gamma$ fie din interiorul, fie de exteriorul lui Γ. Vom nota cu $W_i(x_0)$, respectiv $W_e(x_0)$, valorile limită corespunzătoare ale potențialului de dublu strat $W(x)$ în punctul $x_0 \in \Gamma$, cînd $x \to x_0$ din interiorul, respectiv din exteriorul lui Γ. Valoarea primară a acestui potențial în punctul x_0 o notăm cu $\overline{W(x_0)}$.

Teorema 14.5.1. *Fie Γ o suprafață Liapunov închisă și densitatea $\sigma(\xi)$ continuă pe Γ. Atunci pentru potențialul de dublu strat* (3.1) *au loc relațiile*

$$\left.\begin{aligned} W_i(x_0) &= -\frac{(m-2)|S_1|}{2}\,\sigma(x_0) + \overline{W(x_0)}, \\ W_e(x_0) &= \frac{(m-2)|S_1|}{2}\,\sigma(x_0) + \overline{W(x_0)}, \end{aligned}\right\} \quad x_0 \in \Gamma. \tag{1}$$

Formulele (3.1) pot fi scrise și sub forma

$$W(x) = W_1(x) + \sigma(x_0)\, W_0(x). \tag{2}$$

Aici W_0 este integrala lui Gauss, iar

$$W_1(x) = \int_\Gamma [\sigma(\xi) - \sigma(x_0)]\, \frac{\partial}{\partial \nu}\, \frac{1}{r^{m-2}}\, d_\xi \Gamma; \tag{3}$$

$W_1(x)$ este potențialul de dublu strat a cărui densitate $\sigma(\xi) - \sigma(x_0)$ se anulează pentru $\xi = x_0$. Să arătăm că acest potențial este continuu în punctul x_0.

Din punctul x_0 ca centru descriem o sferă de rază η oarecare; prin aceasta suprafața Γ se divide în două părți: $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$, din care Γ' este situat în interiorul sferei, iar Γ'' în exteriorul ei. În

mod corespunzător și potențialul $W_1(x)$ se descompune în două: $W_1(x) = W_1'(x) + W_1''(x)$, unde

$$W_1'(x) = \int_{\Gamma'} [\sigma(\xi) - \sigma(x_0)]\, \frac{\partial}{\partial \nu}\, \frac{1}{r^{m-2}}\, d_\xi \Gamma,$$

$$W_1''(x) = \int_{\Gamma''} [\sigma(\xi) - \sigma(x_0)]\, \frac{\partial}{\partial \nu}\, \frac{1}{r^{m-2}}\, d_\xi \Gamma.$$

În inegalitatea evidentă

$$|W_1(x) - \overline{W_1(x_0)}| \leqslant |W_1'(x)| + |\overline{W_1'(x_0)}| + |W_1''(x) - \overline{W_2''(x_0)}|; \tag{4}$$

liniuța de deasupra desemnează valoarea primară a potențialului respectiv.

Să evaluăm partea din dreapta inegalității (4). Alegem η astfel încît pentru $|\xi - x_0| < \eta$ să aibă loc inegalitatea $|\sigma(\xi) - \sigma(x_0)| < \varepsilon/3C$, unde ε este un număr pozitiv arbitrar dat, iar C o constantă determinată din inegalitatea (2.6). O astfel de alegere a lui η este posibilă deoarece densitatea $\sigma(\xi)$ este continuă. Atunci pentru orice $x \in E_m$ avem

$$|W_1'(x)| \leqslant \int_{\Gamma'} |\sigma(\xi) - \sigma(x_0)| \left|\frac{\partial}{\partial \nu}\, \frac{1}{r^{m-2}}\right| d\Gamma <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3C} \int_{\Gamma'} \left|\frac{\partial}{\partial \nu}\, \frac{1}{r^{m-2}}\right| d\Gamma \leqslant \frac{\varepsilon}{3C} \int \left|\frac{\partial}{\partial \nu}\, \frac{1}{r^{m-2}}\right| d\Gamma \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

În particular,

$$\overline{|W_1'(x_0)|} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6}$$

Fixăm raza η și să presupunem că $|x - x_0| \leqslant \frac{1}{2}\eta$. Atunci pe suprafața Γ''

$$r = |\xi - x| \geqslant |\xi - x_0| - |x - x_0| \geqslant \eta - \frac{1}{2}\eta = \frac{1}{2}\eta;$$

integrandul din integrala $W_1''(x)$ este o funcţie continuă şi deci însăşi integrala este continuă. În acest caz există $\delta > 0$ astfel încît pentru $|x - x_0| < \delta$ să avem

$$|W_1''(x) - W_1''(x_0)| = |W_1''(x) - \overline{W_1''(x_0)}| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{7}$$

Din relaţiile (4) — (7) rezultă că

$$|W_1(x) - \overline{W_1(x_0)}| < \varepsilon, \text{ dacă } |x - x_0| < \delta, \tag{8}$$

adică potenţialul $W_1(x)$ este continuu în punctul x_0. Deci în punctul respectiv valorile limită ale potenţialului $W_1(x)$ coincid cu valoarea sa primară

$$W_{1i}(x_0) = W_{1e}(x_0) = \overline{W_1(x_0)}. \tag{9}$$

Formula (4.2) arată că valorile limită ale integralei Gauss $W_0(x)$ există şi sînt respectiv egale cu $W_{0i}(x_0) = -(m-2)|S_1|$, $W_{0e}(x_0) = 0$, iar valoarea primară este $\overline{W_0(x_0)} = -\frac{m-2}{2}|S_1|$.

Din formulele (2) şi (9) rezultă că valorile limită $W_i(x_0)$ şi $W_e(x_0)$ există şi

$$W_i(x_0) = \overline{W_1(x_0)} + \sigma(x_0)\, W_{0i}(x_0) = \overline{W_1(x_0)} - (m-2)\,|S_1|\,\sigma(x_0),$$

$$W_e(x_0) = \overline{W_1(x_0)} + \sigma(x_0)\, W_{0e}(x_0) = \overline{W_1(x_0)}. \tag{10}$$

Pe de altă parte,

$$\overline{W_1(x_0)} = \int_\Gamma [\sigma(\xi) - \sigma(x_0)] \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r_0^{m-2}} \, d_\xi \Gamma =$$

$$= \overline{W(x_0)} + \frac{(m-2)|S_1|}{2}\sigma(x_0), \quad r_0 = |\xi - x_0|, \tag{11}$$

şi formulele (1) se deduc imediat din relaţiile (10) şi (11).

Din formulele (1) se deduce o relaţie simplă între densitatea potenţialului de dublu strat şi valorile sale limită

$$W_i(x_0) - W_e(x_0) = -(m-2)|S_1|\,\sigma(x_0). \tag{12}$$

Observaţii. 1. Dacă densitatea $\sigma(\xi)$ nu este continuă pe Γ, ci numai integrabilă, atunci — după cum se vede — valorile limită ale potenţialului de dublu strat există aproape peste tot pe Γ şi se exprimă prin aceleaşi formule (1).

2. Pentru derivata normală a potenţialului de dublu strat are loc următoarea teoremă a lui Liapunov. Fie Γ o suprafaţă Liapunov şi densitatea $\sigma(\xi)$ continuă pe Γ. Dacă derivata normală a potenţialului de dublu strat are limită cînd $x \to x_0 \in \Gamma$ din interior (din exterior), atunci are limită şi derivata din exterior (din interior) şi ele sînt egale.

Teorema 14.5.2. *Dacă suprafaţa Liapunov este închisă şi densitatea pe această suprafaţă este continuă, atunci potenţialul de dublu strat tinde uniform spre valorile sale limită atît din interiorul, cît şi din exteriorul suprafeţei.*

Păstrăm notaţiile folosite în demonstraţia teoremei 14.5.1. Densitatea $\sigma(\xi)$ este continuă şi de aceea şi uniform continuă pe Γ. Într-un astfel de caz raza η poate fi aleasă independent de poziţia punctului x_0 pe suprafaţa Γ. Dar potenţialul $W_1''(x)$ este de fapt o funcţie de două puncte: $x \in E_m$ şi $x_0 \in \Gamma$. Dacă raza η este fixată, atunci în mulţimea închisă, mărginită, definită de relaţiile $x_0 \in \Gamma$, $|x - x_0| \leqslant \frac{1}{2}\eta$, funcţia amintită este continuă şi prin urmare uniform continuă şi de aceea numărul δ, care figurează în inegalitatea (8), poate fi ales ca depinzînd numai de ε. Aceeaşi relaţie (8) arată atunci că $W_1(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} W_1(x_0)$ uniform în raport cu $x_0 \in \Gamma$.

În sfîrşit, potenţialul $W_0(x)$ este constant atît din interiorul, cît şi din exteriorul lui Γ şi de aceea cînd $x \to x_0$, fie din interiorul, fie din exteriorul lui Γ, $W_0(x)$ tinde uniform la valoarea sa limită.

Astfel, din formula (2) este evident că aceleaşi proprietăţi le are şi potenţialul $W(x)$.

§ 6. CONTINUITATEA POTENŢIALULUI DE SIMPLU STRAT

Teorema 14.6.1. *Dacă Γ este o suprafaţă Liapunov închisă iar densitatea $\mu(\xi)$ este măsurabilă şi mărginită, atunci potenţialul de simplu strat*

$$V(x) = \int_\Gamma \mu(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} \, d_\xi \Gamma \tag{1}$$

este continuu în tot spaţiul E_m.

Continuitatea potențialului (1) pentru $x \notin \Gamma$ este evidentă; rămîne să analizăm cazul $x \in \Gamma$.

Să arătăm mai întîi că pentru $x \in \Gamma$ integrala (1) converge și, prin urmare, potențialul de simplu strat $V(x)$ este definit pe suprafața Γ. Considerăm sfera Liapunov $S(x)$ și fie $\Gamma'(x)$ porțiunea din Γ cuprinsă în interiorul sferei $S(x)$; avem

$$V(x) = \int_{\Gamma'(x)} \mu(\xi)\, \frac{1}{r^{m-2}}\, d_\xi \Gamma + \int_{\Gamma \setminus \Gamma'(x)} \mu(\xi) \frac{1}{r^{m-2}}\, d_\xi \Gamma.$$

Integrandul din a doua integrală este o funcție continuă și este suficient să analizăm prima integrală. Introducem sistemul local de coordonate $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ cu centrul în punctul x și cu axa ξ_m orientată în direcția normalei la Γ în acest punct. Punem $\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_{m-1}^2$. Notînd cu $G'(x)$ proiecția suprafeței $\Gamma'(x)$ pe planul $\xi = 0$, tangent la Γ în punctul x, avem egalitatea

$$\int_{\Gamma'(x)} \mu(\xi)\, \frac{1}{r^{m-2}}\, d\xi = \int_{G'(x)} \mu(\xi)\, \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{r^{m-2} \cos(\nu, \xi_m)}; \qquad (2)$$

dacă $|\mu(\xi)| \leqslant M = \text{const}$, atunci funcția de sub integrală nu depășește mărimea $2M/\rho^{m-2}$ și integrala (2) converge.

Să arătăm acum că în orice punct $x \in \Gamma$ potențialul (1) este continuu. Fie y un punct arbitrar din E_m. Descriem în jurul punctului x o sferă de rază $\eta < d$. Notăm cu Γ'_η și Γ''_η porțiunile din suprafața Γ situate în interiorul, respectiv exteriorul sferei. Integrala (1) o descompunem în două părți, după Γ'_η și Γ''_η; aceste integrale le notăm cu V', respectiv V''. Atunci este evidentă inegalitatea

$$|V(y) - V(x)| \leqslant |V'(y)| + |V'(x)| + |V''(y) - V''(x)|. \qquad (3)$$

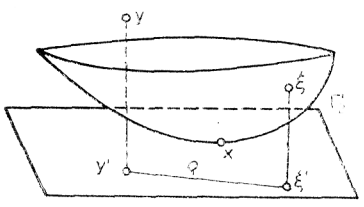

Fig. 20

Să evaluăm primul termen din (3). Deoarece $\eta < d$, atunci $\Gamma'_\eta \subset \Gamma'(x)$ și pe Γ'_η se pot introduce coordonate locale cu originea în x. Notăm cu y' proiecția punctului y pe planul tangent în x (fig. 20). Fie $(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}, 0)$ coordonatele locale ale punctului y'. Punem $\rho^2 = \sum_{k=1}^{m-1} (\xi_k - y_k)^2$; unde ρ este lungimea proiecției pe planul tangent în x a segmentului ce unește punctul ξ cu y. Evident că $\rho \leqslant |\xi - y|$.

Mai departe,

$$|V'(y)| = \left| \int_{\Gamma'_\eta} \mu(\xi)\, \frac{d_\xi \Gamma}{|\xi - y|^{m-2}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant M \int_{G'_\eta} \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_{m-1}}{\rho^{m-2} \cos(\nu, \xi_m)} \leqslant 2M \int_{G'_\eta} \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_{m-1}}{\rho^{m-2}};$$

aici G'_η este proiecția suprafeței Γ'_η pe planul tangent în punctul x.

Luăm punctul y atît de apropiat de x încît $|y - x| < \frac{1}{2}\eta$. Atunci, dacă $\xi \in \Gamma'_\eta$, avem

$$\rho \leqslant |\xi - y| \leqslant |\xi - x| + |x - y| < \frac{3}{2}\eta.$$

Aceasta înseamnă că domeniul G'_η este situat în întregime în bila $(m-1)$-dimensională $\rho < \frac{3}{2}\eta$ și prin urmare

$$|V'(y)| \leqslant 2M \int_{\rho < \frac{3}{2}\eta} \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_{m-1}}{\rho^{m-2}}. \qquad (4)$$

În spațiul $(m-1)$-dimensional introducem coordonatele sferice cu centrul în punctul y'. Atunci $d\xi_1 \ldots d\xi_{m-1} = \rho^{m-2}\, d\rho\, d\sigma_1$; aici și în cele ce urmează în acest capitol, vom nota cu σ_1 sfera unitate în spațiul $(m-1)$-dimensional, iar prin $d\sigma_1$ elementul de arie corespunzător. Formula (4) devine

$$|V'(y)| \leqslant 2M \int_{\sigma_1} d\sigma_1 \int_0^{\frac{3}{2}\eta} d\rho = 3\, M\, |\sigma_1|\, \eta.$$

Fie ε un număr pozitiv arbitrar dat. Luăm $\eta = \frac{\varepsilon}{9M|\sigma_1|}$. Atunci, dacă $|y - x| < \frac{\varepsilon}{18M|\sigma_1|}$, rezultă $|V'(y)| \leqslant \varepsilon/3$. Ultima

inegalitate este evident adevărată și pentru $y = x$: $|V'(x)| \leqslant \varepsilon/3$. Din inegalitatea (3) obținem

$$|V(y) - V(x)| \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon + |V''(y) - V''(x)|.$$

Alegem $\delta > 0$ astfel încît $\delta < \dfrac{\varepsilon}{18\,M\,|\sigma_1|}$ și pentru $|y - x| < \delta$ să avem $|V''(y) - V''(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Atunci

$$|V(y) - V(x)| < \varepsilon.$$

§ 7. DERIVATA NORMALĂ A POTENȚIALULUI DE SIMPLU STRAT

Vom analiza ca și pînă acum potențialul de simplu strat (6.1) presupunînd că Γ este o suprafață Liapunov închisă.

Fie x un punct arbitrar din E_m și n normala exterioară la suprafața Γ, ce trece prin punctul x. Dacă $x \notin \Gamma$, atunci se poate calcula derivata potențialului (6.1) după direcția normalei n, diferențiind, pur și simplu, sub semnul integrală:

$$\frac{\partial V(x)}{\partial n} = \int_\Gamma \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}}\, d_\xi\Gamma. \tag{1}$$

Un calcul analog aceluia din § 2 conduce la formula

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}} = \frac{m-2}{r^{m-1}} \cos(r, n), \tag{2}$$

de unde

$$\frac{\partial V(x)}{\partial n} = (m-2)\int_\Gamma \mu(\xi) \frac{\cos(r, n)}{r^{m-1}}\, d_\xi\Gamma. \tag{3}$$

Fie $x \in \Gamma$. Dacă densitatea $\mu(\xi)$ este măsurabilă și mărginită, adică $|\mu(\xi)| \leqslant M = \text{const}$, atunci integrala (3) este convergentă. Să arătăm acest lucru. Separăm porțiunea $\Gamma'(x)$ a suprafeței Γ,

ce se află în interiorul sferei Liapunov $S(x)$. Este suficient să arătăm că integrala

$$\int_{\Gamma'(x)} \mu(\xi) \frac{\cos(r, n)}{r^{m-1}}\, d_\xi\Gamma.$$

este convergentă. Introducînd coordonatele locale cu originea în punctul x, ultima integrală capătă forma

$$\int_{G'(x)} \mu(\xi) \frac{\cos(r, n)}{r^{m-1}} \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_{m-1}}{\cos(\nu, \xi_m)}, \tag{4}$$

unde $G'(x)$ este proiecția lui $\Gamma'(x)$ pe planul tangent în punctul x. Funcția de sub integrala (4) este mărginită de

$$\frac{2M}{\rho^{m-1}} |\cos(r, n)|, \quad \rho^2 = \xi_1^2 + \xi_\eta^2 + \ldots + \xi_{m-1}^2.$$

Dar conform inegalităților (1.9) și (1.8) avem

$$|\cos(n, r)| \leqslant cr^\alpha \leqslant 2^\alpha c\rho^\alpha, \tag{5}$$

și pentru funcția de sub integrala (4) obținem în final evaluarea $2^\alpha Mc/\rho^{m-1-\alpha}$, ceea ce arată că integrala (3) este convergentă.

După cum vom vedea ceva mai jos, valoarea integralei (3) nu reprezintă derivata normală a potențialului (6.1) pentru $x \in \Gamma$. Valoarea integralei (3) pentru $x \in \Gamma$ se numește *valoarea primară* a derivatei normale a potențialului de simplu strat și se notează $\overline{\dfrac{\partial V(x)}{\partial n}}$. Vom desemna prin $\dfrac{\partial V(x_0)}{\partial n_i}$, respectiv $\dfrac{\partial V(x_0)}{\partial n_e}$, valorile limită (dacă ele există) ale derivatei normale $\dfrac{\partial V(x)}{\partial n}$, cînd $x \to x_0 \in \Gamma$ din interiorul, respectiv din exteriorul lui Γ.

Torema 14.7.1. *Dacă Γ este o suprafață Liapunov închisă, iar densitatea $\mu(\xi)$ este continuă pe Γ, atunci pe suprafața Γ limitele uniforme ale derivatelor normale ale potențialului de simplu strat* (6.1) *există atît din interiorul, cît și din exteriorul lui Γ. Valorile limită ale derivatei normale a potențialului de simplu strat sînt date de formulele*

$$\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_i} = \frac{(m-2)|S_1|}{2}\mu(x_0) + \overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}},$$

$$\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_e} = -\frac{(m-2)|S_1|}{2}\mu(x_0) + \overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}}. \tag{6}$$

Fie potențialul de dublu strat de densitate μ

$$W(x) = \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \, d_\xi \Gamma \tag{7}$$

și fie suma

$$\frac{\partial V(x)}{\partial n} + W(x) = \int_{\Gamma} \mu(\xi) \left[\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right] d_\xi \Gamma.$$

Să arătăm că această funcție este continuă cînd punctul x traversează suprafața Γ în direcția normalei.

Fie x_0 un punct pe suprafața Γ, n normala la Γ în acest punct și x un punct arbitrar pe normala n, situat în interiorul sau în exteriorul lui Γ. Descriem în jurul punctului x_0 o sferă de rază $\eta < d$ și notăm cu Γ'_η porțiunea din suprafața Γ care se găsește în interiorul sferei menționate. Raționamentele din paragraful precedent arată că este suficient să stabilim următorul fapt : pentru η suficient de mic are loc inegalitatea

$$A = \left| \int_{\Gamma - \Gamma'_\eta} \mu(\xi) \left[\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right] d_\xi \Gamma \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

unde ε este un număr pozitiv dat arbitrar. Atunci, evident, au loc identitățile :

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} = \frac{m-2}{r^{m-1}} \frac{\xi_k - x_k}{r} \cos(n, \xi_k),$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} = -\frac{m-2}{r^{m-1}} \frac{\xi_k - x_k}{r} \cos(\nu, \xi_k).$$

Introducem sistemul local de coordonate cu centrul în punctul x_0. În acest sistem $x_k = 0$, $\cos(n, \xi_k) = 0$ pentru $1 \leqslant k \leqslant m-1$ și $\cos(n, \xi_m) = 1$. Atunci

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} =$$

$$= \frac{m-2}{r^{m-1}} \frac{\xi_m - x_m}{r} [1 - \cos(\nu, \xi_m)] - \frac{m-2}{r^{m-1}} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\xi_k}{r} \cos(\nu, \xi_k).$$

Conform inegalității (1.12),

$$|\cos(\nu, \xi_k)| \leqslant a r_0^\alpha, \; k = 1, 2, \ldots, m-1,$$

unde $r_0 = |\xi - x_0|$, iar din (1.1) găsim

$$1 - \cos(\nu, \xi_m) \leqslant \frac{a^2 \rho^{2\alpha}}{\sqrt{1 + a^2 \rho^{2\alpha}} (1 + \sqrt{1 + a^2 \rho^{2\alpha}})} \leqslant \frac{a^2 r_0^{2\alpha}}{2} \leqslant \frac{a d^\alpha a r_0^\alpha}{2}$$

și, conform relației (1.7),

$$1 - \cos(\nu, \xi_m) \leqslant a_1 r_0^\alpha, \quad a_1 = a/2.$$

Acum se observă ușor că

$$\left| \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| \leqslant \frac{c_1 r_0^\alpha}{r^{m-1}}, \quad c_1 = \text{const.} \tag{8}$$

Fie $\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_{m-1}^2$ și notăm cu G'_η proiecția suprafeței Γ'_η pe planul tangent în punctul x_0. Conform formulei (1.8), $r_0 \leqslant 2\rho$. Pe de altă parte,

$$r^2 = \sum_{k=1}^{m} (\xi_k - x_k)^2 = \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k^2 + (\xi_m - x_m)^2 \geqslant \rho^2,$$

de unde $r \geqslant \rho$. Atunci din formula (8) rezultă inegalitatea

$$\left| \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| \leqslant \frac{2^\alpha c_1}{\rho^{m-1-\alpha}}. \tag{9}$$

Fie $|\mu(\xi)| \leqslant M$, atunci

$$A \leqslant 2^\alpha c_1 M \int_{\Gamma_\eta} \frac{d_\xi \Gamma}{\rho^{m-1-\alpha}} = 2^\alpha c_1 M \int_{G'_\eta} \frac{d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{\rho^{m-1-\alpha} \cos(\nu, \xi_m)} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\alpha+1} c_1 M \int_{G'_\eta} \frac{d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{\rho^{m-1-\alpha}}.$$

În domeniul G'_η are loc inegalitatea $\rho \leqslant r \leqslant \eta$ și de aceea G'_η se găsește în întregime în bila $\rho \leqslant \eta$ și prin urmare

$$A \leqslant 2^{\alpha+1} c_1 M \int\limits_{\rho<\eta} \frac{d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{\rho^{m-1-\alpha}} = 2^{\alpha+1} c_1 M \int\limits_{\sigma_1} d\sigma_1 \int\limits_0^\eta \rho^{\alpha-1}\, d\rho =$$

$$= \frac{2^{\alpha+1} c_1 M |\sigma_1|}{\alpha}\, \eta^\alpha.$$

Evident, este suficient să luăm $\eta < \left[\frac{\alpha\varepsilon}{3 \cdot 2^{\alpha+1} c_1 M |\sigma_1|}\right]^{1/\alpha}$ și obținem că

$$A < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{10}$$

Repetînd raționamentele din §§ 3 și 6, pe baza evaluării (10), deducem că $\frac{\partial V(x)}{\partial n} + W(x)$ este continuă cînd punctul x traversează suprafața Γ. Dar atunci pentru această sumă valoarea limită și valoarea primară coincid:

$$\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_i} + W_i(x_0) = \frac{\partial V(x_0)}{\partial n_e} + W_e(x_0) = \overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}} + \overline{W(x_0)}.$$

De aici rezultă egalitatea căutată:

$$\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_i} = \overline{W(x_0)} - W_i(x_0) + \overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}} = \frac{(m-2)|S_1|}{2}\mu(x_0) +$$

$$+ \overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}},$$

$$\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_e} = \overline{W(x_0)} - W_e(x_0) + \overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}} =$$

$$= -\frac{(m-2)|S_1|}{2}\mu(x_0) + \overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}}.$$

Scăzînd egalitatea (6), obținem formula ce leagă densitatea potențialului de simplu strat cu valorile limită ale derivatei sale normale

$$\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_i} - \frac{\partial V(x_0)}{\partial n_e} = (m-2)|S_1|\,\mu(x_0). \tag{11}$$

Rămîne să demonstrăm că $\frac{\partial V(x)}{\partial n_i}$ și $\frac{\partial V(x)}{\partial n_e}$ sînt limite uniforme. Deoarece putem scrie

$$\frac{\partial V(x)}{\partial n} = \left[\frac{\partial V(x)}{\partial n} + W(x)\right] - W(x), \tag{12}$$

expresia din paranteza dreaptă este continuă conform celor demonstrate și de aceea tinde uniform spre valoarea sa limită; de această dată este indiferent dacă punctul x tinde spre punctul $x_0 \in \Gamma$ din interiorul sau exteriorul lui Γ. În continuare, dacă $x \to x_0$ fie din interiorul, fie din exteriorul lui Γ, conform teoremei 14.5.2 potențialul de dublu strat $W(x)$ converge uniform spre valoarea sa limită. În baza relației (12), $\frac{\partial V(x)}{\partial n}$ are aceleași proprietăți.

Observație. Să presupunem că Γ închisă constă dintr-un număr finit de porțiuni de suprafețe Liapunov. Formulele limită (5.1) și (7.6) pentru potențialele de simplu și dublu strat rămîn adevărate pentru acele puncte ale suprafeței Γ în vecinătatea cărora această suprafață este Liapunov, cu condiția ca inegalitatea

$$\forall x \in E_m, \quad \int\limits_\Gamma \left|\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{\eta^{m-2}}\right| d_\xi \Gamma \leqslant C \text{ const}$$

să fie îndeplinită.

Capitolul 15

ECUAȚII INTEGRALE ALE TEORIEI POTENȚIALULUI

§ 1. REDUCEREA PROBLEMELOR DIRICHLET ȘI NEUMANN LA ECUAȚII INTEGRALE

Fie Γ o suprafață Liapunov închisă, frontieră a domeniilor: Ω — interior și Ω' — exterior. Formulăm simultan patru probleme la limită pentru ecuația lui Laplace omogenă: să se găsească o funcție $u(x)$ armonică în domeniile Ω sau Ω' ce satisface fie condiția problemei Dirichlet

$$u|_\Gamma = \varphi(x), \tag{1}$$

fie condiția problemei Neumann

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = \psi(x). \tag{2}$$

Funcțiile $\varphi(x)$ și $\psi(x)$ le vom presupune continue pe Γ.

Problemele Dirichlet interioară și exterioară le vom desemna respectiv cu D_i și D_e, iar problemele Neumann interioară și exterioară — respectiv cu N_i și N_e. Problemele vor fi rezolvate căutînd soluții de forma unor potențiali. Mai precis, soluțiile problemelor Dirichlet le vom căuta de forma unui potențial de dublu strat

$$u(x) = \int_\Gamma \sigma(\xi)\,\frac{\partial}{\partial \nu}\,\frac{1}{r^{m-2}}\,\mathrm{d}_\xi\Gamma, \tag{3}$$

iar soluțiile problemelor Neumann sub forma unui potențial de simplu strat

$$u(x) = \int \mu(\xi)\,\frac{1}{r^{m-2}}\,\mathrm{d}_\xi\Gamma\,, \tag{4}$$

unde densitățile căutate $\sigma(\xi)$ și $\mu(\xi)$ vor fi continue pe Γ. Aceste reprezentări ale soluțiilor conduc automat la funcții armonice în domeniile respective și rămîne să ne ocupăm numai de condițiile la limită. Remarcăm totuși că în cazul D_e vom întîmpina anumite

dificultăți: soluția la infinit poate avea ordinul $O(|x|^{2-m})$, pe cînd potențialul (3) descrește mai repede — el avînd ordinul $O(|x|^{1-m})$ și, prin urmare, nu orice funcție armonică în Ω' poate fi reprezentată sub forma (3).

Să analizăm, de exemplu, problema Dirichlet interioară D_i. Condiția la limită (1) va semnifica următoarele: dacă $x \in \Omega$ și $x \to x_0 \in \Gamma$, atunci

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0). \tag{5}$$

Dar $u(x)$ este un potențial de dublu strat a cărui densitate, conform ipotezei, este continuă. În acest caz, conform formulei (5.1) capitolul 14, avem

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = -\frac{(m-2)|S_1|}{2}\,\sigma(x_0) + \int_\Gamma \sigma(\xi)\,\frac{\partial}{\partial \nu}\,\frac{1}{|\xi - x_0|^{m-2}}\,\mathrm{d}_\xi\Gamma.$$

Substituind aceasta în formula (5) și înlocuind pe x_0 cu x, prin împărțire cu $-\dfrac{(m-2)|S_1|}{2}$, obținem următoarea ecuație integrală pentru funcția necunoscută $\sigma(x)$

$$\sigma(x) - \frac{2}{(m-2)|S_1|}\int_\Gamma \sigma(\xi)\,\frac{\partial}{\partial \nu}\,\frac{1}{r^{m-2}}\,\mathrm{d}_\xi\Gamma = -\frac{2}{(m-2)|S_1|}\,\varphi(x),$$

$$x \in \Gamma.$$

Folosind formulele (5.1) și (7.6) cap. 14 pentru valorile limită, precum și condițiile la limită (1) și (2), obținem ecuațiile integrale pentru celelalte trei probleme. Să scriem toate aceste ecuații, explicit, la un loc:

$$(D_i)\ \sigma(x) - \frac{2}{(m-2)|S_1|}\int_\Gamma \sigma(\xi)\,\frac{\partial}{\partial \nu}\,\frac{1}{r^{m-2}}\,\mathrm{d}_\xi\Gamma =$$

$$= \frac{2}{(m-2)|S_1|}\,\varphi(x), \tag{6}$$

$$(D_e)\ \sigma(x) + \frac{2}{(m-2)|S_1|}\int_\Gamma \sigma(\xi)\,\frac{\partial}{\partial \nu}\,\frac{1}{r^{m-2}}\,\mathrm{d}_\xi\Gamma =$$

$$= \frac{2}{(m-2)|S_1|}\,\varphi(x), \tag{7}$$

$$(N_i)\mu(x) + \frac{2}{(m-2)|S_1|}\int_\Gamma \mu(\xi)\,\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Gamma =$$

$$= \frac{2}{(m-2)|S_1|}\psi(x), \tag{8}$$

$$(N_e)\mu(x) - \frac{2}{(m-2)|S_1|}\int_\Gamma \mu(\xi)\,\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Gamma =$$

$$= -\frac{2}{(m-2)|S_1|}\psi(x). \tag{9}$$

În ecuațiile (6) — (9), $x \in \Gamma$. Menționăm următoarele proprietăți ale acestor ecuații:

1. Formulele (1.10), (7.2), (7.5), cap. 14 arată că ecuațiile (6) — (9) sînt ecuații integrale cu singularitate slabă.

2. Nucleele

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}, \quad \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}$$

se obțin unul din celălalt prin permutarea punctelor x și ξ. Cum aceste nuclee sînt și reale, atunci ele sînt adjuncte. De aici rezultă că ecuațiile (6) și (9), precum și ecuațiile (7) și (8) sînt perechi adjuncte.

3. Orice soluție de pătrat integrabil a fiecăreia din ecuațiile (6) — (9) este continuă pe Γ. Demonstrația acestei afirmații se bazează pe următoarea teoremă din teoria ecuațiilor integrale (vezi [28], § 14).

Fie D o varietate compactă m-dimensională și fie că în ecuația integrală cu singularitate slabă

$$u(x) - \int_D \frac{A(x,y)}{r^{m-\lambda}}u(y)\,dy = f(x);\ x \in D, r = |x-y|, \tag{10}$$

funcțiile $A(x, y)$ și $f(x)$ sînt respectiv continue în $D \times D$ și în D, iar dy reprezintă elementul de măsură pe D. Atunci orice soluție de pătrat integrabil în D a ecuației (10) *este continuă în D.*

Este suficient să se verifice că ecuațiile (6) — (9) satisfac condițiile teoremei pentru valoarea $(m-1)$ a parametrului m. Mai întîi

$D = \Gamma$ este o varietate compactă $(m-1)$-dimensională și deci termenii liberi din ecuațiile (6) — (9) sînt continui pe Γ. Mai mult, după cum s-a arătat în § 3 cap. 14,

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}} = \frac{A(x,\xi)}{r^{m-1-\alpha/2}},\ \alpha > 0,$$

unde funcția $A(x, \xi)$ este continuă pe Γ. Permutînd x cu ξ, obținem

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}} = \frac{A(\xi,x)}{r^{m-1-\alpha/2}},$$

și deci funcția $A(\xi, x)$ este continuă pe Γ.

Ecuațiile (6) — (9) se numesc de obicei *ecuațiile integrale ale teoriei potențialului.*

§ 2. PROBLEMELE DIRICHLET ȘI NEUMANN PENTRU SEMISPAȚIU

Pînă acum nu s-a dat o definiție funcțiilor armonice într-un semispațiu sau, în general, în domenii cu frontieră nemărginită. Să extindem la acest caz definiția dată pentru un domeniu mărginit, spunînd că o funcție este „armonică într-un domeniu nemărginit", dacă în acest domeniu funcția respectivă are derivatele de ordinul al doilea continue și satisface ecuația lui Laplace.

Ecuațiile integrale obținute în paragraful precedent permit să se rezolve problemele Dirichlet și Neumann pentru ecuația lui Laplace într-un semispațiu; va fi necesar să presupunem că funcțiile date $\varphi(x)$ și $\psi(x)$ au un anumit comportament la infinit. Vom vorbi mai amănunțit despre aceasta ceva mai jos.

În cazul unor restricții naturale, teoremele referitoare la potențial, demonstrate în cap. 14, se extind și asupra suprafețelor nemărginite. Astfel, dacă suprafața Γ este planul $\xi_m = 0$, atunci este suficient să se presupună că densitatea $\sigma(\xi)$ a potențialului de dublu strat are la infinit estimarea

$$\sigma(\xi) = O(\rho^{-\beta}),\ \rho^2 = \sum_{k=1}^{m-1}\xi_k^2,\ \beta = \text{const} > 0, \tag{1}$$

pe cînd densitatea $\mu(\xi)$ a potențialului de simplu strat are estimarea

$$\mu(\xi) = O(\rho^{-\beta-1}); \tag{2}$$

pentru aceste estimări integralele (3.1) și (6.1), cap. 14 sînt convergente.

În cazul semispațiului este suficient să considerăm numai problema Dirichlet și să analizăm deci numai ecuațiile integrale (1.6) și (1.8). Conform formulei (2.4) cap. 14, nucleul ecuației (6) are forma $\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}} = -\frac{(m-2)}{r^{m-1}}\cos(r, \nu)$. În cazul dat, normala ν exterioară la semispațiul $\xi_m > 0$ este orientată în sens opus axei ξ_m; dacă ambele puncte x și ξ se află în planul $\xi_m = 0$, atunci și vectorul r se află în același plan. Dar atunci $\cos(r, \nu) \equiv 0$ și nucleul ecuației (1.6) este identic nul. Acest lucru este adevărat și pentru nucleul adjunct acestuia din ecuația (1.8). Deci aceste ecuații conduc la egalitățile

$$\sigma(x) = -\frac{2}{(m-2)|S_1|}\varphi(x), \quad \mu(x) = \frac{2}{(m-2)|S_1|}\psi(x).$$

Soluția problemei Dirichlet pentru semispațiul $x_m > 0$ este dată de formula

$$u(x) = \frac{2}{(m-2)|S_1|}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\,\frac{\partial}{\partial \xi_m}\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi_1\ldots d\xi_{m-1}, \qquad (3)$$

iar soluția problemei Neumann de formula

$$u(x) = \frac{2}{(m-2)|S_1|}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\xi)\,\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi_1\ldots d\xi_{m-1}, \qquad (4)$$

formulele (3) și (4) au loc dacă la infinit avem

$$\varphi(\xi) = O(\rho^{-\beta}), \quad \psi(\xi) = O(\rho^{-\beta-1}), \quad \beta = \text{const} > 0.$$

Derivînd din formula (3), obținem

$$u(x) = \frac{2x_m}{|S_1|}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\,\frac{1}{r^m}\,d\xi_1\ldots d\xi_{m-1}, \qquad (3_1)$$

$$r^2 = \sum_{k=1}^{m-1}(\xi_k - x_k)^2 + x_m^2.$$

§ 3. STUDIUL PRIMEI PERECHI DE ECUAȚII ADJUNCTE

Să demonstrăm că ecuațiile integrale (1.6) și (1.9), corespunzătoare problemei Dirichlet interioară D_i și problemei Neumann exterioară N_e, admit soluții unice pentru orice funcții continue $\varphi(x)$ și $\psi(x)$. În acest scop să analizăm ecuația integrală omogenă corespunzătoare problemei Neumann exterioară; în această ecuație notăm necunoscuta cu $\mu_0(x)$

$$\mu_0(x) - \frac{2}{(m-2)|S_1|}\int_\Gamma \mu_0(\xi)\,\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi = 0. \qquad (1)$$

Fie $\mu_0 \in L_2(\Gamma)$ o soluție oarecare a acestei ecuații. După cum s-a arătat în § 1, funcția μ_0 este continuă pe Γ. Fie potențialul de simplu strat de densitate μ_0,

$$V_0(x) = \int_\Gamma \mu_0(\xi)\,\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Gamma. \qquad (2)$$

Ecuația (1) arată că valoarea limită din exterior a derivatei normale a potențialului (2) este egală cu zero,

$$\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_e} = 0. \qquad (3)$$

Conform teoremei de unicitate pentru problema Neumann exterioară avem

$$V_0(x) \equiv 0, \quad x \in \Omega'. \qquad (4)$$

Dar potențialul de simplu strat este o funcție continuă în tot spațiul și de aceea

$$V_0(x) \equiv 0, \; x \in \Gamma. \qquad (5)$$

Fie acum potențialul $V_0(x)$ în domeniul Ω situat în interiorul lui Γ. În acest domeniu funcția $V_0(x)$ este armonică și, conform relației (5), se anulează pe frontiera domeniului. Conform teoremei de unicitate pentru problema Dirichlet interioară

$$V_0(x) \equiv 0, \; x \in \Omega. \qquad (6)$$

Dar atunci și $\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_i} \equiv 0$ în Ω. Comparînd aceasta cu formula (3) și ținînd seama de formula (7.11) cap. 14, găsim că $\mu_0(x) = 0$.

Prin urmare, ecuația integrală omogenă (1) are numai soluție banală. În baza alternativei lui Fredholm ecuația integrală a problemei Neumann exterioară (ecuația (1.9)) are soluție unică pentru orice funcție $\psi \in L_2(\Gamma)$ și cu atît mai mult pentru orice funcție continuă $\psi(x)$. Astfel, valoarea parametrului $\lambda = \dfrac{2}{(m-2)|S_1|}$ este valoare regulată*) pentru nucleul $\dfrac{\partial}{\partial n}\dfrac{1}{r^{m-2}}$; conform unei cunoscute teoreme a lui Fredholm ea este valoare regulată și pentru nucleul adjunct $\dfrac{\partial}{\partial \nu}\dfrac{1}{r^{m-2}}$. De aici rezultă că ecuația integrală a problemei Dirichlet interioară admite soluție unică pentru orice funcție $\varphi \in L_2(\Gamma)$ și cu atît mai mult pentru orice funcție continuă $\varphi(x)$.

Dacă ecuațiile integrale ale problemelor D_i și N_e admit soluții, atunci au soluții și respectivele probleme. Aceasta conduce la următoarele afirmații:

1. Dacă Γ este o suprafață Liapunov, atunci problema Dirichlet interioară pentru această suprafață are soluție pentru orice date continue pe frontieră și soluția poate fi reprezentată sub forma unui potențial de dublu strat.

2. Dacă Γ este o suprafață Liapunov, atunci problema Neumann exterioară pentru această suprafață are soluție pentru orice date continue pe frontieră și soluția poate fi reprezentată sub forma unui potențial de simplu strat.

§ 4. STUDIUL CELEI DE A DOUA PERECHI DE ECUAȚII ADJUNCTE

Valoarea parametrului

$$\lambda = -\frac{2}{(m-2)|S_1|}, \qquad (1)$$

*) Ecuațiile (6) — (9) din § 1 au forma generală $\varphi(x) = \lambda \int_\Gamma K(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi + f(x)$ cunoscută sub numele de ecuație de tip Fredholm de speța a doua, de nucleu $K(x, \xi)$ și cu termenul liber $f(x)$, unde λ este un parametru. Valorile lui λ pentru care ecuația omogenă ($f \equiv 0$) admite soluții nebanale se numesc *numere caracteristice* ale nucleului K și deci ele sînt inversele valorilor proprii ale operatorului $A\varphi(x) = \int_\Gamma K(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi$. Valorile lui λ care nu sînt numere caracteristice se numesc *valori regulate* ale nucleului K. (*N. T.*).

ce intervine în ecuațiile integrale ale problemelor D_e și N_i (ecuațiile (1.7) și (1.8)), reprezintă un număr caracteristic pentru fiecare din nucleele $\dfrac{\partial}{\partial \nu}\dfrac{1}{r^{m-2}}$, $\dfrac{\partial}{\partial n}\dfrac{1}{r^{m-2}}$. Într-adevăr, a treia egalitate din (4.2) cap. 14 arată că ecuația integrală omogenă a problemei D_e

$$\sigma_0(x) + \frac{2}{(m-2)|S_1|}\int_\Gamma \sigma_0(\xi)\,\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Gamma = 0 \qquad (2)$$

are o soluție nebanală $\sigma_0(x) \equiv 1$, ceea ce înseamnă că valoarea lui λ dată de (1) este număr caracteristic pentru nucleul $\dfrac{\partial}{\partial \nu}\dfrac{1}{r^{m-2}}$. Pe baza unei cunoscute teoreme a lui Fredholm, acesta este număr caracteristic și pentru nucleul adjunct $\dfrac{\partial}{\partial n}\dfrac{1}{r^{m-2}}$. În acest caz ecuația integrală omogenă a problemei N_i

$$\mu_0(x) + \frac{2}{(m-2)|S_1|}\int_\Gamma \mu_0(\xi)\,\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Gamma = 0 \qquad (3)$$

are cel puțin o soluție nebanală; să o notăm cu $\mu_0(x)$.

Să arătăm că *ecuațiile* (2) *și* (3) *nu au soluții liniare independente de soluțiile* $\sigma_0(x)$ *și* $\mu_0(x)$. În virtutea teoremei lui Fredholm, este suficient să arătăm că această proprietate o are ecuația (3). Fie potențialul de simplu strat cu densitatea $\mu_0(\xi)$

$$V_0(x) = \int_\Gamma \mu_0(\xi)\,\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Gamma. \qquad (4)$$

Din ecuația (3) rezultă că

$$\frac{\partial V_0}{\partial n_i} \equiv 0. \qquad (5)$$

Deoarece $V_0(x)$ este o funcție armonică în domeniul Ω, situat în interiorul lui Γ, atunci conform teoremei de unicitate pentru problema N_i

$$V_0(x) \equiv c_0 = \text{const}, \qquad x \in \Omega, \qquad (6)$$

unde $c_0 \neq 0$. Într-adevăr, dacă $c_0 = 0$, atunci $V_0(x) \equiv 0$, $x \in \Omega$. În baza continuității potențialului de simplu strat $V_0(x) \equiv 0$, $x \in \Gamma$; conform teoremei de unicitate pentru problema Dirichlet exterioară $V_0(x) \equiv 0$, $x \in \Omega'$. Dar atunci avem

$$\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_e} \equiv 0 \tag{7}$$

și din relațiile (5) și (7) precum și din formula (7.11) cap. 14 rezultă că $\mu_0(x) \equiv 0$, ceea ce contrazice faptul că soluția $\mu_0(x)$ este nebanală.

Pe parcurs s-a demonstrat următoarea afirmație: dacă în interiorul lui Γ potențialul de simplu strat este identic nul, atunci densitatea sa este de asemenea identic nulă.

Să presupunem acum că ecuația (3) admite încă o soluție $\mu_1(x)$. Fie potențialul

$$V_1(x) = \int_\Gamma \mu_1(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} \, d\xi.$$

Repetînd raționamentele precedente, arătăm că dacă $x \in \Omega$, atunci potențialul $V_1(x) \equiv c_1 \equiv \text{const}$. Să notăm

$$\mu_2(x) = c_1\mu_0(x) - c_0\mu_1(x). \tag{8}$$

Evident, $\mu_2(x)$ este soluție a aceleiași ecuații (3). Fie potențialul

$$V_2(x) = \int_\Gamma \mu_2(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} \, d_\xi\Gamma = c_1V_0(x) - c_0V_1(x).$$

Dacă $x \in \Omega$, atunci $V_2(x) = c_1c_0 - c_0c_1 = 0$. Conform celor demonstrate mai sus $\mu_2(x) \equiv 0$; atunci

$$\mu_1(x) = \frac{c_1}{c_0}\mu_0(x). \tag{9}$$

În acest fel, orice soluție a ecuației (3) diferă de $\mu_0(x)$ numai printr-un factor constant.

Să analizăm acum ecuația neomogenă a problemei N_i (ecuația (1.8)). În virtutea teoremei lui Fredholm această ecuație are soluție,

atunci și numai atunci cînd funcția $\psi(x)$ este ortogonală pe toate soluțiile ecuației adjuncte omogene (1.7). Dar această ultimă ecuație are numai o soluție liniar independentă $\sigma_0(x) \equiv 1$. Astfel, pentru ca ecuația (1.8) să admită soluție, este necesar și suficient ca $(\psi, 1) = 0$ sau, mai explicit,

$$\int_\Gamma \psi(x) \, d_x\Gamma = 0. \tag{10}$$

Dacă ecuația (1.8) are soluție, atunci, evident, are soluție și problema N_i. Astfel, condiția (10) este suficientă pentru ca problema N_i să admită soluție și ajungem la următoarea concluzie: dacă suprafața Γ este Liapunov, funcția $\psi \in C(\Gamma)$ satisface condiția (10), atunci problema Neumann interioară admite soluție ce poate fi reprezentată sub forma unui potențial de simplu strat cu densitatea continuă. Amintim (vezi cap. 12, § 2) că (10) este o condiție necesară pentru ca problema Neumann interioară să aibă o soluție suficient de netedă.

A rămas de analizat ecuația integrală a problemei Dirichlet exterioară (ecuația (1.7)). Nu este greu să scriem acum condiția necesară și suficientă pentru ca aceasta să admită soluție:

$$(\varphi, \mu_0) = \int_\Gamma \varphi(x) \mu_0(x) \, d_x\Gamma = 0. \tag{11}$$

Dacă condiția (11) este satisfăcută, atunci ecuația integrală (1.7) are soluție. În acest caz problema Dirichlet exterioară are soluție ce poate fi reprezentată sub forma unui potențial de dublu strat și, prin urmare, descrește la infinit ca $|x|^{1-m}$.

Dacă condiția (11) nu este satisfăcută, atunci ecuația (1.7) nu are soluție. Aceasta nu înseamnă însă că problema Dirichlet exterioară nu este rezolvabilă; se poate numai afirma că această problemă nu are o soluție care să poată fi reprezentată sub forma unui potențial de dublu strat.

§ 5. REZOLVAREA PROBLEMEI DIRICHLET EXTERIOARĂ

Să plasăm originea coordonatelor în interiorul suprafeței Γ. Funcția $\frac{1}{|x|^{m-2}}$ este armonică în orice domeniu ce nu conține originea coordonatelor. În particular, această funcție este armonică

în Ω'. Vom căuta soluția problemei D_e sub forma

$$u(x) = \int_\Gamma \sigma(\xi)\, \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{m-2}}\, d_\xi\Gamma + \frac{1}{|x|^{m-2}} \int_\Gamma \sigma(\xi)\, d_\xi\Gamma. \tag{1}$$

Oricare ar fi funcția continuă $\sigma(\xi)$, partea dreaptă din formula (1) este o funcție armonică în Ω'; rămîne să alegem $\sigma(\xi)$ astfel încît să fie satisfăcută condiția la limită (1.1).

Repetînd raționamentele din § 1, obținem pentru funcția necunoscută $\sigma(x)$ ecuația integrală

$$\sigma(x) + \frac{2}{(m-2)|S_1|} \int_\Gamma \left[\frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{m-2}} + \frac{1}{|x|^{m-2}} \right] \sigma(\xi)\, d_\xi\Gamma =$$

$$= \frac{2}{(m-2)|S_1|}\, \varphi(x), \quad x \in \Gamma. \tag{2}$$

Nucleul ecuației (2)

$$\frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{m-2}} + \frac{1}{|x|^{m-2}},$$

ca și nucleul $\dfrac{\partial}{\partial \nu_\xi} \dfrac{1}{r^{m-2}}$, are singularitate slabă și deci acestei ecuații i se poate aplica teoria lui Fredholm.

Să analizăm ecuația integrală omogenă care se obține din ecuația (2) pentru $\varphi(x) \equiv 0$:

$$\sigma_0(x) + \frac{2}{(m-2)|S_1|} \int_\Gamma \left[\frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{m-2}} + \frac{1}{|x|^{m-2}} \right] \sigma_0(\xi) d_\xi\Gamma = 0. \tag{3}$$

Fie $\sigma_0 \in L_2(\Gamma)$ o soluție oarecare a ecuației (3). Ca și în § 1, se poate arăta că această soluție este continuă. Să considerăm funcția

$$u_0(x) = \int_\Gamma \sigma_0(\xi)\, \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{m-2}}\, d_\xi\Gamma + \frac{1}{|x|^{m-2}} \int_\Gamma \sigma_0(\xi)\, d_\xi\Gamma, \tag{4}$$

armonică în Ω'.

Din ecuația (3) rezultă că $u_0(x)|_\Gamma \equiv 0$; conform teoremei de unicitate pentru problema Dirichlet exterioară $u_0(x) \equiv 0$, $x \in \Omega$.

Avînd în vedere acest lucru, înmulțim expresia (4) cu $|x|^{m-2}$ și facem $|x| \to \infty$. Potențialul de dublu strat descrește la infinit ca $|x|^{1-m}$, deci la limită primul termen dispare și obținem

$$\int_\Gamma \sigma_0(\xi)\, d_\xi\Gamma = 0. \tag{5}$$

Astfel, orice soluție a ecuației (3) satisface relația (5). Dar atunci ecuația (3) se simplifică căpătînd forma

$$\sigma_0(x) + \frac{2}{(m-2)|S_1|} \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{m-2}}\, \sigma(\xi)\, d_\xi\Gamma = 0, \tag{6}$$

care coincide cu ecuația (5.2). După cum s-a arătat în § 4, ecuația (6) are numai o soluție liniar independentă, și anume pe 1. În acest caz soluția sa generală este $\sigma_0(\xi) \equiv C = \text{const}$. Înlocuind aceasta în (5), obținem $C(\Gamma) = 0$, adică $C = 0$. Atunci $\sigma_0(\xi) \equiv 0$ și ecuația (3) are numai soluție banală. În baza alternativei lui Fredholm, ecuația neomogenă (2) admite soluție pentru orice funcție continuă $\varphi(x)$. **Pe de altă parte, pentru orice funcție continuă pe frontieră $\varphi(x)$, problema Dirichlet exterioară are soluție ce poate fi reprezentată sub forma (1).**

Observații. 1. Studiul ecuațiilor integrale ale teoriei potențialului se complică întrucîtva cînd domeniul Ω (sau Ω') este mărginit nu de una, ci de mai multe suprafețe Liapunov închise. Rezultatele sînt întrucîtva diferite de cele obținute în cazul unei singure suprafețe frontieră. Aceste probleme sînt expuse amănunțit în [14].

2. Metoda potențialelor poate fi aplicată și altor probleme la limită. Să presupunem, de exemplu, că se cere să se găsească funcția $u(x)$ armonică fie în interiorul, fie în exteriorul unei suprafețe regulate închise Γ și care să satisfacă condiția la limită

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(x) u \right]_\Gamma = \omega(x), \tag{7}$$

unde $\beta(x)$ și $\omega(x)$ sînt funcții continue pe Γ, n este normala exterioară la Γ în punctul $x \in \Gamma$. Această problemă se numește adesea *a treia problemă la limită*. Vom căuta soluția ei sub forma unui potențial de simplu strat

$$u(x) = \int_\Gamma \mu(\xi)\, \frac{1}{r^{m-2}}\, d_\xi\Gamma. \tag{8}$$

Aplicînd teorema cu privire la valorile limită ale derivatelor normale ale potențialului (8), obținem pentru $\mu(\xi)$ ecuația integrală cu singularitate slabă

$$\mu(x) \pm \frac{2}{(m-2)|S_1|} \int_\Gamma \left[\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} + \frac{\beta(x)}{r^{m-2}} \right] \mu(\xi) d_\xi\Gamma = \pm \frac{2}{(m-2)|S_1|}\, \omega(x), \quad x \in \Gamma. \tag{9}$$

Semnul plus corespunde problemei interioare, semnul minus celei exterioare.

Dacă problema omogenă (7) pentru funcții armonice admite numai o soluție, atunci ecuația (9) are soluție pentru orice $\omega(x)$, adică problema inițială are soluție. Dacă soluția nu este unică (adică dacă problema omogenă (7) are k funcții proprii liniar independente), atunci soluția problemei inițiale există, dacă și numai dacă $\omega(x)$ satisface k condiții de ortogonalitate. Conform teoremei lui Fredholm, numărul k este finit. Problema interioară (exterioară) (7) pentru funcții armonice are soluție unică dacă $\beta(x) \geqslant 0$ și $\beta(x) > 0$ pe o mulțime de măsură pozitivă pe Γ (resp. $\beta(x) \leqslant 0$ și $\beta(x) < 0$ pe o mulțime de măsură pozitivă pe Γ). Să se demonstreze acest lucru!

§ 6. CAZUL A DOUĂ VARIABILE INDEPENDENTE

Dacă $m = 2$, atunci soluția fundamentală a ecuației lui Laplace este (abstracție făcînd de o constantă) funcția $\ln \frac{1}{r}$, $r = |\xi - x|$. Atunci potențialele de simplu și dublu strat în plan se definesc prin

$$V(x) = \int_\Gamma \mu(\xi) \ln \frac{1}{r} \, d_\xi \Gamma \tag{1}$$

și

$$W(x) = \int_\Gamma \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} \, d_\xi \Gamma; \tag{2}$$

despre Γ presupunem că reprezintă o curbă Liapunov închisă. Inegalitatea (2.6) devine

$$\int_\Gamma \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} \right| d_\xi \Gamma \leqslant C = \text{const.} \tag{3}$$

Densitățile $\sigma(\xi)$ și $\mu(\xi)$ le vom presupune continue.

Mărimile (1) și (2) sînt denumite și *potențiale logaritmice*. Potențialul logaritmic de dublu strat este armonic atît în interiorul, cît și în exteriorul lui Γ; la infinit el are estimarea $O(|x|^{-1})$. Potențialul logaritmic de simplu strat este armonic în interiorul lui Γ; în exteriorul lui Γ acesta (spre deosebire de cazul $m > 2$), nu este în general armonic: o funcție armonică într-un domeniu nemărginit din plan trebuie să fie mărginită la infinit, iar potențialul de simplu strat în general crește la infinit ca $\ln |x|$.

Pentru potențialele (1) și (2) au loc teoreme analoage (dar nu întotdeauna identice) teoremelor demonstrate pentru cazul $m > 2$: potențialul de simplu strat este continuu în tot planul, exceptînd,

eventual, punctul de la infinit; la limită, pentru potențialul de dublu strat, au loc relațiile următoare

$$W_i(x) = -\pi\sigma(x) + \overline{W(x)}, \quad W_e(x) = \pi\sigma(x) + \overline{W(x)} \tag{4}$$

și pentru derivata normală a potențialului de simplu strat

$$\frac{\partial V(x)}{\partial n_i} = \pi\mu(x) + \overline{\frac{\partial V(x)}{\partial n}}, \quad \frac{\partial V(x)}{\partial n_e} = -\pi\mu(x) + \overline{\frac{\partial V(x)}{\partial n}}. \tag{5}$$

Integrala Gauss se calculează după formula

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} \, d_\xi \Gamma = \begin{cases} -2\pi, & x \text{ interior lui } \Gamma, \\ 0, & x \text{ exterior lui } \Gamma, \\ \pi, & x \in \Gamma. \end{cases} \tag{6}$$

Problemele Dirichlet și Neumann se formulează ca de obicei: păstrăm notațiile $\varphi(x)$ și $\psi(x)$ pentru funcțiile date în aceste probleme. Este important de menționat faptul că pentru $m = 2$ problema Neumann exterioară N_e prezintă unele particularități. Teorema de unicitate pentru problema N_e se formulează în acest caz la fel ca și pentru problema N_i: orice două soluții ale acestei probleme pot să difere numai printr-un termen constant. Este adevărată și reciproca: două funcții armonice în exteriorul lui Γ, ce diferă numai printr-un termen constant, pot fi soluții numai pentru una și aceeași problemă N_e.

O altă particularitate a problemei N_e în plan este dată de următoarea lemă.

Lema 15.6.1. *Pentru ca problema N_e să aibă soluție în cazul $m = 2$ este necesar să avem*

$$\int_\Gamma \psi(x) dx = 0. \tag{7}$$

Să presupunem că problema N_e admite soluția $u(x)$. Descriem în jurul originei coordonatelor un cerc S_R, de rază R, astfel încît curba Γ să se găsească în interiorul lui S_R. Funcția $u(x)$ este armonică în exteriorul lui S_R și continuă în domeniul închis corespunzător, motiv pentru care are loc formula lui Poisson

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - R^2}{\rho^2 - 2R\rho\cos(\omega - \theta) + R^2} u(R, \omega) \, d\omega. \tag{8}$$

Această formulă se obține din formula (3.9) cap. 12 pentru $m = 2$, R, ω reprezentînd coordonatele polare ale punctului ξ, $u(R, \omega) = u(\xi)$, ρ, θ fiind coordonatele polare ale punctului x și $\rho > R$.

Să derivăm formula (8) în raport cu coordonatele carteziene ale punctului x. Acest lucru se face cel mai simplu astfel. Punem $z = x_1 + ix_2$, $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$, unde x_1, x_2 și ξ_1, ξ_2 sînt coordonatele carteziene ale punctelor x și ξ. Atunci $z = \rho e^{i\theta}$, $\zeta = Re^{i\omega}$ și, după cum se poate verifica ușor,

$$\frac{\rho^2 - R^2}{\rho^2 - 2R\rho\cos(\omega - \theta) + R^2} = \operatorname{Re}\frac{z+\zeta}{z-\zeta};$$

de aici

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\rho^2 - R^2}{\rho^2 - 2R\rho\cos(\omega-\theta) + R^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\operatorname{Re}\frac{z+\zeta}{z-\zeta} =$$

$$= \operatorname{Re}\frac{\partial}{\partial z}\frac{z+\zeta}{z-\zeta} = -\operatorname{Re}\frac{2\zeta}{(z-\zeta)^2};$$

deci

$$\frac{du}{dx_1} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{3\pi} u(R, \omega)\operatorname{Re}\frac{\zeta}{(z-\zeta)^2}\,d\omega = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right).$$

În mod analog găsim că și $\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = O\left(\dfrac{1}{|x|^2}\right)$. Ultimele estimări sînt adevărate pentru $|x|$ suficient de mare.

Să scriem acum formula (2.7), cap. 12 pentru domeniul $\Omega'_{\bar R}$, mărginit de curbele Γ și $S_{\bar R}$, unde $\bar R > R$:

$$-\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\,d_x\Gamma + \int_{S_{\bar R}} \frac{\partial u}{\partial n}\,d_x S_{\bar R} = 0;$$

aici n este normala exterioară la Γ, respectiv la $S_{\bar R}$ în punctul x; în fața primei integrale s-a pus semnul minus deoarece normala n la Γ este interioară pentru domeniul $\Omega'_{\bar R}$. Ultima formulă poate fi scrisă sub forma

$$-\int_\Gamma \psi(x)\,d_x\Gamma + \int_{S_{\bar R}} \frac{\partial u}{\partial n}\,d_x S_{\bar R} = 0. \tag{9}$$

Din estimările obținute mai sus rezultă că pentru $\bar R$ suficient de mare pe cercul $S_{\bar R}$ avem

$$\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| = \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\cos(n, x_1) + \frac{\partial n}{\partial x_2}\cos(n, x_2)\right| \leqslant \frac{c}{\bar R^2}, \quad c = \text{const.}$$

Dar atunci

$$\left|\int_{S_{\bar R}} \frac{\partial u}{\partial n}\,d_x S_{\bar R}\right| \leqslant \frac{c}{\bar R^2}2\pi\bar R = \frac{2\pi c}{\bar R} \xrightarrow[\bar R\to\infty]{} 0;$$

făcînd în formula (9) $\bar R \to \infty$, obținem relația (7).

Ca și în cazul general, vom căuta soluția problemei Dirichlet sub forma unui potențial de dublu strat (2), iar soluția problemei Neumann — sub forma unui potențial de simplu strat (1). Aceasta conduce la ecuațiile integrale

$$\sigma(x) \mp \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \sigma(\xi)\frac{\partial}{\partial \nu}\ln\frac{1}{r}\,d_\xi\Gamma = \mp\frac{1}{\pi}\varphi(x) \tag{D}$$

pentru problema Dirichlet și

$$\mu(x) \mp \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r}\,d_\xi\Gamma = \pm\frac{1}{\pi}\psi(x) \tag{N}$$

pentru problema Neumann.

Nucleele acestor ecuații au singularitate slabă. În cazul dat este ușor de arătat că ele sînt mărginite dacă exponentul lui Liapunov $\alpha = 1$ și continuă dacă curba Γ are curbură continuă. Ca mai înainte, ecuațiile problemelor D_i și N_e, precum și ale problemelor D_e și N_i, formează perechi adjuncte. Mai jos presupunem că Γ este o curbă Liapunov.

Studiul ecuațiilor integrale (D) și (N) îl facem, bazîndu-ne pe următoarea lemă.

Lema 15.6.2. *Dacă ecuația integrală a problemei* N_e

$$\mu(x) - \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r}\,d_\xi\Gamma = -\frac{1}{\pi}\psi(x) \tag{10}$$

are soluție și $\psi(x)$ satisface egalitatea (7) *atunci potențialul de simplu strat* (1) *este soluția problemei* N_e.

Să presupunem că ecuația (10) admite soluție. Luînd această soluție ca densitate pentru potențialul (1), obținem funcția care satisface condiția la limită a problemei N_e și care este armonică peste tot în exteriorul lui Γ, cu excepția, eventual, a punctului de la infinit, unde această funcție poate fi nemărginită. Rămîne să arătăm că dacă condiția (7) este satisfăcută, atunci potențialul (1) este mărginit la infinit. Înmulțim ambele părți ale ecuației (10) cu $d_x\Gamma$ și integrăm pe Γ. Ținînd seama de condiția (7), obținem

$$\int_\Gamma \mu(x)\, d_x\Gamma - \frac{1}{\pi}\int_\Gamma\int_\Gamma \mu(\xi)\,\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r}\, d_\xi\Gamma\, d_x\Gamma = 0. \tag{11}$$

În integrala dublă permutăm pe x cu ξ; prin aceasta n se înlocuiește cu ν. Folosind a treia din egalitățile (6), găsim

$$\frac{1}{\pi}\int_\Gamma\int_\Gamma \mu(\xi)\,\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r}\, d_\xi\Gamma\, d_x\Gamma = \frac{1}{\pi}\int_\Gamma\int_\Gamma \mu(x)\,\frac{\partial}{\partial \nu}\ln\frac{1}{r}\, d_\xi\Gamma\, d_x\Gamma =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \mu(x)\left\{\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu}\ln\frac{1}{r}\, d_\xi\Gamma\right\} d_x\Gamma = -\int_\Gamma \mu(x)\, d_x\Gamma.$$

Astfel din egalitatea (11) rezultă

$$\int_\Gamma \mu(x)\, d_x\Gamma = 0. \tag{12}$$

În egalitatea (12) înlocuim pe x cu ξ, apoi o înmulțim cu $\ln|x|$ și adunăm cu egalitatea (1). În final obținem o nouă expresie pentru potențialul (1), și anume

$$V(x) = \int_\Gamma \mu(\xi)\ln\frac{|x|}{r}\, d_\xi\Gamma. \tag{13}$$

Pentru $|x| \to \infty$ integrala (13) este mărginită (ea tinde la zero).

Analiza ecuațiilor integrale (D) și (N) se face, de fapt, în același mod ca în §§ 3—5; schițăm pe scurt această analiză. Mai întîi arătăm că ecuația (10) a problemei N_e admite soluție pentru orice funcție continuă $\psi(x)$. Pe baza alternativei lui Fredholm, analizăm ecuația omogenă

$$\mu_0(x) - \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \mu_0(\xi)\,\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r}\, d_\xi\Gamma = 0. \tag{14}$$

Fie $\mu_0(x)$ o soluție oarecare a acesteia. Termenul liber al ecuației (14) este, evident, egal cu zero și satisface deci condiția (7), adică conform lemei 15.6.2, potențialul

$$V_0(x) = \int_\Gamma \mu_0(\xi)\ln\frac{1}{r}\, d_\xi\Gamma$$

este soluție a problemei N_e omogenă. Conform teoremei de unicitate pentru problema N_e, $V_0(x) \equiv C = \text{const}$, în exteriorul lui Γ. Fiind continuu în tot planul, potențialul $V_0(x) \equiv C$ și pe Γ. În sfîrșit, din teorema de unicitate pentru problema D_i rezultă că $V_0(x) \equiv C$ și în interiorul lui Γ. Dar atunci $\dfrac{\partial V_0(x)}{\partial n_i} = \dfrac{\partial V_0(x)}{\partial n_e} \equiv 0$ și din formula (5) rezultă că

$$\mu_0(x) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_i} - \frac{\partial V_0(x)}{\partial n_e}\right] \equiv 0.$$

Din lema 15.6.2. obținem că (7) este nu numai necesară, ci și *suficientă* pentru ca problema N_e în plan să aibă soluție.

Odată cu ecuația (10) are soluție și ecuația integrală adjunctă, corespunzătoare problemei D_i. De aici rezultă că și problema D_i are întotdeauna soluție în plan.

Studiul ecuațiilor integrale ale problemelor D_e și N_i se face la fel ca în cazul general și conduce la aceleași rezultate: condiția (7) este necesară și suficientă pentru ca problema N_i să aibă soluție; ecuația integrală omogenă a problemei D_e

$$\sigma_0(x) + \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \sigma_0(\zeta)\,\frac{\partial}{\partial \nu}\ln\frac{1}{r}\, d_\zeta\Gamma = 0 \tag{15}$$

are numai soluția constantă.

Soluția problemei D_e în plan se poate găsi sub forma sumei

$$u(x) = \int_\Gamma \sigma(\zeta)\,\frac{\partial}{\partial \nu}\ln\frac{1}{r}\, d_\zeta\Gamma + \int_\Gamma \sigma(\zeta)\, d_\zeta\Gamma. \tag{16}$$

Aceasta conduce la ecuația integrală

$$\sigma(x) + \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \left[\frac{\partial}{\partial \nu}\ln\frac{1}{r} + 1\right]\sigma(\zeta)\, d_\zeta\Gamma = \frac{1}{\pi}\varphi(x). \qquad (17)$$

Ca și în § 5, se arată că ecuația (17) are întotdeauna soluție.

§ 7. ECUAȚIILE TEORIEI POTENȚIALULUI PENTRU CERC

Fie Γ cercul $x_1^2 + x_2^2 = R^2$. Să calculăm nucleul potențialului de dublu strat în ipoteza că punctele $x(x_1, x_2)$ și $\xi(\xi_1, \xi_2)$ se găsesc pe acest cerc. Atunci

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\ln\frac{1}{r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \xi_1}\cos(\nu, \xi_1) - \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \xi_2}\cos(\nu, \xi_2) = -\frac{\cos(\nu, r)}{r}.$$

Pe cerc direcția ν coincide cu direcția razei ce trece prin punctul ξ. Din figura 21 este clar că (se notează $\sphericalangle(\nu, r) = \beta$)

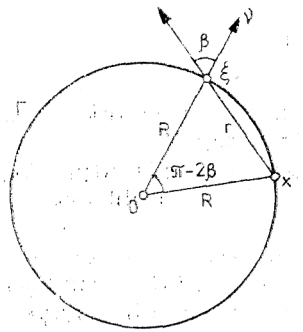

Fig. 21

$$r = 2R\sin\frac{\pi - 2\beta}{2} = 2R\cos\beta,$$

de unde

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\ln\frac{1}{r} = -\frac{1}{2R}; \quad x, \zeta \in \Gamma. \qquad (1)$$

Permutînd pe x cu ζ, obținem

$$\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r} = -\frac{1}{2R}; \quad x, \ \zeta \in \Gamma. \qquad (2)$$

Nucleele ecuațiilor (D) și (N) sînt degenerate și deci aceste ecuații se rezolvă în mod elementar.

Analizăm aici amănunțit ecuațiile problemelor interioare; rezolvarea ecuațiilor integrale ale problemelor exterioare o lăsăm pe seama cititorului. Notăm cu θ, respectiv ω, unghiurile pe care razele vectoare Ox și $O\xi$ le formează cu axa de coordonată x_1. Atunci $d_\xi\Gamma = Rd\omega$. Mai departe, funcția de variabilă $x \in \Gamma$ poate fi privită ca funcție de θ. De aceea vom scrie $\sigma(\theta)$ în loc de $\sigma(x)$ și așa mai departe.

Ecuația problemei Dirichlet interioară capătă forma

$$\sigma(\theta) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma(\omega)d\omega = -\frac{1}{\pi}\varphi(\theta). \qquad (3)$$

Notînd $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma(\omega)\,d\omega = c$, atunci $\sigma(\theta) + c = -\frac{1}{\pi}\varphi(\theta)$; integrînd, obținem $c = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\omega)d\omega$. Astfel, $\sigma(\theta) = \frac{1}{\pi}\varphi(\theta) - c$ și deci

$$u(x) = -\int_\Gamma\left[\frac{1}{\pi}\varphi(\omega) + c\right]\frac{\partial}{\partial \nu}\ln\frac{1}{r}\,d_\zeta\Gamma =$$

$$= -\frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\omega)\frac{\partial}{\partial \nu}\ln\frac{1}{r}d\omega - c\int_\Gamma\frac{\partial}{\partial \nu}\ln\frac{1}{r}d_\xi\Gamma.$$

Fie acum punctul x în interiorul cercului: conform formulei (6.6) avem

$$u(x) = -\frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\omega)\frac{\partial}{\partial \nu}\ln\frac{1}{r}d\omega + 2\pi c =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[2R\frac{\partial}{\partial \nu}\ln\frac{1}{r} - 1\right]\varphi(\omega)d\omega.$$

Dar

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\ln\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}[(\xi_1 - x_1)\cos(\nu, \xi_1) + (\xi_2 - x_2)\cos(\nu, \xi_2)] =$$

$$= -\frac{1}{r^2R}[(\xi_1 - x_1)\,\xi_1 + (\xi_2 + x_2)\,\xi_2] = -\frac{R^2(\xi_1x_1 + \xi_2x_2)}{r^2R}.$$

Avînd în vedere că

$$r^2 = (\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 = R^2 + \rho^2 - 2(\xi_1x_1 + \xi_2x_2), \quad \rho^2 = x_1^2 + x_2^2,$$

obținem

$$-\left[2R\frac{\partial}{\partial \nu}\ln\frac{1}{r}-1\right]=\frac{R^2-\rho^2}{r^2}$$

și, prin urmare,

$$u(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\omega)\frac{R^2-\rho^2}{r^2}\,d\omega. \tag{4}$$

Aceasta este cunoscuta formulă a lui Poisson pentru cerc.

Ecuația problemei N_i pentru cerc are forma

$$\mu(\theta)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mu(\omega)\,d\omega=\frac{1}{\pi}\psi(\theta). \tag{5}$$

Notînd

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mu(\omega)d\omega=c_1,$$

avem

$$\mu(\theta)-c_1=\frac{1}{\pi}\psi(\theta).$$

Integrînd această egalitate obținem condiția necesară cunoscută

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi(\theta)\,d\theta=0. \tag{6}$$

Constanta c_1 rămîne arbitrară. Dacă condiția (6) este satisfăcută, atunci soluția ecuației (5) are forma

$$\mu(\theta)=\frac{1}{\pi}\psi(\theta)+c_1;$$

soluția problemei N_i este dată de formula

$$u(x)=\frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(\omega)\ln\frac{1}{r}\,d\omega+c_1R\int_{-\pi}^{\pi}\ln\frac{1}{r}\,d\omega.$$

Nu este greu de demonstrat că a doua integrală este constantă, obținînd *formula lui Dini*

$$u(x)=\frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(\omega)\ln\frac{1}{r}\,d\omega+C,\quad C=\text{const}.$$

Capitolul 16

PROBLEMA DERIVATEI OBLICE

§ 1. FORMULAREA PROBLEMEI

Problemele la limită, analizate în capitolul precedent, satisfăceau proprietăți de tip Fredholm: fie aceste probleme admiteau o soluție și numai una singură (problemele D_i și D_e, problema N_e pentru $m>2$), fie nu avea loc teorema de unicitate, dar problema omogenă admitea un număr finit de soluții liniar independente, iar problema neomogenă admitea soluție, atunci și numai atunci cînd funcția limită dată satisfăcea un același număr finit de condiții de ortogonalitate (problema N_i, problema N_e pentru $m=2$). În acest capitol vom examina o nouă problemă la limită care, în general, nu este de tip Fredholm; aceasta este *problema derivatei oblice*.

Fie $\Omega\subset E_m$ un domeniu presupus mărginit și de frontieră Γ o suprafață Liapunov. Să considerăm o vecinătate a suprafeței Γ. Fiecărui punct x' din această vecinătate îi punem în corespondență o direcție $\lambda=\lambda(x')$; vom presupune că $\lambda'x')$ este o funcție continuă de x'. Formulăm următoarea problemă: să se găsească în Ω o soluție a ecuației eliptice

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+B_k\frac{\partial u}{\partial x_k}+Cu=f(x) \tag{1}$$

satisfăcînd condiția la limită

$$\lim_{x'\to x}\frac{\partial u(x')}{\partial\lambda}+\sigma(x)\,u(x)=\psi(x),\quad x\in\Gamma, \tag{2}$$

unde $\sigma(x)$ este o funcție dată pe Γ.

Problema (1) — (2) este așa-numita *problemă a derivatei oblice*. Dacă pe suprafața Γ cosinusurile directoare $\cos(\lambda, x_k)$ sînt proporționale cu mărimile $A_{jk}\cos(\nu, x_j)$, unde ν este normala la Γ, atunci această problemă coincide cu problema Neumann.

Problema derivatei oblice o vom rezolva în următoarele condiții mult mai particulare. Presupunem că Ω este un domeniu măr-

ginit, simplu conex din plan, raportat la coordonatele x_1, x_2, iar ecuația (1) este ecuația lui Laplace omogenă

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0. \tag{3}$$

Presupunem, de asemenea, că frontiera Γ a domeniului Ω este o curbă simplă, închisă, de curbură continuă. Domeniul Ω poate fi reprezentat conform pe cercul unitate. Transformarea conformă nu modifică ecuația (3) (vezi § 2, cap. 11); nu este dificil de arătat că în acest caz nici forma condiției la limită (2) nu se modifică. Avînd în vedere aceasta, vom considera în cele ce urmează că Ω este cercul

$$x_1^2 + x_2^2 < 1. \tag{4}$$

Vom folosi notațiile $x_1 + ix_2 = z = \rho e^{i\vartheta}$, $i = \sqrt{-1}$, $e^{i\vartheta} = t$; dacă $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ este un punct pe circumferința Γ a cercului (4), atunci vom scrie $\xi_1 + i\xi_2 = \zeta = e^{i\omega}$. Mai departe, dacă $g(x)$ este o funcție oarecare de punctul $x = (x_1, x_2) \in \Gamma$ și $t = x_1 + ix_2$, atunci vom scrie direct $g(t)$ în loc de $g(x)$.

Condiția la limită (2) poate fi scrisă sub forma

$$\cos \lambda(t) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \sin \lambda(t) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \sigma(t)\, u = \psi(t), \tag{5}$$

unde semnul limitei a fost omis.

Aici $\lambda(t)$ reprezintă unghiul dintre direcția λ din condiția la limită (2) și axa x_1. Formularea problemei impune că funcțiile $e^{i\lambda(t)}$, $\sigma(t)$, $\psi(t)$ sînt 2π-periodice în raport cu ϑ. Mai mult, vom presupune că $\sigma(t)$, $\psi(t) \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$, $0 < \alpha < 1$, iar $e^{i\lambda(t)} \in C^{(2)}(\Gamma)$.

§ 2. CAZUL A DOUĂ VARIABILE. INDEXUL PROBLEMEI

Analizînd problema derivatei oblice, vom căuta soluția ei de clasă $C^{(1)}(\bar{\Omega})$. Dacă o astfel de soluție există, atunci ea are o derivată normală continuă pe $\Gamma = \partial\Omega$; din rezultatele de la § 6, cap. 15 rezultă că soluția căutată admite o reprezentarea de forma unui potențial de simplu strat. Fie

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \mu(\zeta) \ln \frac{1}{r}\, d_\zeta\Gamma = \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \mu(\zeta) \ln \frac{1}{r}\, d\omega,$$

$$r = |\zeta - z|, \quad z \in \Omega; \tag{1}$$

am înlocuit aici cu $\frac{1}{\pi}\mu(\zeta)$ pe $\mu(\xi)$ din cap. 14 și 15. Funcția u reprezintă partea reală a funcției olomorfe în Ω

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \mu(\zeta) \ln \frac{1}{\zeta - z}\, d\omega. \tag{2}$$

Deci $f(z) = u(x_1, x_2) + iv(x_1, x_2)$ și să diferențiem egalitatea (2) în raport cu x_1. Ținînd seama de condiția Cauchy-Riemann $\frac{\partial v}{\partial x_1} = -\frac{\partial u}{\partial x_2}$, obținem

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} - i\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \mu(\zeta) \frac{d\omega}{\zeta - z} = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu(\zeta)}{\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in \Omega. \tag{3}$$

În relația (3) facem pe z să tindă la un punct t de pe circumferința Γ. Conform formulei Sohoțki-Plemelj (formulele (5.5) cap. 6) obținem

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} - i\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\mu(t)}{t} + \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \mu(\zeta)\frac{d\omega}{\zeta - t}, \quad t \in \Gamma. \tag{4}$$

Separăm părțile reale și imaginare, notînd $\zeta - t = re^{i\gamma}$; amintim, de asemenea, că $\zeta = e^{i\omega}$, $t = e^{i\vartheta}$ și că funcția $\mu(\zeta)$ este reală prin însăși definiția ei. Calcule simple conduc la

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \mu(t)\cos\vartheta + \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \mu(\zeta)\frac{\cos\gamma}{r}\, d\omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \mu(t)\sin\vartheta + \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \mu(\zeta)\frac{\sin\gamma}{r}\, d\omega.$$

Mai departe,

$$\frac{\cos\gamma}{r} = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\zeta - t}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\zeta - t} + \frac{1}{\bar{\zeta} - \bar{t}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\zeta - t} + \frac{1}{\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{t}}\right) = \frac{1}{2}\frac{1 - \zeta t}{\zeta - t}$$

şi prin urmare

$$\frac{\cos\gamma}{r}\,d\omega = \frac{1}{2i}\,\frac{1-\zeta t}{\zeta - t}\,\frac{d\zeta}{\zeta} = -\frac{\sin\vartheta}{\zeta - t}\,d\zeta - \frac{d\zeta}{2i\zeta t};$$

de aici

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \mu(t)\cos\vartheta - \frac{\sin\vartheta}{\pi}\int_\Gamma \mu(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta - t} - \frac{1}{2\pi i t}\int_\Gamma \frac{\mu(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta \qquad (5)$$

şi, analog,

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \mu(t)\sin\vartheta + \frac{\cos\vartheta}{\pi}\int_\Gamma \mu(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta - t} - \frac{1}{2\pi t}\int_\Gamma \frac{\mu(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta. \qquad (6)$$

Substituind (5) şi (6) în condiţia la limită (1.5), obţinem ecuaţia integrală singulară unidimensională pentru densitatea necunoscută μ ;

$$\cos(\lambda - \vartheta)\,\mu(t) + i\sin(\lambda - \vartheta)\,(S\mu)(t) -$$

$$-\frac{e^{i(\lambda+\vartheta)}}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta + \frac{\sigma(t)}{\pi}\int_\Gamma \mu(\zeta)\ln\frac{1}{r}\,d\omega = \psi(t); \qquad (7)$$

aici S este operatorul singular Cauchy :

$$(S\mu)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \mu(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta - t}.$$

Simbolul (vezi cap. 6, § 4 şi 7) ecuaţiei (7)

$$\cos(\lambda - \vartheta) + i\theta\sin(\lambda - \vartheta) = \begin{cases} e^{i(\lambda-\vartheta)}, & \theta = +1, \\ e^{-i(\lambda-\vartheta)}, & \theta = -1, \end{cases}$$

nu se anulează nicăieri. De aici rezultă că ecuaţia (7) este normal rezolvabilă în $L_2(\Gamma)$ şi are un index finit. Notînd acest index cu $\varkappa$, conform formulei (8.1) cap. 6, avem

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma d\ln e^{-2i(\lambda(t)-\vartheta)} = 2 - \frac{1}{\pi}[\lambda(t)]_\Gamma; \qquad (8)$$

unde $[\ ]_\Gamma$ semnifică creşterea mărimii scrisă între paranteze la parcurgerea conturului Γ în sens pozitiv. Menţionăm că indexul (8) este par.

§ 3. DESPRE CONTINUITATEA SOLUŢIILOR

Teoria ecuaţiilor integrale singulare, dezvoltată în cap. 6, permite să se tragă concluzii asupra soluţiilor acestor ecuaţii ce aparţin clasei $L_2(\Gamma)$. Pe de altă parte, considerentele de teoria potenţialului, pe care le-am folosit la începutul § 2, cer ca densitatea $\mu(t)$ să fie continuă. Să demonstrăm că în cazul ipotezelor făcute la sfîrşitul § 1, orice soluţie a ecuaţiei (2.7) ce aparţine clasei $L_2(\Gamma)$ satisface condiţia Lipschitz cu exponentul $\beta = \min\left(\alpha, \frac{1}{2}\right)$; în particular, această condiţie o satisface soluţia ecuaţiei omogene care se obţine prin înlocuirea funcţiei $\psi(t)$ cu zero.

Să aplicăm ambelor părţi ale ecuaţiei (2.7) regularizatorul (vezi § 7, cap. 6), care în cazul de faţă are forma

$$R = \cos(\lambda - \vartheta)\,I - i\sin(\lambda - \vartheta)\,S; \qquad (1)$$

aici I este operatorul identic. Atunci obţinem o ecuaţie de tip Fredholm pe care o satisfac toate soluţiile ecuaţiei (? 7),

$$\mu(t) = \frac{b(t)}{\pi}\int_\Gamma \frac{a(\zeta) - a(t)}{\zeta - t}\,\mu(\zeta)\,d\zeta -$$

$$-\frac{b(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{b(\zeta) - b(t)}{\zeta - t}\,(S\mu)(\zeta)\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta \times$$

$$\times R(e^{i(\lambda-\vartheta)})(t) - R\left(\frac{\sigma}{\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\zeta)\ln\frac{1}{r}\,d\omega\right)(t) + R(\psi)(t); \qquad (2)$$

aici, pentru simplitate, am notat $\cos(\lambda - \vartheta) = a(t)$, $\sin(\lambda - \vartheta) = b(t)$.

Conform teoremei lui Privalov (vezi § 5, cap. 6) funcţiile $R(\psi)(t)$ şi $R(e^{i(\lambda-\vartheta)})(t)$ satisfac condiţia Lipschitz cu exponentul α. În

ocntinuare, din teorema 7.6.2, care prin modificări naturale are loc și pentru integrale elementare, rezultă că funcția

$$\chi(t) = \frac{1}{\pi}\int_{\Gamma}\mu(\zeta)\ln\frac{1}{r}\,d\omega \tag{3}$$

are derivata generalizată

$$\frac{d\chi}{d\vartheta} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\zeta)\frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial\vartheta}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\zeta)\operatorname{ctg}\frac{\omega-\vartheta}{2}\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\Gamma}\frac{\mu(\zeta)}{\zeta-t}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\mu(\zeta)\,d\omega\,; \tag{4}$$

aici am folosit faptul că Γ este circumferință unitate și, prin urmare, $r = 2\left|\sin\frac{\omega-\vartheta}{2}\right|$.

Operatorul singular Cauchy acționează mărginit în $L_2(\Gamma)$ și formula (4) arată că $d\chi/d\vartheta \in L_2(\Gamma)$. De aici rezultă că $\chi \in \mathrm{Lip}_{1/2}(\Gamma)$. Într-adevăr, fie de exemplu $\vartheta_1 > \vartheta_2$ și $t_1 = e^{i\vartheta_1}$, $t_2 = e^{i\vartheta_2}$, atunci

$$|\chi(t_1) - \chi(t_2)| = \left|\int_{\vartheta_2}^{\vartheta_1}\frac{d\chi}{d\vartheta}\,d\vartheta\right| \leqslant$$

$$< \sqrt{\vartheta_1-\vartheta_2}\sqrt{\int_{\vartheta_2}^{\vartheta_1}\left|\frac{d\chi}{d\vartheta}\right|^2 d\vartheta} \leqslant \left\|\frac{d\chi}{d\vartheta}\right\|\sqrt{\vartheta_1-\vartheta_2}. \tag{5}$$

Dar $\sigma\chi \in \mathrm{Lip}_\beta(\Gamma)$; conform teoremei lui Privalov $R(\sigma\chi) \in \mathrm{Lip}_\beta(\Gamma)$. Din condiția $e^{i\lambda(t)} \in C^{(2)}(\Gamma)$ rezultă că nucleul $\frac{a(\zeta)-a(t)}{\zeta-t}$ are derivatele de ordinul întîi în raport cu t și ζ continue. De aici rezultă că produsul

$$b(t)\int_{\Gamma}\frac{a(\zeta)-a(t)}{\zeta-t}\mu(\zeta)\,d\zeta$$

este continuu diferențiabil în raport cu t și, prin urmare, aparține clasei $\mathrm{Lip}_1(\Gamma)$. În mod analog se studiază și a doua integrală din (2).

Astfel, fiecare termen din partea dreaptă a lui (2) aparține clasei Lipschitz cu unul dintre exponenții 1, α, β. În acest caz suma $\mu(t)$ aparține clasei Lipschitz cu cel mai mic dintre acești exponenți, adică clasei $\mathrm{Lip}_\beta(\Gamma)$.

Observație. Afirmația din acest paragraf poate fi întrucîtva întărită: orice soluție a ecuației (2.7) aparține clasei $\mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$. Într-adevăr, odată stabilit că $\mu \in \mathrm{Lip}_\beta(\Gamma)$, atunci, conform teoremei 7.6.1, derivata $d\chi/d\vartheta \in \mathrm{Lip}_\beta(\Gamma)$ și, mai mult, ea este mărginită, ceea ce arată că $\chi \in \mathrm{Lip}_1(\Gamma)$. Termenii din dreapta relației (2) aparțin deci claselor Lipschitz cu exponenții 1 și α, atunci $\mu \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$.

§ 4. UN CAZ PARTICULAR AL PROBLEMEI DERIVATEI OBLICE

Dacă în condițiile la limită (1.5), $\sigma(t) \equiv 0$, atunci problema derivatei oblice poate fi complet rezolvată. În locul ecuației (2.7) se obține ecuația mai simplă

$$\cos(\lambda - [\vartheta])\,\mu(t) + i\sin(\lambda - [\vartheta])\,(S\mu)(t) - \frac{e^{i(\lambda-\vartheta)}}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mu(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta = \psi(t). \tag{1}$$

Metoda pe care o folosim pentru rezolvarea ei a fost propusă pentru prima dată de Carleman în anul 1922, ulterior fiind frecvent folosită în teoria ecuațiilor integrale singulare unidimensionale.

Fie funcția de variabilă complexă

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mu(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta;$$

punctul z se poate găsi fie în interiorul, fie în exteriorul lui Γ. Ca și în cap. 6, vom nota funcția $F(z)$ cu $F_i(z)$ (resp. $F_e(z)$), dacă punctul z se găsește în interiorul (resp. în exteriorul) lui Γ; valorile la limită ale funcțiilor $F_i(z)$ și $F_e(z)$ pentru $z \to t \in \Gamma$ le vom desemna cu $F_i(t)$ și $F_e(t)$. Din formula (5.8) cap. 6 rezultă $\mu(t) = F_i(t) - F_e(t)$, $(S\mu)(t) = F_i(t) + F_e(t)$. Substituind aceasta în (1) ajungem la o nouă ecuație

$$F_i(t) - e^{-2i(\lambda-\vartheta)}F_e(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mu(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta = e^{-i(\lambda-\vartheta)}\psi(t). \tag{2}$$

Introducem noi funcţii analitice

$$G_i(z) = F_i(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mu(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta; \quad G_e(z)=F_e(z). \tag{3}$$

Evident, $G_i(z)$ este olomorfă în interiorul lui Γ iar $G_e(z)$ — în exteriorul lui Γ şi

$$G_i(0) = 0. \tag{4}$$

Ecuaţia (2) capătă forma mai simplă

$$G_i(t) - e^{-2i(\lambda-\vartheta)}G_e(t) = e^{-i(\lambda-\vartheta)}\psi(t). \tag{5}$$

Formula (2.8), care defineşte indexul problemei, arată în particular că

$$-2i(\lambda-\vartheta) = i\varkappa\vartheta + \lambda_0(t), \tag{6}$$

unde funcţia $\lambda_0(t)$ este univocă şi continuă pe Γ. Din ipoteza (vezi § 1) $e^{i\lambda(t)} \in C^{(2)}(\Gamma)$ rezultă că $\lambda_0 \in C^{(2)}(\Gamma)$. Notăm

$$\beta(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\lambda_0(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta; \quad z \notin \Gamma.$$

Conform formulelor lui Sohoţki-Plemelj $\beta_i(t) - \beta_e(t) = \lambda_0(t)$.

Fie acum

$$\Phi_i(z) = G_i(z)\,e^{-\beta_i(z)}, \quad \Phi_e(z)=G_e(z)\,e^{-\beta_e(z)}. \tag{7}$$

Înlocuind aceasta în (5) obţinem egalitatea

$$\Phi_i(t) - t^{\varkappa}\Phi_e(t) = \psi_1(t), \tag{8}$$

unde, pentru simplificare, s-a notat

$$\psi_1(t) = e^{-i(\lambda-\vartheta)+\beta_i(t)}\psi(t). \tag{9}$$

Să analizăm mai întîi ecuaţia omogenă

$$\Phi_i^{(0)}(t) - t^{\varkappa}\Phi_e^{(0)}(t) = 0; \tag{10}$$

vom nota cu exponentul zero, în general, mărimile care se referă la problema omogenă.

Ecuaţia (10) arată că funcţia $z^{\varkappa}\Phi_e^{(0)}(z)$ este prelungirea analitică a funcţiei $\Phi_i^{(0)}(z)$ în domeniul $|z|>1$. Cele ce urmează depind de valoarea lui $\varkappa$; presupunem de asemenea că $\Phi_e^{(0)}(\infty) = G_e^{(0)}(\infty) = F_e^{(0)}(\infty) = 0$.

a) Dacă $\varkappa \leqslant 0$, atunci funcţia $\Phi_i^{(0)}(z) = z^{\varkappa}\Phi_e^{(0)}(z)$ se anulează la infinit. Dar atunci această funcţie este olomorfă în tot planul complex. Conform teoremei lui Liouville, $\Phi_i^{(0)}(z) = \text{const}$ şi cum $\Phi_i^{(0)}(\infty) = 0$ rezultă că $\Phi_i^{(0)}(z) \equiv 0$. Totodată $\Phi_e^{(0)}(z) \equiv 0$ şi prin urmare $G_i^{(0)}(z) \equiv 0$, $G_e^{(0)}(z) \equiv 0$, sau

$$F_i^{(0)}(z) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mu_0(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta, \quad F_e^{(0)}(z) \equiv 0,$$

unde

$$\mu_0(t) = F_i^{(0)}(t) - F_e^{(0)}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mu_0(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta. \tag{11}$$

Ecuaţia (11) este satisfăcută de funcţia $\mu_0(t) = \text{const}$; ecuaţia nu are alte soluţii. Astfel, dacă $\varkappa \leqslant 0$, atunci problema omogenă a derivatei oblice are numai o singură soluţie liniar independentă; nu este greu de observat că această soluţie este $u(x_1, x_2) \equiv \text{const}$. Dimensiunea subspaţiului soluţiei problemei adjuncte, sau — ceea ce este acelaşi lucru — numărul condiţiilor de rezolvabilitate a problemei omogene a derivatei oblice, este egal cu $1 - \varkappa$.

b) Fie acum $\varkappa > 0$. Funcţia $\Phi_i^{(0)}(z) = z^{\varkappa}\Phi_e^{(0)}(z)$ este olomorfă în orice domeniu plan mărginit, iar la infinit nu creşte mai repede decît polinomul de gradul $\varkappa - 1$. Conform unei alte teoreme a lui Liouville, $\Phi_i^{(0)}(z)$ este un polinom de gradul $\leqslant \varkappa - 1$; subspaţiul acestor polinoame are dimensiunea $\varkappa$. Condiţia (4) arată că $\Phi_i^{(0)}(0) = 0$; aceasta înseamnă că polinomul amintit nu trebuie să aibă termen liber, ceea ce arată că dimensiunea subspaţiului funcţiilor $\Phi^{(0)}(z)$ este $\varkappa - 1$. Aceeaşi dimensiune are şi subspaţiul funcţiilor $G^{(0)}(z)$. Dacă aceste ultime funcţii au fost construite, atunci

$$F_i^{(0)}(z) = G_i^{(0)}(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mu_0(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta; \quad F_e^{(0)}(z) = G_e^{(0)}(z),$$

și conform formulelor Sohoțki-Plemelj

$$\mu_0(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu_0(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta = G_i^{(0)}(t) - G_e^{(0)}(t). \tag{12}$$

Înmulțind aceasta cu dt/t și integrînd pe Γ, obținem condiția necesară și suficientă de rezolvabilitate a ecuației (12):

$$\int_\Gamma \frac{G_i^{(0)}(t) - G_e^{(0)}(t)}{t}\,dt = 0. \tag{13}$$

În baza condiției (4), $G_i^{(0)}(t) = 0$ și, în plus, $G_e^{(0)}(\infty) = 0$. De aici rezultă că (13) este identic satisfăcută și deci ecuația (12) este rezolvabilă. Dimensiunea subspațiului funcțiilor μ_0 este evident mai mare cu o unitate decît dimensiunea subspațiului funcțiilor $G_i^{(0)}$, adică este egal cu $\varkappa$. Cu alte cuvinte, în cazul $\varkappa > 0$ problema omogenă a derivatei oblice are $\varkappa$ soluții liniar independente; nu avem condiția de rezolvabilitate.

Să revenim la ecuația (8) în legătură cu care trebuie să analizăm trei cazuri: $\varkappa = 0$, $\varkappa < 0$ și $\varkappa > 0$.

1) Dacă $\varkappa = 0$, atunci ecuația (8) capătă forma $\Phi_i(t) - \Phi_e(t) = \psi_1(t)$; conform formulelor Sohoțki-Plemelj, soluția ultimei ecuații este funcția

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\psi_1(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{14}$$

Ecuația omogenă (10) are în acest caz (vezi punctul a)) numai soluție banală și formula (14) dă în cazul analizat unica soluție a ecuației (8). Cunoscînd pe $\Phi(z)$, construim $G(z)$ după formula (7). Relațiile (4) și (7) dau condițiile necesare de rezolvabilitate a problemei: $\Phi_i(0) = 0$, sau

$$\int_\Gamma \frac{\psi_1(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta = 0. \tag{15}$$

Să presupunem că această condiție este îndeplinită. Conform formulei (3), obținem

$$F_i(z) = G_i(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta, \quad F_e(z) = G_e(z).$$

Formula $\mu(t) = F_i(t) - F_e(t)$ conduce pentru μ la ecuația integrală

$$\mu(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta = G_i(t) - G_e(t). \tag{16}$$

Ca și la punctul b), să arătăm că această ecuație este rezolvabilă. Astfel, pentru $\varkappa = 0$ condiția (15) este necesară și suficientă pentru rezolvabilitatea problemei derivatei oblice.

2) Fie acum $\varkappa < 0$. Să considerăm funcțiile $\widetilde{\Phi}_i(z)$ și $\widetilde{\Phi}_e(z)$, unde $\widetilde{\Phi}_i(z) = \Phi_i(z)$, $\widetilde{\Phi}_e(z) = z^\varkappa(\Phi_e(z)$. Evident că $\widetilde{\Phi}_i(z)$ este olomorfă în cercul $|z| < 1$, iar $\widetilde{\Phi}_e(z)$ — în exteriorul cercului $|z| > 1$, îndată ce $\widetilde{\Phi}_e(\infty) = 0$. Ecuația (8) conduce la

$$\widetilde{\Phi}_i(t) - \widetilde{\Phi}_e(t) = \psi_1(t),$$

a cărei soluție unică este, după cum am văzut, funcția

$$\widetilde{\Phi}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\psi_1(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \quad |z| \neq 1.$$

Astfel,

$$\Phi_i(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\psi_1(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \quad |z| < 1,$$

$$\Phi_e(z) = \frac{1}{2\pi i z^\varkappa}\int_\Gamma \frac{\psi_1(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \quad |z| > 1. \tag{17}$$

La infinit $\Phi_e(z)$ trebuie să aibă un zero cel puțin de ordinul întîi, ceea ce implică necesitatea condițiilor

$$\int_\Gamma \psi_1(\zeta)\,\zeta^k\,d\zeta = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, -\varkappa - 1. \tag{18}$$

Dacă aceste condiții sînt îndeplinite, atunci se pot construi funcțiile $\Phi_i(z)$, $\Phi_e(z)$, și apoi conform formulelor (7) — funcțiile $G_i(z)$ și $G_e(z)$. Condiția (4), ca și mai sus, conduce la condiția necesară (15); vom presupune că aceasta este îndeplinită. Mai departe, se construiesc

funcțiile $F_i(z)$ și $F_e(z)$ și pentru μ obținem din nou ecuația rezolvabilă (16).

Astfel, pentru $\varkappa < 0$ condițiile (15) și (18) sînt nu numai necesare, dar și suficiente pentru rezolvabilitatea problemei derivatei oblice. Numărul acestor condiții este egal cu $-\varkappa + 1$, iar numărul soluțiilor problemei omogene a derivatei oblice este egal cu unitatea.

3) A rămas să analizăm cazul $\varkappa > 0$. În acest caz vom căuta soluția particulară $\Phi^{(1)}(z)$ a ecuației (8) ca avînd la infinit estimarea $\Phi^{(1)}(z) = O(|z|^{-\varkappa-1})$. Punem $\hat{\Phi}_i(z) = \Phi_i^{(1)}(z)$, $\hat{\Phi}_e(z)\big|^- = z^{\varkappa}\Phi_e^{(1)}(z)$, atunci $\hat{\Phi}_e(z)$ are la infinit un zero de ordinul cel puțin unu și $\hat{\Phi}_i(t) - \hat{\Phi}_e(t)_+ = \psi_1(t)$. Soluția ultimei ecuații este

$$\hat{\Phi}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\psi_1(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta,$$

ceea ce conduce pentru ecuația (8) la soluția particulară

$$\Phi_i^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\psi_1(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta,$$

$$\Phi^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi i z^{\varkappa}}\int_\Gamma \frac{\psi_1(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta; \tag{19}$$

soluția generală o obținem adăugînd funcției (19) soluția generală a ecuației (10) (vezi punctul *b*)), subordonată condiției $\Phi_i(0) = 0$ care rezultă din (4). În acest caz, după cum s-a arătat deja la punctul b), nu avem condiții de rezolvabilitate, adică problema derivatei oblice este rezolvabilă pentru orice funcție $\psi(t)$, iar problema omogenă are $\varkappa$ soluții liniar independente.

§ 5. CAZUL MAI MULTOR VARIABILE

Vom prezenta pe scurt cazul cînd dimensiunea spațiului este $m > 2$. Pentru condiții suficient de largi (vezi [32]) există o soluție fundamentală a operatorului diferențial din partea stîngă a ecuației (1.1). Această soluție pentru $m > 2$ are forma

$$H(x, \xi) = \psi(x, \xi) + \psi_1(x, \xi), \tag{1}$$

unde

$$\psi(x, \xi) = \frac{1}{(m-2)|S_1|\sqrt{A(x)}}\left[C_{jk}(x)(x_j - \xi_j)(x_k - \xi_k)\right]^{-\frac{m-2}{2}}, \tag{2}$$

$A(x)$ fiind determinantul matricii coeficienților $A_{jk}(x)$, iar $C_{jk}(x)$ elementele matricii inverse corespunzătoare. Funcția ψ_1 are pentru $x = \xi$ o singularitate mai slabă decît funcția ψ. Să considerăm că frontierea Γ este suficient de netedă, că termenul liber din ecuația (1.1) este egală cu zero și că orice soluție a problemei, ce aparține clasei $C^{(1)}(\bar{\Omega})$, poate fi reprezentată sub forma „potențialului de simplu strat"

$$u(x) = \int_\Gamma H(x, \xi)\,\mu(\xi)\,d_\xi\Gamma. \tag{3}$$

În acest caz problema derivatei oblice se reduce la ecuația integrală singulară echivalentă

$$-\frac{\mu(x)}{2a^{(\lambda)}(x)} + \int_\Gamma \frac{\partial H}{\partial \lambda}\mu(\xi)d_\xi\Gamma + \\ + \sigma(x)\int_\Gamma H(x, \xi)\,\mu(\xi)\,d_\xi\Gamma = \psi(x), \quad x \in \Gamma, \tag{4}$$

unde, pentru simplificare, s-a notat

$$a^{(\lambda)}(x) = \frac{1}{\cos(\nu, \lambda)}A_{jk}(x)\cos(\nu, x_j)\cos(\nu, x_k),$$

ν fiind normala exterioară la Γ.

S-a reușit relativ ușor să se studieze cazul cînd direcția nu este tangentă la frontiera Γ. Acest caz a fost prima dată cercetat de G. Giraud în anul 1934; studiul său a fost întrucîtva simplificat de autorul prezentei cărți (vezi [29]). După cum s-a văzut, în acest caz problema derivatei oblice are proprietăți de tip Fredholm în $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, precum și în spațiile funcțiilor lipschitziene: în spațiile indicate această problemă este normal rezolvabilă și indexul ei este egal cu zero.

Dacă direcția de diferențiere este, cel puțin într-un punct, tangentă la frontiera domeniului, atunci în spațiile amintite mai sus problema derivatei oblice nu mai este de tip Fredholm și nici de tip Noether: ea sau nu este normal rezolvabilă și/sau indexul ei este infinit.

Capitolul 17

METODA VARIAȚIONALĂ. SOLUȚII SLABE

§1. PROBLEMA DIRICHLET CU CONDIȚII LA LIMITĂ OMOGENE

Să analizăm prima problemă la limită pentru ecuația eliptică de ordinul al doilea, ce va fi considerată în acest capitol formal autoadjunctă:

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+C(x)\,u=f(x),\quad x\in\Omega;\quad u|_{\partial\Omega}=\varphi(x).$$

Este natural să punem $u=u_1+u_2$, unde u_1 și u_2 sînt soluțiile următoarelor două probleme mai simple

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\,\frac{\partial u_1}{\partial x_k}\right)+C(x)\,u_1=f(x),\quad x\in\Omega;\quad u_1|_{\partial\Omega}=0,$$

și

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\,\frac{\partial u_2}{\partial x_k}\right)+C(x)\,u_2=0,\quad x\in\Omega;\quad u_2|_{\partial\Omega}=\varphi(x).$$

În paragraful de față vom analiza prima dintre aceste probleme — cea cu condiții la limită omogene; pentru cealaltă consacrăm §3.

Să formulăm condițiile pe care le impunem datelor problemei; aceste condiții vor juca un rol important în următoarele trei capitole. Fie

$$Lu=-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+C(x)\,u \tag{1}$$

o expresie diferențială ai cărei coeficienți sînt definiți într-un domeniu mărginit $\Omega\subset E_m$. Frontiera Γ a domeniului Ω va fi presupusă netedă pe porțiuni. Presupunem de asemenea că $A_{jk}\in C^1(\overline{\Omega})$, $C\in C(\overline{\Omega})$.

Expresia diferențială (1) va fi presupusă eliptică în domeniul închis $\overline{\Omega}$. În acest caz toate valorile proprii $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x),\ldots,\lambda_m(x)$ ale matricii coeficienților dominanți $A_{jk}(x)$ au în $\overline{\Omega}$ același semn. Schimbînd, dacă este necesar, semnul expresiei L, se poate întotdeauna presupune că $\lambda_k(x)>0$, $x\in\overline{\Omega}$.

Ecuația

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} & \ldots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda & \ldots & A_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mm}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

are coeficientul dominant $(-1)^m$ constant și diferit de zero; ceilalți coeficienți ai acestei ecuații sînt continui în $\overline{\Omega}$. De aici rezultă că rădăcinile $\lambda_k(x)$ ale acestei ecuații sînt funcții continue de x în $\overline{\Omega}$. Fiind pozitive pe mulțimea compactă $\overline{\Omega}$, ele sînt mărginite inferior de o anumită constantă pozitivă pe care o vom desemna prin μ_0,

$$\lambda_k(x)\geqslant\mu_0,\quad\forall x\in\overline{\Omega};\quad\mu_0=\text{const}>0. \tag{2}$$

Ecuația diferențială eliptică care satiface inegalitatea (2) se numește *nedegenerată* (sau uniform eliptică) în Ω.

Fie $t_1,t_2,\ldots,t_m$ numere reale arbitrare. Dacă $\lambda_1(x)$ este cea mai mică valoare proprie a matricii $\|A_{jk}\|_{j,k=1}^{j,k=m}$, atunci, după cum se știe, $A_{jk}(x)\,t_jt_k\geqslant\lambda_1(x)\sum_{k=1}^{m}t_k^2$. Pe baza inegalității (2), obținem

$$A_{jk}(x)\,t_jt_k\geqslant\mu_0\sum_{k=1}^{m}t_k^2, \tag{3}$$

care caracterizează de fapt expresia eliptică nedegenerată. Această inegalitate va juca un rol important în cele ce urmează.

Presupunem, de asemenea, că în expresia diferențială (1)

$$C(x)\geqslant 0,\quad\forall x\in\overline{\Omega}. \tag{4}$$

Să analizăm acum problema Dirichlet cu condiția la limită omogenă

$$Lu=-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+Cu=f(x), \tag{5}$$

$$u|_\Gamma=0. \tag{6}$$

Vom considera că $f\in L_2(\Omega)$ și vom căuta soluția problemei (5)—(6) de asemenea în $L_2(\Omega)$. Problema (5)—(6), ca orice problemă

la limită, generează un anumit operator, pe care îl desemnăm prin $\mathfrak{A}$, definit astfel:

$$\mathfrak{A}u = Lu = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + Cu;$$

domeniul său de definiție $D(\mathfrak{A})$ poate fi considerat mulțimea funcțiilor din $C^{(2)}(\overline{\Omega})$ ce satisfac condiția la limită (6). Este clar că $\mathfrak{A}$ poate fi privit ca un operator ce acționează în spațiul $L_2(\Omega)$.

Să demonstrăm acum că operatorul $\mathfrak{A}$ este *pozitiv definit* în $L_2(\Omega)$. Conform definiției (§2, cap. 4) este suficient să se verifice că:

1) mulțimea $D(\mathfrak{A})$ este densă în $L_2(\Omega)$;

2) operatorul $\mathfrak{A}$ este simetric, adică

$$(\mathfrak{A}u, v) = (u, \mathfrak{A}v);\quad u, v \in D(\mathfrak{A}); \tag{7}$$

3) operatorul $\mathfrak{A}$ satisface inegalitatea de pozitivă definire

$$(\mathfrak{A}u, u) \geqslant \gamma^2\|u\|^2;\quad \gamma^2 = \text{const} > 0. \tag{8}$$

Mulțimea $D(\mathfrak{A})$ este densă în $L_2(\Omega)$; aceasta rezultă imediat din corolarul 2.2.1, deoarece $D(\mathfrak{A})$ conține, evident, mulțimea tuturor funcțiilor finite în Ω.

Să arătăm simetria operatorului $\mathfrak{A}$. Fie $u, v \in D(\mathfrak{A})$. Aceasta înseamnă că $u, v \in C^{(2)}(\overline{\Omega})$ și

$$u|_\Gamma = v|_\Gamma = 0. \tag{9}$$

Să considerăm diferența

$$(\mathfrak{A}u, v) - (u, \mathfrak{A}v) = (Lu, v) - (u, Lv) = \int_\Omega (vLu - uLv)\,dx.$$

Aplicînd ultimei integrale a doua formulă Green (formula (6.6) cap. 9), obținem

$$(\mathfrak{A}u, v) - (u, \mathfrak{A}v) = -\int_\Gamma A_{jk}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_k} - u\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)\cos(\nu, x_j)\,d\Gamma.$$

În baza egalității (9) integrala din dreapta este egală cu zero.

Rămîne să demonstrăm inegalitatea (8). Avem

$$(\mathfrak{A}u, u) = (Lu, u) = -\int_\Omega u\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)dx + \int_\Omega Cu^2\,dx.$$

Aplicăm primei integrale prima formulă Green (formula (6.5) cap. 10). În baza condiției la limită (6), integrala de suprafață dispare și obținem

$$(\mathfrak{A}u, u) = \int_\Omega\left[A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2\right]dx. \tag{10}$$

Minorăm integrala (10). Mai întîi omitem termenul nenegativ Cu^2. Apoi, folosind inegalitatea (3), în care punem $t_k = \dfrac{\partial u}{\partial x_k}$, obținem

$$A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} \geqslant \mu_0\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2,$$

de unde

$$(\mathfrak{A}u, u) \geqslant \mu_0\int_\Omega\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx. \tag{11}$$

Pentru funcțiile $u \in D(\mathfrak{A})$ are loc evident inegalitatea lui Friedrich (vezi §6 cap. 3)

$$\int_\Omega u^2 dx \leqslant \varkappa\int_\Omega\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx,\quad \varkappa = \text{const} > 0,$$

și în final

$$(\mathfrak{A}u, u) \geqslant \frac{\mu_0}{\varkappa}\int_\Omega u^2\,dx = \frac{\mu_0}{\varkappa}\|u\|^2. \tag{12}$$

Inegalitatea (8) este astfel stabilită (cu valoarea constantă $\gamma^2 = \mu_0/\varkappa$).

O b s e r v a ț i e. Operatorul $\mathfrak{A}$ este pozitiv definit chiar dacă $C(x) \equiv 0$. Aceasta permite să slăbim întrucîtva condiția (4). Desemnăm prin $\mathfrak{A}_0$ acel operator ce se obține din $\mathfrak{A}$ pentru $C(x) \equiv 0$ și fie $\gamma_0^2 > 0$ marginea inferioară a operatorului $\mathfrak{A}_0$; atunci

$$(\mathfrak{A}_0 u, u) \geqslant \gamma_0^2\|u\|^2. \tag{13}$$

Evident, $\mathfrak{A}u = \mathfrak{A}_0 u + C(x)u$. Deci

$$(\mathfrak{A}u, u) = (\mathfrak{A}_0 u, u) + (Cu, u) \geqslant \gamma_0^2\|u\|^2 + (Cu, u). \tag{14}$$

Să presupunem că $C(x)$ satisface inegalitatea

$$C(x) \geqslant \varepsilon - \gamma_0^2, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \tag{15}$$

unde ε este o constantă pozitivă, atunci

$$(Cu, u) = \int_\Omega C(x)\, u^2(x)\, dx \geqslant (\varepsilon - \gamma_0^2) \int_\Omega u^2(x)\, dx = (\varepsilon - \gamma_0^2)\, \|u\|^2.$$

Înlocuind aceasta în (14), găsim că

$$(\mathfrak{A} u, u) \geqslant \varepsilon \|u\|^2.$$

și deci operatorul $\mathfrak{A}$ este pozitiv definit. Astfel condiția (4) poate fi înlocuită cu condiția mai slabă (15).

Astfel, în condițiile indicate operatorul $\mathfrak{A}$ al problemei Dirichlet (5)—(6) este pozitiv definit în $L_2(\Omega)$. Problema (5)—(6) poate fi scrisă sub forma unei ecuații operatoriale

$$\mathfrak{A}u = f; \tag{*}$$

deoarece $\mathfrak{A}$ acționează în $L_2(\Omega)$, este natural să presupunem că $f \in L_2(\Omega)$. Este ușor de înțeles că prin aceasta ecuația (*) nu este, în general, rezolvabilă : dacă $u \in D(\mathfrak{A})$, atunci este necesar ca $f \in C(\Omega)$. Dar $\mathfrak{A}$ este un operator pozitiv definit și conform celor demonstrate în §5, cap. 4, problema (5)—(6) are pentru orice funcție $f \in L_2(\Omega)$ o soluție generalizată și numai una $u_0 \in H_{\mathfrak{A}}$, unde $H_{\mathfrak{A}}$ este spațiul energetic al operatorului $\mathfrak{A}$. Această soluție generalizată realizează minimul funcționalei

$$F(u) = |u|_{\mathfrak{A}}^2 - 2(u, f) = \int_\Omega \left[A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2 - 2fu \right] dx \tag{16}$$

în cazul condițiilor la limită (6). Aplicînd în cazul dat relația generală (5.5a; cap. 4), deducem că soluția generalizată $u_0(x)$ a problemei Dirichlet poate fi definită ca acea funcție din $H_{\mathfrak{A}}$ ce satisface identitatea

$$[u_0, \eta]_{\mathfrak{A}} = (f, \eta); \quad \forall \eta \in H_{\mathfrak{A}}. \tag{17}$$

Soluția generalizată a problemei Dirichlet, care satisface identitatea (17), se numește *soluția slabă* a acestei probleme. O terminologie analoagă vom folosi și pentru alte probleme la limită (de exemplu, pentru problema Neumann; vezi mai jos §7—9). Dacă în domeniul considerat soluția slabă are toate derivatele generalizate de același ordin ca și ecuația, atunci aceasta se numește *soluția tare*.

Soluția slabă $u_0(x)$ a problemei Dirichlet poate fi reprezentată (vezi §5, cap. 4) sub forma seriei

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(x) \int_\Omega f(\xi)\, \omega_n(\xi)\, d\xi, \tag{18}$$

convergentă în metrica lui $H_{\mathfrak{A}}$; aici $\{\omega_n(x)\}$ reprezintă un șir complet și ortonormat din $H_{\mathfrak{A}}$.

Să analizăm un exemplu care va juca mai jos (vezi cap. 19) un rol important. Să presupunem că se cere să se rezolve problema Dirichlet pentru ecuația lui Laplace neomogenă

$$-\Delta u = f(x), \quad u|_{\partial \Pi} = 0 \tag{19}$$

în paralelipipedul II, dat prin inegalitățile

$$0 \leqslant x_k \leqslant a_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{20}$$

Pentru o funcție din clasa $D(\mathfrak{A})$ se poate ușor integra prin părți, obținînd formula

$$[u, v]_{\mathfrak{A}} = (\mathfrak{A}u, v) = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k}\, dx$$

și prin urmare

$$|u|_{\mathfrak{A}}^2 = (\mathfrak{A}u, u) = \int_\Pi \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx.$$

Este ușor de verificat că în cazul analizat sistemul de funcții

$$\frac{2^{m/2}}{\sqrt{|\Pi|}} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \frac{n_k^2}{a_k^2} \right\}^{-1/2} \prod_{k=1}^{m} \sin \frac{n_k \pi x_k}{a_k}, \quad n_k = 1, 2, 3, \ldots$$

este ortonormat și complet în $H_{\mathfrak{A}}$; aici $\Pi = a_1 a_2 \dots a_m$ este volumul paralelipipedului (20). Conform formulei (18) găsim soluția slabă a problemei (19):

$$u_0(x) = \frac{2m}{\pi^2 |\Pi|} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_m = 1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{n_k^2}{a_k^2} \right)^{-1} a_{n_1 n_2 \dots n_m} \prod_{k=1}^{m} \sin \frac{n_k \pi x_k}{a_k},$$

$$a_{n_1 n_2 \dots n_m} = \int_{\Pi} f(x) \prod_{k=1}^{m} \sin \frac{n_k \pi x_k}{a_k} \, dx. \tag{21}$$

Se deduce ușor că soluția (21) este o soluție tare, și anume $u_0 \in W_2^{(2)}(\Pi)$. Vom reveni la această problemă în cap. 19.

§ 2. SPAȚIUL ENERGETIC AL PROBLEMEI DIRICHLET

Teorema 17.2.1. *Spațiul energetic $H_{\mathfrak{A}}$ al operatorului problemei Dirichlet constă din și numai din acele elemente $u \in \overset{\circ}{W}_2^{(1)}(\Omega)$, pentru care există un șir $u_n \in D(\mathfrak{A})$, $n = 1, 2, \dots$, astfel încît*

$$\int_{\Omega} (u_n - u)^2 \, dx \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \quad \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx \xrightarrow[n \to \infty]{} 0. \tag{1}$$

În spațiul energetic $H_{\mathfrak{A}}$ produsul și norma se definesc respectiv prin

$$[u, v]_{\mathfrak{A}} = \int_{\Omega} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_k} + Cuv \right) dx, \tag{2}$$

$$|u_{\mathfrak{A}}^2| = \int_{\Omega} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2 \right) dx. \tag{3}$$

Normele în spațiile $H_{\mathfrak{A}}$ și $\overset{\circ}{W}_2^{(1)}(\Omega)$ sînt echivalente.

Pentru simplificarea calculelor dăm demonstrația în ipoteza $C(x) \geqslant 0$.

Fie $u \in H_{\mathfrak{A}}$. Funcția $u \in L_2(\Omega)$, ceea ce rezultă din teorema 4.3.1 în baza căreia spațiul energetic al unui operator pozitiv definit este scufundat în spațiul inițial.

Ca orice spațiu obținut prin completare, spațiul energetic $H_{\mathfrak{A}}$ constă din elementele „vechi" — în cazul dat mulțimea funcțiilor

din $D(\mathfrak{A})$ — și din elementele ideale. Dacă u este un element „vechi", atunci, evident, $u \in \overset{\circ}{W}_2^{(1)}(\Omega)$, și în acest caz prima condiție a teoremei este îndeplinită. Fie u și v elemente „vechi". Aplicînd prima formulă Green (formula (6.5) cap. 9) și ținînd seama de egalitatea (1.9), obținem

$$[u, v]_{\mathfrak{A}} = (\mathfrak{A}u, v) = \int_{\Omega} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_j} + Cuv \right) dx.$$

Dacă $A_{jk} = A_{kj}$, ultima integrală fiind cea din formula (2), ceea ce arată valabilitatea acesteia pentru elementele „vechi".

Punînd în (2) $v = u$ se observă că pentru elementele „vechi" are loc și formula (3).

Fie acum u un element ideal al spațiului $H_{\mathfrak{A}}$. Conform teoremei 4.3.2 există $u_n \in D(\mathfrak{A})$, astfel încît

$$\|u_n - u\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \quad |u_n - u_s| \xrightarrow[n,s \to \infty]{} 0. \tag{4}$$

A doua din relațiile (4) arată că

$$|u_n - u_s|^2 = (\mathfrak{A}(u_n - u_s), \; u_n - u_s) =$$

$$= \int_{\Omega} \left[A_{jk} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u_s}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u_s}{\partial x_k} \right) + C(u_n - u_s)^2 \right] dx \xrightarrow[n,s \to \infty]{} 0.$$

Din inegalitatea (1.11) rezultă atunci că

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u_s}{\partial x_k} \right)^2 dx = \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u_s}{\partial x_k} \right\|^2 \xrightarrow[n,s \to \infty]{} 0, \; k = 1, 2, \dots, m,$$

adică șirul derivatelor $\partial u_n / \partial x_k$, $n = 1, 2, \dots$, este un șir Cauchy în metrica lui $L_2(\Omega)$. De aici rezultă că există limita

$$v_k = \lim_{n \to \infty} \frac{\partial u_n}{\partial x_k}; \quad k = 1, 2, \dots, m; \quad v_k \in L_2(\Omega).$$

În baza primei relații (4), conform teoremei 2.5.1, $v_k = \partial u / \partial x_k$ și, prin urmare, $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$. Din existența șirului $\{u_n\}$ cu proprietățile (4) rezultă apoi $u \in \overset{\circ}{W}_2^{(1)}(\Omega)$.

Să arătăm că formulele (2) și (3) sînt adevărate pentru elementele ideale ale spațiului energetic. Fie u un element ideal, iar $u_n \in D(\mathfrak{A})$, $n = 1, 2, \ldots$, șirul ce satisface relația (4). Atunci $|u_n - u| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ și prin urmare

$$|u^2| = \lim_{n\to\infty} |u_n|^2_{\mathfrak{A}} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \left[A_{jk} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} + C u_n^2 \right] \mathrm{d}x. \qquad (5)$$

Să demonstrăm că ultima limită este egală cu

$$\int_\Omega \left[A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + C u^2 \right] \mathrm{d}x.$$

Pentru aceasta să evaluăm mărimea

$$J_n = \left| \int_\Omega \left[A_{jk} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + C(u_n^2 - u^2) \right] \mathrm{d}x \right|. \qquad (6)$$

Funcțiile $A_{jk}(x)$ și $C(x)$ fiind continue într-un domeniu închis sînt mărginite. Fie $|A_{jk}(x)| \leqslant M$, $|C(x)| \leqslant M$, $M = \text{const}$; atunci

$$J_n \leqslant M \int_\Omega \sum_{j,k=1}^m \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right| \mathrm{d}x + M \int_\Omega |u_n^2 - u^2| \, \mathrm{d}x. \qquad (7)$$

A doua integrală se evaluează astfel:

$$\int_\Omega |u_n^2 - u^2| \, \mathrm{d}x = \int_\Omega |u_n + u| \cdot |u_n - u| \mathrm{d}x \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_\Omega (u_n + u)^2 \, \mathrm{d}x \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_\Omega (u_n - u)^2 \, \mathrm{d}x \right\}^{1/2} = \|u_n + u\| \cdot \|u_n - u\|.$$

Al doilea factor tinde la zero, pe cînd primul are limită (egală cu $2\|u\|$) și deci este mărginit, ceea ce arată că al doilea termen în (7) tinde la zero.

În mod analog se evaluează și primul termen:

$$\int_\Omega \sum_{j,k=1}^m \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right| \mathrm{d}x =$$

$$= \int_\Omega \sum_{j,k=1}^m \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial u}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \right| \mathrm{d}x \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j,k=1}^m \left\{ \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\| + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\| \right\}.$$

În dreapta primii factori sînt mărginiți iar următorii tind la zero, deci toată expresia tinde la zero. În final,

$$|u|^2_{\mathfrak{A}} = \int_\Omega \left[A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + C u^2 \right] \mathrm{d}x,$$

și formula (3) are loc pentru elementele ideale ale spațiului energetic.

Dacă u și v sînt două astfel de elemente, atunci

$$[u, v]_{\mathfrak{A}} = \frac{1}{4} \{ |u + v|^2_{\mathfrak{A}} - |u - v|^2_{\mathfrak{A}} \}.$$

Înlocuind normele din dreapta conform formulei (3) și efectuind simplificările elementare, ajungem să arătăm că formula (2) are loc și pentru elementele ideale.

Rămîne să stabilim că pentru funcțiile spațiului $H_{\mathfrak{A}}$ normele (2) și (6.12) cap. 3 sînt echivalente. Fie $u \in H_{\mathfrak{A}}$. Din formulele (2) și (1.3) rezultă că

$$|u|^2_{\mathfrak{A}} \geqslant \mu_0 \int_\Omega \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 \mathrm{d}x.$$

Dar operatorul $\mathfrak{A}$ este pozitiv definit și de aceea

$$|u|^2_{\mathfrak{A}} \geqslant \gamma^2 \|u\|^2 = \gamma^2 \int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x;$$

însumînd, găsim

$$\|u\|_{\mathring{W}_2^{(1)}} \leqslant c\,|u|_{\mathfrak{A}}, \quad 2c^{-2} = \min(\mu_0, \gamma^2). \tag{8}$$

Cum s-a menționat, coeficienții A_{jk} sînt mărginiți, de aceea este mărginită și cea mai mare valoare proprie $\lambda_n(x)$ a matricii acestora. Fie M constanta introdusă mai sus, astfel încît $\lambda_n(x) \leqslant M$; atunci

$$|u|_{\mathfrak{A}} = \left\{\int_\Omega \left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2\right)\mathrm{d}x\right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{M}\left\{\int_\Omega \left[\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 + u^2\right]\mathrm{d}x\right\}^{1/2} = \sqrt{M}\|u\|_{\mathring{W}_2^{(1)}}. \tag{9}$$

Inegalitățile (8) și (9) arată că normele ce ne interesează sînt echivalente.

Să demonstrăm acum afirmația reciprocă : *dacă funcția* $u \in L_2(\Omega)$ *are derivatele generalizate* $(\partial u/\partial x_k) \in L_2(\Omega)$ *și dacă există un șir* $\{u_n\}$, $u_n \in D(\mathfrak{A})$, *care satisface condițiile* (1), *atunci* $u \in H_{\mathfrak{A}}$.

Mai întîi este evident că $u \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$. Totodată șirul $\{u_n\}$ este un șir Cauchy în metrica energetică. Într-adevăr,

$$|u_n - u_s|^2_{\mathfrak{A}} = \int_\Omega \left[A_{jk}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u_s}{\partial x_k}\right) + C(u_n - u_s)^2\right]\mathrm{d}x. \tag{10}$$

Coeficienții A_{jk} și C sînt mărginiți de constanta M. Să presupunem, ca mai înainte, că valorile caracteristice ale matricii coeficienților dominanți sînt mărginite de aceeași constantă. Atunci

$$|u_n - u_s|^2_{\mathfrak{A}} \leqslant M\int_\Omega \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u_s}{\partial x_k}\right)^2 \mathrm{d}x + M\int_\Omega (u_n - u_s)^2\,\mathrm{d}x,$$

care, în baza condițiilor (1), tinde la zero pentru $n, s \to \infty$.

Spațiul energetic este complet și deci există $w \in H_{\mathfrak{A}}$ astfel încît $|w - u_n|_{\mathfrak{A}} \to 0$. Prima relație (1) arată că $w = u$, prin urmare $u \in H_{\mathfrak{A}}$.

Teorema 17.2.2. *Soluția slabă a problemei Dirichlet* (1.5)—(1.6) *este de asemenea soluția generalizată local integrabilă a ecuației* (1.5).

Folosind (3), identitatea (1.17) devine

$$\int_\Omega \left(A_{jk}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\frac{\partial \eta}{\partial x_k} + Cu_0\eta - f\eta\right)\mathrm{d}x = 0; \quad \forall \eta \in H_{\mathfrak{A}}. \tag{11}$$

Evident, $\mathfrak{M}^2(\Omega) \subset H_{\mathfrak{A}}$; în identitatea (11) vom presupune $\eta \in \mathfrak{M}^2(\Omega)$. Atunci $(\partial\eta/\partial x_k) \in \mathfrak{M}^{(1)}(\Omega)$ și, conform definiției derivatei generalizate, avem

$$\int_\Omega A_{jk}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u_0\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\right)\mathrm{d}x.$$

Astfel, din identitatea (11) rezultă

$$\int_\Omega (u_0 L\eta - f\eta)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \forall \eta \in \mathfrak{M}^{(2)}(\Omega),$$

sau $(u_0, L\eta) = (f, \eta)$, $\forall \eta \in \mathfrak{M}^2(\Omega)$. Operatorul L este formal autoadjunct, iar ultima formulă coincide (pentru $s = 2$) cu formula (1.4) cap. 10, ce definește soluția generalizată local integrabilă a ecuației diferențiale.

Corolarul 17.2.1. *Soluția slabă a problemei* (1.5)—(1.6) *este soluția generalizată a ecuației* (1.5) *în sensul teoriei distribuțiilor.*

§ 3. PROBLEMA DIRICHLET PENTRU ECUAȚIA OMOGENĂ

Presupunem că domeniul Ω și coeficienții $A_{jk}(x)$, $C(x)$ satisfac condițiile din §1 și fie $\varphi(x)$ funcția dată pe suprafața Γ, frontiera domeniului Ω. Să analizăm în domeniul Ω problema Dirichlet pentru ecuația eliptică omogenă

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial v}{\partial x_k}\right) - Cv = 0 \tag{1}$$

pentru condiția la limită neomogenă

$$v|_\Gamma = \varphi(x). \tag{2}$$

Să presupunem problema de minim a funcționalei pătratice omogene

$$\Phi(v) = \int_{\Omega} \left[A_{jk} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_k} + Cv^2 \right] \mathrm{d}x \tag{3}$$

pe mulțimea $D(\Phi)$ a funcțiilor de clasă $W_2^{(1)}(\Omega)$ ce satisfac condiția la limită (2). Pentru ca această problemă să aibă soluție este necesar mai întîi ca mulțimea $D(\Phi)$ să fie netedă. Vom presupune de aceea că există cel puțin o funcție $\psi \in W_2^{(1)}(\Omega)$ astfel încît $\psi|_\Gamma = \varphi(x)$. Presupunerea formulată aici se numește *condiția de prelungire*; vom reveni asupra ei în §5.

Să modificăm acum problema formulată (2)—(3) în modul următor: prin faptul că funcția $v(x)$ satisface condiția la limită (2), vom înțelege

$$(v - \psi) \in H_{\mathfrak{A}}, \tag{4}$$

unde $H_{\mathfrak{A}}$ este spațiul energetic al problemei Dirichlet (2.5)—(2.6). Fie $v(x) - \psi(x) = u(x)$. Atunci $u \in H_{\mathfrak{A}}$ și $\Phi(v) = \Phi(u) + 2\Phi(u, \psi) + \Phi(\psi)$, unde $\Phi(u, \psi)$ este funcționala biliniară

$$\Phi(u, \psi) = \int_{\Omega} \left[A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + Cu\psi \right] \mathrm{d}x; \tag{5}$$

evident, $\Phi(u, \psi)$ este o funcțională liniară de u. Deoarece $\Phi(\psi)$ este o constantă, atunci este evident că problema variațională (2)—(3) este echivalentă cu următoarea problemă: să se găsească în spațiul $H_{\mathfrak{A}}$ funcția care realizează minimul funcționalei

$$\Phi(u) + 2\Phi(u, \psi). \tag{6}$$

Să arătăm că ultima problemă are soluție și că aceasta este unică. Din condițiile (1.3) și (1.4) rezultă că funcționala pătratică omogenă Φ este nenegativă și satisface inegalitatea Cauchy

$$|\Phi(u, \psi)| \leqslant \sqrt{\Phi(u)}\sqrt{\Phi(\psi)}. \tag{7}$$

Dacă $u \in H_{\mathfrak{A}}$, atunci $\sqrt{\Phi(u)} = |u|_{\mathfrak{A}}$ (formula (2.3)) și prin urmare

$$|\Phi(u, \psi)| \leqslant \sqrt{\Phi(\psi)}\,|u|_{\mathfrak{A}}. \tag{8}$$

Funcția ψ este fixată, de aceea $\sqrt{\Phi(\psi)}$ este o mărime constantă și deci inegalitatea (8) arată că funcționala $\Phi(u, \psi)$ este mărginită în $H_{\mathfrak{A}}$.

Din rezultatele §9, cap. 4 rezultă că problema de minim a funcționalei (6) are în spațiul $H_{\mathfrak{A}}$ o soluție și numai una singură. Notăm această soluție cu $u_0(x)$ și fie $v_0(x) = u_0(x) + \psi(x)$. Evident, funcția $v_0(x)$ rezolvă problema variațională (2)—(3).

Teorema 17.3.1. *Soluția problemei variaționale* (3)—(4) *este soluția generalizată local integrabilă a ecuației* (1).

Fie $\eta \in \mathfrak{M}^{(2)}(\Omega)$ și t un număr real arbitrar. Atunci $(v_0 + t\eta) \in D(\Phi)$ și de aceea $\Phi(v_0 + t\eta) \geqslant \Phi(v_0)$. Dar $\mathrm{d}\Phi(v_0 + t\eta)/\mathrm{d}t_{t=0} = 0$, sau

$$\int_{\Omega} \left(A_{jk} \frac{\partial v_0}{\partial x_j} \frac{\partial \eta}{\partial x_k} + Cv_0\eta \right) \mathrm{d}x = 0. \tag{9}$$

Funcția v_0 are în Ω derivate generalizate de ordinul întîi; conform definiției avem

$$\int_{\Omega} A_{jk} \frac{\partial v_0}{\partial x_j} \frac{\partial \eta}{\partial x_k} \mathrm{d}x = -\int_{\Omega} v_0 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right) \mathrm{d}x,$$

și deci

$$\int_{\Omega} v_0 \left[-\frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right) + C\eta \right] \mathrm{d}x = 0, \quad \forall \eta \in \mathfrak{M}^{(2)}(\Omega).$$

Astfel, v_0 este soluția generalizată, local integrabilă a ecuației (1) după definiția din §1, cap. 10.

Corolarul 17.3.1. *Dacă soluția problemei variaționale* (3)—(4) *are în* Ω *derivatele de ordinul al doilea continue, atunci ea satisface ecuația* (1) *în sens clasic.*

§ 4. DERIVATELE DE ORDINUL DOI ALE SOLUȚIEI SLABE A ECUAȚIEI LUI LAPLACE

Teorema 17.4.1. *Soluția slabă a problemei Dirichlet în domeniul mărginit* Ω *pentru ecuația lui Laplace omogenă, cu condiția la limită neomogenă, este o funcție armonică în* Ω.

Pentru ecuația lui Laplace $A_{jk} = \delta_{jk}$, $C = 0$, și identitatea (3.9) capătă forma

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_0}{\partial \xi_k} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_k} \mathrm{d}\xi = 0. \tag{1}$$

Am înlocuit aici pe x cu ξ.

Fie un punct arbitrar $x \in \Omega$ și să presupunem în egalitatea (1) $\eta = \omega_h(r)$, unde $r = |\xi - x|$, iar ω_h este nucleul de mediere (§1, cap. 2); raza de mediere h va fi luată mai mică decît distanța lui x la frontiera Γ a domeniului Ω și deci $\omega_h(r)|_\Gamma = 0$. Funcția $\omega_h(r)$ depinde numai de diferența $\xi - x$, de aceea

$$\frac{\partial \omega_h(r)}{\partial \xi_k} = -\frac{\partial \omega_h(r)}{\partial x_k}$$

și identitatea (1) poate fi reprezentată sub forma:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \int_\Omega \frac{\partial v_0}{\partial \xi_k} \omega_h(r)\, d\xi = 0.$$

Conform teoremei 2.4.1,

$$\int_\Omega \frac{\partial v_0}{\partial \xi_k} \omega_h(r)\, d\xi = \frac{\partial v_{0h}(x)}{\partial x_k}$$

și, prin urmare,

$$\Delta v_{0h} = 0. \tag{2}$$

Dacă $h \to 0$, atunci $v_{0h} \to v_0$ în metrica lui $L_2(\Omega)$ (teorema 2.2.3). Conform teoremei 11.8.2. funcția $v_0(x)$ este armonică în Ω.

Teorema 17.4.2. *Dacă $f \in L_2(\Omega)$ și $u_0(x)$ este soluția slabă a problemei*

$$-\Delta u = f(x), \quad u|_\Gamma = 0, \tag{3}$$

atunci $u \in W_2^{(2)}(\Omega')$, unde Ω' este orice subdomeniu interior lui Ω.

Fie potențialul de volum

$$\psi(x) = \frac{1}{(m-2)|S_1|} \int_\Omega f(\xi) \frac{1}{r^{m-2}}\, d\xi.$$

Din teorema 11.5.3 rezultă că $\psi \in W_2^{(2)}(\Omega)$ și $-\Delta\psi = f(x)$.

Funcția $u_0(x)$ rezolvă problema minimului funcționalei

$$F(u) = \int_\Omega \left[\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi_k} \right)^2 - 2f(\xi)\, u(\xi) \right] d\xi,$$

de aceea, dacă η este o funcție arbitrară din spațiul $H_{\mathfrak{A}}$, atunci $dF(u_0 + t\eta)\, |dt|_{t=0} = 0$, sau

$$\int_\Omega \left[\frac{\partial v_0}{\partial \xi_k} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_k} - f\eta \right] d\xi = 0, \quad \forall \eta \in H_{\mathfrak{A}}.$$

Efectuăm schimbarea $u_0 = v_0 + \psi$:

$$\int_\Omega \left[\frac{\partial v_0}{\partial \xi_k} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_k} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi_k} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_k} - f\eta \right] d\xi = 0. \tag{4}$$

În identitatea (4) punem $\eta = \omega_h(r)$, unde ω_h este nucleul de mediere, $r = |\xi - x|$, x este un punct din Ω și raza de mediere h este mai mică decît distanța punctului x la frontiera Γ a domeniului Ω. Integrînd prin părți, obținem

$$\int_\Omega \frac{\partial \psi}{\partial \xi_k} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_k} d\xi = -\int_\Omega \eta \Delta\psi\, d\xi + \int_\Omega \eta \frac{\partial \psi}{\partial \nu} d\Gamma = \int_\Omega f\eta\, d\xi;$$

integrala pe Γ, evident, dispare. Identitatea (4) capătă atunci forma

$$\int_\Omega \frac{\partial v_0}{\partial \xi_k} \frac{\partial \omega_h(r)}{\partial \xi_k} d\xi = 0.$$

Aceleași transformări, ca în teorema precedentă, conduc la $\Delta v_{0h} = 0$ și prin urmare funcția v_0 este armonică în Ω. Cu atît mai mult, $v_0 \in W_2^{(2)}(\Omega')$. Dar atunci și $u_0 = (v_0 + \psi) \in W_2^{(2)}(\Omega')$.

Din teoremele acestui paragraf rezultă următoarea afirmație: pentru ecuația lui Laplace, omogenă sau neomogenă, soluția slabă a problemei Dirichlet este totodată și soluție tare.

Observații. 1. Teorema 11.5.3. conduce de asemenea la concluzia: dacă în ecuația (3) funcția $f(x)$ satisface în $\overline{\Omega}$ condiția lui Lipschitz cu exponentul α, $0 < \alpha < 1$, atunci derivatele de ordinul al doilea ale soluției slabe $u_0(x)$ a problemei (3) satisfac aceeași condiție, cu același exponent, în orice subdomeniu interior închis $\overline{\Omega}'$.

2. De asemenea este valabilă următoarea afirmație: dacă $f \in L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, atunci funcția u_0 — soluția slabă a problemei (3) — are toate derivatele generalizate de ordinul al doilea $\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x_j\, \partial x_k} \in L_p(\Omega')$. Această afirmație rezultă din proprietățile potențialului de volum formulate în observațiile de la § 5 cap. 11.

§ 5. ASUPRA CONDIȚIEI DE PRELUNGIRE

Teorema 17.5.1. *Fie domeniul* $\Omega \subset E_m$ *mărginit de suprafața* $\Gamma \in C^{(1)}$. *Pentru ca funcția* $\psi \in W_2^{(1)}(\Omega)$, *care satisface condiția la limită* $\psi(x)|_\Gamma = \varphi(x)$, *să existe, este necesar și suficient ca* $\varphi \in W_2^{(1/2)}(\Gamma)$.

Dăm demonstrația pentru cazul $m = 2$, iar Ω este discul unitate $\rho < 1$; prin ρ și ϑ vom reprezenta coordonatele polare. În cazul general în care există o funcție ψ, ce îndeplinește condițiile teoremei, atunci există și o funcție armonică cu aceleași proprietăți. Într-adevăr, dacă ψ există, atunci problema variațională (3.3)—(3.4) are soluția slabă $r_0(x)$ aparținînd clasei $W_2^{(1)}(\Omega)$ și coincide cu $\varphi(x)$ pe frontiera Γ a domeniului; conform teoremei 17.4.1. această soluție salbă este armonică în Ω.

Pe circumferința Γ avem $\rho = 1$ și deci poziția punctului este dată de unghiul polar ϑ, motiv pentru care vom scrie $\varphi(\vartheta)$ în loc de $\varphi(x)$. Dezvoltăm pe $\varphi(\vartheta)$ în seria Fourier

$$\varphi(\vartheta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta). \tag{1}$$

Mai întîi să arătăm că condiția $\varphi \in W_2^{(1/2)}(\Gamma)$ este echivalentă cu următoarea:

$$B(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2) < \infty; \tag{2}$$

aceasta va conduce la

$$c_1[a_0^2 + B(\varphi)] \leqslant \|\varphi\|^2_{W_2^{1/2}} \leqslant c_2[a_0^2 + B(\varphi)], \tag{3}$$

unde c_1 și c_2 sînt constante pozitive. Pentru ca $\varphi \in W^{(\frac{1}{2})}(\Gamma)$ este necesar și suficient (vezi formulele (1.2) și (1.3) cap. 3) ca

$$J(\varphi) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[\varphi(\Theta) - \varphi(\vartheta)]^2}{(\Theta - \vartheta)^2}\, d\Theta\, d\vartheta < \infty.$$

Punînd $\Theta = \vartheta + h$ și folosind periodicitatea funcției φ, obținem

$$J(\varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{h^2} \left\{ \int_0^{2\pi} [\varphi(\vartheta + h) - \varphi(\vartheta)]^2\, d\vartheta \right\} dh. \tag{4}$$

Din dezvoltarea (1) obținem pentru $J(\varphi)$ expresia

$$J(\varphi) = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \frac{nh}{2}}{h^2}\, dh,$$

sau, dacă facem schimbarea $nh/2 = t$,

$$J(\varphi) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2) \int_0^{n\pi} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt.$$

Punînd

$$c' = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt, \quad c'' = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt = \pi,$$

obținem

$$2\pi c' B(\varphi) \leqslant J(\varphi) \leqslant 2\pi c'' B(\varphi); \tag{5}$$

inegalitatea (5) arată că condiția $\varphi \in W_2^{(1/2)}(\Gamma)$ și inegalitatea (2) sînt echivalente.

Norma în $W_2^{(1/2)}(\Gamma)$ poate fi introdusă conform formulei

$$\|\varphi\|^2_{W_2^{(1/2)}(\Gamma)} = \|\varphi\|^2_{L_2(\Gamma)} + J(\varphi); \tag{6}$$

această normă este evident echivalentă cu norma (1.3) cap. 3, dacă punem în ultima $p = 2$, $l = 0$, $\lambda = 1/2$. Formula (3) rezultă din (5) și (6).

Fie funcțiile

$$\varphi_n(\vartheta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta), \tag{7}$$

$$\psi_n(\rho, \vartheta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \rho^k (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta) \tag{8}$$

$$\psi(\rho, \vartheta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta) \tag{9}$$

Funcțiile φ_n sînt continue pe Γ, iar funcțiile $\psi_n(\rho, \vartheta)$ sînt armonice pentru $\rho < 1$ și satisfac condiția la limită $\psi_n(1, \vartheta) = \varphi_n(\vartheta)$.

Totodată este evident că $\psi_n \in W_2^{(1)}(\Omega)$, iar $\varphi_n(\vartheta)$, conform teoremei 3.3.2, poate fi privită ca valoarea $\psi_n(1, \vartheta)$. Această valoare o vom numi *urma funcțiilor* $\psi_n(\rho, \vartheta)$ pentru $\rho = 1$.

Nu este greu să stabilim că $\psi \in W_2^{(1)}(\Omega)$. Într-adevăr, pentru aceasta este necesar și suficient ca integrala Dirichlet

$$D(\psi) = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx_1\, dx_2 =$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta^2} \right)^2 \right] d\vartheta \right\} \rho\, d\rho.$$

să fie finită. Ultima integrală se calculează ușor, obținîndu-se

$$D(\psi) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2) = \pi B(\varphi), \tag{10}$$

de unde se vede că $D(\psi)$ este finită.

Ca element din $W_2^{(1)}(\Omega)$, funcția $\psi(\rho, \vartheta)$ are urma, pe care o notăm cu $\varphi_0(\vartheta)$. Conform teoremei 3.3.2 amintite mai sus, operatorul care asociază funcției urma sa, acționează mărginit din $W_2^{(1)}(\Omega)$ în $L_2(\Gamma)$. Prin urmare, există o constantă c, astfel încît

$$\| \varphi_n - \varphi_0 \|^2_{L_2(\Gamma)} \leqslant c \| \psi_n - \psi \|^2_{W_2^{(1)}} = cD(\psi - \psi_n) + c \| \psi - \psi_n \|^2_{L_2(\Omega)} =$$

$$= c\pi \sum_{k=n+1}^{\infty} k(a_k^2 + b_k^2) + \frac{c\pi}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{2k+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Totodată $\| \varphi_n - \varphi \|_{L_2(\Gamma)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. De aici $\varphi_0 \equiv \varphi$ și funcția $\varphi(\vartheta)$ satisface condiția de prelungire.

Reciproc, să presupunem că $\varphi(\vartheta)$ satisface condiția de prelungire: există o funcție armonică $\psi(\rho, \vartheta) \in W_2^{(1)}(\Omega)$ a cărei urmă $\psi(1, \vartheta) = \varphi(\vartheta)$. Conform teoremei 3.3.2, funcția $\varphi(\vartheta)$ este integrabilă de orice ordin și, în particular, $\varphi \in L_2(\Gamma)$. Scriem seria (9) pentru funcția $\psi(\rho, \vartheta)$ și definim funcțiile $\varphi_n(\vartheta)$ și $\psi_n(\rho, \vartheta)$ după formulele (7) și (8). De asemenea, punem

$$\varphi_0(\vartheta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta), \tag{11}$$

unde a_0, a_k, b_k sînt coeficienții seriei (9). Ca mai sus, găsim că $\| \varphi_n - \varphi_0 \|_{L_2(\Gamma)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ și $\| \varphi_n - \varphi \|_{L_2(\Gamma)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; de aici $\varphi_0 \equiv \varphi$. Din formula (10) rezultă că $B(\varphi) < \infty$ și, prin urmare, $\varphi \in W_2^{(1/2)}(\Gamma)$. Pentru cazul analizat teorema este astfel complet demonstrată.

§ 6. FUNCȚIA GREEN

Pentru claritate vom analiza problema Dirichlet pentru ecuația lui Laplace; vom presupune că domeniul Ω în care se construiește soluția este mărginit și are frontiera netedă pe porțiuni. Menționăm că funcția Green se poate construi și pentru ecuații mai generale, precum și pentru alte probleme la limită.

Să analizăm problema

$$-\Delta u = f(x), \quad x \in \Omega; \quad u|_{\partial\Omega} = 0; \quad f \in L_2(\Omega). \tag{1}$$

Ca și în paragrafele precedente, operatorul acestei probleme îl desemnăm cu $\mathfrak{A}$. După cum s-a arătat, $\mathfrak{A}$ este un operator pozitiv definit în spațiul $L_2(\Omega)$; dacă $\{\omega_n(x)\}$ este un sistem de funcții complet și ortonormat în spațiul energetic $H_{\mathfrak{A}}$, atunci (vezi §1) soluția slabă $u_0(x)$ a problemei (1) este dată de formula

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \omega_n)\, \omega_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(x) \int_{\Omega} f(\xi)\, \omega_n(\xi)\, d\xi. \tag{2}$$

Funcțiile de clasă $C^{(2)}(\bar{\Omega})$, care se anulează pe frontiera $\partial\Omega$, formează domeniul de definiție $D(\mathfrak{A})$ al operatorului $\mathfrak{A}$; de aici rezultă că mulțimea acestor funcții este densă în $H_{\mathfrak{A}}$ și funcțiile ω_n pot fi luate din mulțimea indicată. De aceea vom considera că $\omega_n \in C^{(2)}(\bar{\Omega})$ și, evident, $\omega_n(x) = 0$, $x \in \partial\Omega$.

Fie spațiul funcțiilor test $\mathscr{D}(\Omega) = \mathfrak{M}^{(\infty)}(\Omega)$ și spațiul corespunzător al distribuțiilor $\mathscr{D}'(\Omega)$. Să analizăm seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(\xi)\, \omega_n(x), \tag{3}$$

în care vom privi pe x ca parametru, iar ξ ca variabilă independentă.

Teorema 17.6.1. *Pentru orice $x \in \Omega$ fixat, seria* (3) *reprezintă un element din spațiul $\mathscr{D}'(\Omega)$ și care pentru orice funcție test acționează conform formulei* (2).

Fie $f \in \mathscr{D}(\Omega)$; cu atît mai mult $f \in L_2(\Omega)$ și seria (2) dă soluția problemei (1). Este suficient să demonstrăm că pentru orice $x \in \Omega$ fixat, suma acestei serii reprezintă o funcțională liniară continuă pe $\mathscr{D}(\Omega)$.

Soluția problemei (1) se poate construi în modul următor. Să considerăm potențialul de volum

$$\psi(x) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\int_\Omega f(\xi)\,\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi. \tag{4}$$

Densitatea $f(\xi)$ a acestui potențial este evident integrabilă de orice ordin și din teorema 11.5.2 rezultă că funcția $\psi(x)$ este continuă. Să arătăm că $\psi \in C^{(\infty)}(\Omega)$. Într-adevăr,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j} = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\int_\Omega f(\xi)\,\frac{\partial}{\partial x_j}\,\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi =$$

$$= -\frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\int_\Omega f(\xi)\,\frac{\partial}{\partial \xi_j}\,\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi;$$

integrînd prin părți și ținînd seama că f este finită în Ω, obținem

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j} = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \xi_j}\,\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi.$$

Astfel, derivata $\partial\psi/\partial x_j$ este un potențial de volum cu densitatea $\partial f/\partial \xi_j$ finită. Din raționamentele de mai sus rezultă că $(\partial\psi/\partial x_j) \in C^{(1)}(\overline{\Omega})$, sau $\psi \in C^{(2)}(\overline{\Omega})$ și deci

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j\,\partial x_k} = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\int_\Omega \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_j\,\partial \xi_k}\,\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi.$$

În mod analog găsim că pentru orice multiindice α avem $\psi \in C^{(|\alpha|)}(\Omega)$ și

$$D_x^\alpha \psi(x) = \int_\Omega \frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\int_\Omega D_\xi^\alpha f(\xi)\,\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi. \tag{5}$$

Afirmația a fost astfel demonstrată.

Fie acum $u_0(x) = \psi(x) - v(x)$, unde $u_0(x)$ este soluția slabă a problemei (1). Atunci $v(x)$ este soluția slabă a problemei $\Delta v = 0$, $(v - \psi) \in H^{\mathfrak{A}}$. Cum s-a demonstrat în §4, funcția v este armonică în Ω. Acum este clar că $u_0(x) \in C^{(\infty)}(\Omega)$; cu atît mai mult, această funcție este continuă în Ω și deci definită în fiecare punct $x \in \Omega$. Aceasta arată că seria (3), analizată pentru $x \in \Omega$ fixat, face să corespundă fiecărei funcții test un număr bine definit, și anume valoarea $u_0(x)$. Astfel, seria (3) pentru $x \in \Omega$ fixat definește o funcțională (evident, liniară) în $\mathscr{D}(\Omega)$.

Rămîne să demonstrăm că funcționala (3) este continuă în $\mathscr{D}(\Omega)$. Fie $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} f(x)$ și fie

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f_n, \omega_k)\omega_k(x),$$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\int_\Omega f_n(\xi)\,\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi,$$

$$v_n(x) = \psi_n(x) - u_n(x).$$

Nucleul cu singularitate slabă r^{2-m} generează un operator mărginit în $C(\overline{\Omega})$ (teorema 1.3.1), deci $\psi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \psi(x)$ uniform și, cu atît mai mult, în fiecare punct al domeniului Ω. Dar funcția $v_n(x) - v(x)$ este soluția slabă a problemei $\Delta(v_n - v) = 0$, $[(v_n - v) - (\psi_n - \psi)] \in H_{\mathfrak{A}}$.

Să arătăm că $v_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} v(x)$, pentru orice $x \in \Omega$ fixat. Notăm $v_n - v = w$, $\psi_n - \psi = \varphi$, astfel încît avem $\Delta w = 0$, $(w - \varphi) \in H_{\mathfrak{A}}$. Atunci funcția $z = w - \varphi$ realizează minimul funcționalei (vezi §3) $\Phi(z) + 2\Phi(z, \varphi)$, unde Φ este integrala Dirichlet; funcția indicată satisface identitatea $[z, \eta]_{\mathfrak{A}} = -\Phi(\varphi, \eta)$ pentru orice $\eta \in H_{\mathfrak{A}}$. Punînd $\eta = z$, obținem $|z|^2_{\mathfrak{A}} = -\Phi(z, \varphi) \leqslant \sqrt{\Phi(z)}\,\sqrt{\Phi(\varphi)} = \sqrt{\Phi(\varphi)}\,|z|_{\mathfrak{A}}$, de unde rezultă că $|z|_{\mathfrak{A}} \leqslant \sqrt{\Phi(\varphi)}$ sau $\sqrt{\Phi(w-\varphi)} \leqslant \sqrt{\Phi(\varphi)}$. Notînd prin $\|\ \|$ norma în $L_2(\Omega)$, avem $\|w\| = \|z + \varphi\| \leqslant \|z\| + \|\varphi\|$. Fie γ^2 marginea inferioară a operatorului $\mathfrak{A}$, atunci $\|z\| \leqslant \frac{1}{\gamma}\,|z|_{\mathfrak{A}} \leqslant \frac{1}{\gamma}\sqrt{\Phi(\varphi)}$ și $\|w\| \leqslant \frac{1}{\gamma}\sqrt{\Phi(\varphi)} + \|\varphi\|$. Funcția w este armonică în Ω și de aceea dacă δ este distanța de la x la $\partial\Omega$ și raza de mediere $h < \delta/2$, atunci (vezi §6, cap. 11)

$$w(x) = w_h(x) = \int_\Omega w(\xi)\,\omega_h(r)\,d\xi.$$

Presupunînd punctul x și raza h fixate, obținem

$$|w(x)| \leqslant c\|w\| \leqslant c\left(\frac{1}{\gamma}\sqrt{\Phi(\varphi)} + \|\varphi\|\right);\ c = \text{const},$$

sau, înlocuind pe w și φ cu valorile lor,

$$|v_n(x) - v(x)| \leqslant c\left(\frac{1}{\gamma}\sqrt{\Phi(\psi_n - \psi)} + \|\psi_n - \psi\| = \right.$$

$$= \frac{c}{\gamma}\left\{\int_\Omega \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial\xi_k} - \frac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\right)^2 \mathrm{d}\xi\right\}^{1/2} + c\left\{\int_\Omega (\psi_n - \psi)^2\,\mathrm{d}\xi\right\}^{1/2}.$$

Din formula (5) rezultă că membrul din dreapta ultimei relații tinde la zero pentru $n \to \infty$ și de aceea $v_n(x) \to v(x)$. Totodată, după cum am văzut mai sus, $\psi_n(x) \to \psi(x)$. Astfel,

$$u_n(x) = \psi_n(x) - v_n(x) \to \psi(x) - v(x) = u_0(x).$$

Distribuția (3) se numește *funcția Green* a problemei Dirichlet pentru ecuația lui Laplace în domeniul Ω. Funcția Green se notează de obicei cu $G(x, \xi)$:

$$G(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(\xi)\,\omega_n(x); \tag{6}$$

evident, funcția Green este simetrică

$$G(x, \xi) = G(\xi, x) \tag{7}$$

și egală cu zero pe frontiera domeniului:

$$G(x, \xi) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{8}$$

Să găsim ecuația diferențială pe care o satisface funcția Green. Fie $f(x)$ o funcție test arbitrară. Conform definiției derivatelor distribuțiilor, avem

$$(\Delta_\xi G(x, \xi),\ f(\xi)) = (G(x, \xi),\ \Delta_\xi f(\xi)).$$

Partea dreaptă a acestei egalități este o funcție de x al cărui laplaceian este egal cu $-\Delta f(x)$ și care se anulează pe $\partial\Omega$. Dar atunci această funcție este egală cu $-f(x) = (-\delta(x - \xi),\ f(\xi))$. În acest fel,

$$(\Delta_\xi G(x, \xi),\ f(\xi)) = (-\delta(x - \xi),\ f(\xi)), \quad \forall f \in D(\Omega)$$

și, prin urmare,

$$-\Delta_\xi G(x, \xi) = \delta(x - \xi). \tag{9}$$

De aici se observă că $G(x, \xi)$ este acea soluție fundamentală a operatorului $-\Delta$, care se anulează pe $\partial\Omega$.

Fie

$$G(x, \xi) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\left[\frac{1}{r^{m-2}} - g(x, \xi)\right]. \tag{10}$$

Funcția $g(x, \xi)$ reprezintă soluția generalizată a ecuației lui Laplace omogenă:

$$\Delta_\xi g(x, \xi) = 0; \tag{11}$$

de aceea

$$g(x, \xi) = \frac{1}{r^{m-2}}, \quad x \in \partial\Omega. \tag{12}$$

Funcția $g(x, \xi)$ este evident simetrică și deci

$$\Delta_x g(x, \xi) = 0, \tag{13}$$

iar condiția la limită (12) are loc și pentru $\xi \in \partial\Omega$.

În §8, cap. 11 s-a arătat că soluția generalizată a ecuației lui Laplace omogenă într-un domeniu oarecare este o funcție armonică în acel domeniu. De aici rezultă că $g(x, \xi)$ poate fi definită ca funcția care pentru $\xi \in \Omega$ fixat este armonică în Ω relativ la x, iar pentru $x \in \Omega$ fixat este armonică în Ω relativ la ξ și satisface condiția la limită (12). Dacă $\partial\Omega$ este o suprafață Liapunov, atunci funcția $g(x, \xi)$ poate fi construită (vezi cap. 15) ca un potențial de dublu strat a cărui densitate satisface ecuația integrală corespunzătoare. Dacă Ω are frontiera netedă pe porțiuni, atunci $g(x, \xi)$ poate fi găsită ca soluția slabă a problemei (12)—(13). O astfel de soluție există: în particular, funcția $\psi \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ (vezi §3) poate fi luată ca produsul $r^{2-m}\eta(r/\varepsilon)$, unde ε este un număr pozitiv suficient de mic, iar $\eta \in C^\infty(0, \infty)$,

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 1, & t \geqslant 2. \end{cases}$$

După cum reiese din egalitatea (12), $g(x, \xi) > 0$, $x \in \partial\Omega$. Conform principiului de maxim $g(x, \xi) > 0$ peste tot în Ω. Extragem din domeniul Ω bila $r = |x - \xi| < \varepsilon$, de rază ε suficient de mică. În domeniul rămas funcţia Green $G(x, \xi)$ este armonică, deci pe porţiunea de frontieră $r = \varepsilon$ avem, evident, $G(x, \xi) > 0$, iar pe porţiunea rămasă $\partial\Omega$, $G(x, \xi) = 0$. Conform principiului de maxim $G(x, \xi) \geqslant 0$. De aici rezultă deci că $0 \leqslant g(x, \xi) \leqslant r^{2-m}$ şi, în sfîrşit,

$$0 \leqslant G(x, \xi) \leqslant \frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\,\frac{1}{r^{m-2}}. \tag{14}$$

De fapt, pentru sferă funcţia Green a fost construită deja. Anume, să analizăm funcţia $(R/|x|)^{m-2}/r'^{2-m}$ (vezi notaţia în §3, cap. 12). Această funcţie este armonică în Ω relativ la ξ şi, după cum s-a arătat în §3, cap. 12, coincide cu r^{2-m} dacă $\xi \in S_R$. De aici este clar că pentru bila de rază R

$$g(x, \xi) = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{m-2} \frac{1}{r'^{m-2}}. \tag{15}$$

şi prin urmare

$$G(x, \xi) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\left[\frac{1}{r^{m-2}} - \left(\frac{R}{|x|}\right)^{m-2}\frac{1}{r'^{m-2}}\right]. \tag{16}$$

În cazul dat nu este greu de verificat direct simetria funcţiei Green. Este suficient să se verifice că $g(x, \xi) = g(\xi, x)$, iar acest lucru, la rîndul său, se reduce la stabilirea identităţii $|x|^2\,|\xi - x'|^2 = |\xi|^2\,|x - \xi'|^2$, unde ξ' este conjugatul lui ξ în raport cu sfera S_R. Ultima identitate se reduce uşor la următoarea:

$$|x|^2(\xi, x') = |\xi|^2\,(\xi', x). \tag{17}$$

Dar $x' = x|x'|/|x|$, $\xi' = \xi|\xi'|/|\xi|$, şi ambele părţi ale identităţii (17) sînt egale cu $R^2(x, \xi)$.

Fie frontiera $\Gamma = \partial\Omega$ a domeniului Ω astfel încît, pentru $x \in \Omega$ fixat, funcţia $g(x, \xi) \in C^{(2)}(\bar{\Omega})$, şi fie funcţia $u \in C^{(2)}(\bar{\Omega})$ armonică în Ω. Conform formulei (6.10) cap. 9, obţinem că

$$0 = \int_\Gamma \left(u\,\frac{\partial g}{\partial \nu} - g\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) \mathrm{d}_\xi \Gamma.$$

Scăzînd aceasta din formula (3.5) cap. 11, care dă reprezentarea integrală a funcţiei armonice, obţinem

$$u(x) = \int_\Gamma u(\xi)\,\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \nu}\,\mathrm{d}_\xi \Gamma. \tag{18}$$

Formula (18) rezolvă problema Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace omogenă în cazul condiţiei la limită neomogene; valabilitatea acestei formule poate fi stabilită şi în condiţii mai generale decît cele indicate mai sus.

§ 7. PROBLEMA NEUMANN CU CONDIŢII LA LIMITĂ OMOGENE

Ca şi în §1, să analizăm ecuaţia eliptică formal autoadjunctă

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + C(x)\,u = f(x), \tag{1}$$

a cărei soluţie se caută în domeniul mărginit $\Omega \subset E_m$ cu frontiera Γ netedă pe porţiuni. Vom presupune că $A_{jk} \in C^{(1)}(\bar{\Omega})$, $C \in C(\bar{\Omega})$ şi că ecuaţia (1) este degenerată în $\bar{\Omega}$, adică pentru orice numere reale $t_1, t_2, \ldots, t_m$ are loc inegalitatea

$$A_{jk}(x)\,t_j t_k \geqslant \mu_0 \sum_{k=1}^{m} t_k^2, \tag{2}$$

unde μ_0 este o constantă pozitivă.

Pentru ecuaţia (1) punem condiţia la limită omogenă a problemei Neumann,

$$A_{jk}\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu, x_j)\big|_\Gamma = 0; \tag{3}$$

aici ν este normala exterioară la Γ. Operatorul generat de problema Neumann îl notăm cu $\mathfrak{N}$. Drept domeniul său de definiţie $D(\mathfrak{N})$ luăm mulţimea funcţiilor din $C^{(2)}(\bar{\Omega})$, ce satisface condiţia (3); în această mulţime operatorul $\mathfrak{N}$ acţionează conform formulei

$$\mathfrak{N}u = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + Cu.$$

Vom considera $\mathfrak{N}$ ca un operator în $L_2(\Omega)$ și să arătăm că el este simetric. Domeniul său de definiție este dens în $L_2(\Omega)$, deoarece acesta conține, evident, mulțimea funcțiilor finite, densă în $L_2(\Omega)$.

Considerăm produsul scalar

$$(\mathfrak{N}u, v) = -\int_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) dx + \int_{\Omega} Cuv\, dx; \quad u, v \in D(\mathfrak{N}).$$

Integrînd prin părți obținem

$$(\mathfrak{N}u, v) = -\int_{\Gamma} vA_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu, x_j)\, d\Gamma +$$

$$+\int_{\Omega} A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} Cuv\, dx.$$

În baza condiției la limită (3) prima integrală din dreapta se anulează, iar celelalte două sînt, evident, simetrice. Prin aceasta simetria operatorului $\mathfrak{N}$ este demonstrată. Totodată am obținut formula

$$(\mathfrak{N}u, v) = \int_{\Omega}\left[A_{jk}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} + Cuv\right] dx. \tag{4}$$

Punînd în aceasta $v = u$, obținem

$$(\mathfrak{N}u, u) = \int_{\Omega}\left[A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2\right] dx. \tag{5}$$

Este evident că

$$\int_{\Omega} A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} dx \geqslant \mu_0 \int_{\Omega}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx \geqslant 0,$$

și se obține ușor următoarea condiție suficientă pentru pozitiva definire a operatorului $\mathfrak{N}$

$$C(x) \geqslant C_0 = \text{const} > 0; \tag{6}$$

în acest caz,

$$(\mathfrak{N}u, u) \geqslant C_0 \int_{\Omega} u^2\, dx = C_0 \|u\|^2,$$

care reprezintă tocmai inegalitatea de pozitivă definire cu valoarea constantei $\gamma = \sqrt{C_0}$. Evident, pentru un astfel de $C(x)$ putem aplica teoria dezvoltată mai înainte și problema Neumann are deci o soluție slabă și numai una singură.

Fie acum $C(x) \equiv 0$, adică

$$\mathfrak{N}u = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) \tag{7}$$

și

$$(\mathfrak{N}u, u) = \int_{\Omega} A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} dx. \tag{8}$$

Condiția la limită (1.3) rămîne neschimbată.

În cazul analizat operatorul $\mathfrak{N}$ nu numai că nu este pozitiv definit, dar nici măcar strict pozitiv. Pentru a arăta acest lucru este suficient să analizăm funcția $u_0(x) \equiv 1$. Ea are toate derivatele și satisface condiția la limită (3); prin urmare, $u_0 \in D(\mathfrak{N})$; de asemenea este evident că $\|u_0\| > 0$. Totodată $(\mathfrak{N}u_0, u_0) = 0$, ceea ce ar fi imposibil dacă $\mathfrak{N}$ ar fi operator strict pozitiv.

Problema Neumann

$$\mathfrak{N}u = f, \tag{9}$$

sau într-o notație mai explicită

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(x), \qquad A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu, x_j)|_{\Gamma} = 0 \tag{9_1}$$

nu are soluție dacă funcția $f(x)$ nu satisface o anumită condiție pe care o prezentăm mai jos.

Să presupunem că problema (9) are soluția $u \in D(\mathfrak{N})$. Integrăm pe Ω ambele părți ale ecuației diferențiale (9_1). Integrînd prin părți și ținînd seama de condiția la limită (9_1), obținem condiția căutată

$$\int_{\Omega} f(x)\, dx = (f, 1) = 0. \tag{10}$$

Astfel, este indicat să analizăm ecuația (3) nu pentru $f \in L_2(\Omega)$ arbitrar, ci numai pentru acele f care aparțin subspațiului ortogonal la unitate. Acest spațiu îl vom desemna prin $\widetilde{L}_2(\Omega)$. Condiția obținută (10) permite și următoarea formulare: pentru $C(x) \equiv 0$ operatorul $\mathfrak{N}$ transformă orice funcție din $D(\mathfrak{N})$ într-o funcție din $\widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$. Pe de altă parte, dacă problema (9) are soluție, atunci ea nu este unică: dacă funcția $u_0(x)$ este soluție a problemei (9), atunci și funcția $u_0(x) + c$, unde c este o constantă arbitrară, este soluție. Alte soluții nu există. Într-adevăr, dacă $u_0(x)$ și $u_1(x)$ sînt două soluții ale problemei (9), atunci diferența $v(x) = u_0(x) - u_1(x)$ satisface ecuația omogenă $\mathfrak{N}v = 0$. Conform formulei (5), în care $C(x) \equiv 0$, avem $\int_\Omega A_{jk} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = 0$. Matricea coeficienților A_{jk} este pozitiv definită și de aceea este necesar ca $(\partial v/\partial x_k) \equiv 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, adică $v(x) \equiv$ const, ceea ce trebuia demonstrat.

Soluția problemei Neumann poate fi făcută unică dacă se cere ca ea să aparțină subspațiului $\widetilde{L}_2(\Omega)$ introdus mai sus, cînd constanta c se definește în mod unic. Ultima condiție poate fi formulată astfel: restrîngem operatorul $\mathfrak{N}$ schimbînd domeniul său de definiție $D(\mathfrak{N})$ prin domeniul mai restrîns $D(\mathfrak{N}) \cap \widetilde{L}_2(\Omega)$. Această restricție a operatorului dat o vom desemna prin $\mathfrak{N}_0$. Domeniul său de definiție este $D(\mathfrak{N}_0) = D(\mathfrak{N}) \cap \widetilde{L}_2(\Omega)$, iar domeniul său de valori, ca mai înainte, aparține lui $\widetilde{L}_2(\Omega)$. Astfel, atît domeniul de definiție, cît și domeniul de valori al operatorului $\mathfrak{N}_0$ aparține subspațiului $\widetilde{L}_2(\Omega)$. Dar atunci $\widetilde{L}_2(\Omega)$ poate fi privit ca spațiu în care acționează operatorul $\mathfrak{N}_0$. Vom presupune mai departe că domeniul Ω este reuniunea unui număr finit de domenii, fiecare stelat în raport cu o bilă. În această ipoteză să demonstrăm că în spațiul $\widetilde{L}_2(\Omega)$ operatorul $\mathfrak{N}_0$ este pozitiv definit. Într-adevăr, pentru acest operator formula (5) este evident adevărată avînd forma

$$(\mathfrak{N}_0 u, u) = \int_\Omega A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx. \tag{11}$$

Conform inegalității (2),

$$(\mathfrak{N}_0 u, u) \geqslant \mu_0 \int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx. \tag{12}$$

Să scriem inegalitatea lui Poincaré (§6, cap. 3).

$$\int_\Omega u^2 dx \leqslant C\left[\left(\int_\Omega u\, dx\right)^2 + \int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx\right].$$

Pentru funcțiile de clasă $\widetilde{L}_2(\Omega)$ prima integrală din dreapta se anulează și inegalitatea lui Poincaré capătă forma

$$\|u\|^2 = \int_\Omega u^2 dx \leqslant C \int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx.$$

Înlocuind aceasta în relația (12) obținem inegalitatea

$$(\mathfrak{N}_0 u, u) \geqslant \gamma^2 \|u\|^2; \quad \gamma^2 = \frac{\mu_0}{C}, \tag{13}$$

care arată că operatorul $\mathfrak{N}_0$ este pozitiv definit în $\widetilde{L}_2(\Omega)$. De aici rezultă că problema Neumann (9_1) are în $\widetilde{L}_2(\Omega)$ o soluție slabă și numai una singură dacă este îndeplinită condiția (10). Această soluție este, evident, un element al spațiului energetic corespunzător $H_{\mathfrak{N}_0}$. Repetînd raționamentele din §2, nu este greu de arătat că $H_{\mathfrak{N}_0}$ se scufundă în $W_2^{(1)}(\Omega)$ și că produsele energetice și norma în $H_{\mathfrak{N}_0}$ se definesc prin formulele

$$[u, v]_{\mathfrak{N}_0} = \int_\Omega A_{jk} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx, \quad |u|^2_{\mathfrak{N}_0} = \int_\Omega A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx.$$

Soluția slabă a problemei Neumann realizează minimul funcționalei

$$|u|^2_{\mathfrak{N}_0} - 2(u, f) = \int_\Omega \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} - 2uf\right) dx, \tag{14}$$

date în $H_{\mathfrak{N}_0}$. De asemenea este ușor de arătat că soluția slabă a problemei Neumann este soluția generalizată a ecuației diferențiale (9_1).

În continuare ne vom limita la ecuația lui Laplace

$$-\Delta u = f(x). \tag{15}$$

Condiția la limită capătă forma mai simplă

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma} = 0. \tag{16}$$

Ca mai înainte, se păstrează condiția ca

$$\int_{\Omega} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\Omega} u(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Ca și în cazul general, o soluție slabă $u_0(x)$ a problemei (15)—(16) există și ea realizează minimul funcționalei

$$F(u) = \int_{\Omega}\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 - 2uf\right]\mathrm{d}x;\ u \in H_{\mathfrak{R}_0}. \tag{17}$$

Dacă $\eta(x)$ este o funcție oarecare din $H_{\mathfrak{R}_0}$, atunci $F(u_0 + t\eta) \geqslant F(u_0)$ și $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)F(u_0 + t\eta)_{t=0} = 0$. Aceasta conduce la identitatea

$$\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_k}\frac{\partial \eta}{\partial x_k} - f\eta\right)\mathrm{d}x = 0,\quad \forall \eta \in H_{\mathfrak{R}_0}. \tag{18}$$

Identitatea (18) rămîne adevărată dacă înlocuim în ea pe η cu orice funcție de clasă $C^{(2)}(\bar{\Omega})$ satisfăcînd condiția (10). Într-adevăr, fie ζ o astfel de funcție și fie $\eta = \zeta - \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}\zeta\,\mathrm{d}x = \zeta - c$. Atunci $\eta \in D(\mathfrak{R}_0) \subset H_{\mathfrak{R}_0}$ și conform relațiilor (10) și (18)

$$\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_k}\frac{\partial \zeta}{\partial x_k} - f\zeta\right)\mathrm{d}x = \int_{\Omega}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_k}\frac{\partial \eta}{\partial x_k} - f\eta\right)\mathrm{d}x + c\int_{\Omega} f\,\mathrm{d}x = 0. \tag{19}$$

Teorema 17.7.1. *Dacă* $f \in \widetilde{L}_2(\Omega)$, *atunci* $u_0 \in W_2^{(2)}(\Omega')$ *pentru orice* Ω', *subdomeniu interior lui* Ω.

Fie potențialul de volum

$$\psi(x) = \frac{1}{(m-2)|S_1|}\int_{\Omega} f(\xi)\frac{1}{r^{m-2}}\,\mathrm{d}\xi;$$

după cum se știe, $\psi \in W_2^{(2)}(\Omega)$ și $-\Delta\psi = f(x)$. Fie $x \in \Omega'$ și h un număr pozitiv mai mic decît distanța cea mai mică dintre punctele frontierelor $\partial\Omega$ și $\partial\Omega'$. În identitatea (19) înlocuim pe x cu ξ, punem $\zeta = \omega_h(r)$, unde $r = |\xi - x|$ iar ω_h este nucleul de mediere și facem schimbarea $u_0 = \psi + v_0$. Prin transformări simple identitatea (19) capătă forma $\Delta v_{0h}(x) = 0$. Mai departe raționamentele se desfășoară ca în teorema 17.4.2, conducînd la același rezultat.

Pentru soluția slabă a problemei Neumann sînt valabile observațiile 1, 2 §4.

§ 8. PROBLEMA NEUMANN CU CONDIȚII LA LIMITĂ NEOMOGENE

Să analizăm problema

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = 0,\quad x \in \Omega; \tag{1}$$

$$\left[A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu, x_j)\right]\Gamma = h(x),\quad \Gamma = \partial\Omega. \tag{2}$$

Vom presupune că Ω este reuniunea unui număr finit de domenii stelate și că A_{jk} satisfac condițiile din §1. Presupunem de la început că problema (1)—(2) admite soluția $u_0 \in C^{(2)}(\bar{\Omega})$. Integrăm pe Ω identitatea $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u_0}{\partial x_k}\right) = 0$ și utilizăm formula lui Ostrogradski. Ținînd seama de (2), obținem condiția necesară de rezolvabilitate a problemei

$$\int_{\Gamma} h(x)\mathrm{d}\Gamma = 0. \tag{3}$$

Mai departe, dacă soluția $u_0(x)$ a problemei (1)—(2) există, atunci ea nu este unică : odată cu $u_0(x)$ și $u_0(x) + c$ este soluție, unde c este o constantă arbitrară. Pentru a obține unicitatea cerem să fie satisfăcută condiția

$$\int_{\Omega} u_0(x)\mathrm{d}x = 0. \tag{4}$$

Este ușor de arătat că dacă există soluția $u_0 \in C^{(2)}(\bar{\Omega})$, atunci $u_0(x)$ este de asemenea soluția problemei de minim pentru funcționala

$$F(u) = \int_\Omega A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} \, dx - 2 \int_\Gamma h(x) u(x) dx \qquad (5)$$

pe mulțimea funcțiilor din $C^{(1)}(\Omega)$, ce satisfac identitatea (4).

Să demonstrăm că și reciproca este adevărată: dacă funcția $u_0 \in C^{(2)}(\bar{\Omega})$ este soluție a problemei variaționale menționată, atunci aceasta este și soluție a problemei Neumann (1)—(2). Să presupunem că funcția $u_0(x)$ este soluția problemei variaționale specificate și fie $\eta(x)$ o funcție arbitrară de clasă $C^{(1)}(\bar{\Omega})$, ce satisface identitatea (4). Atunci pentru orice t real are loc inegalitatea $F(u_0 + t\eta) \geqslant F(u_0)$. De aici rezultă că $\frac{d}{dt} F(u_0 + t\eta)\Big|_{t=0} = 0$, sau

$$\int_\Omega A_{jk} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \frac{\partial u_0}{\partial x_k} dx - \int_\Gamma h(x) \eta(x) d\Gamma = 0.$$

Integrînd prin părți, obținem atunci

$$-\int_\Omega \eta \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial u_0}{\partial x_k} \right) dx + \int_\Gamma \eta \left[A_{jk} \frac{\partial u_0}{\partial x_k} \cos(\nu, x_j) - h \right] d\Gamma = \; . \qquad (6)$$

Fie $\zeta(x)$ o funcție arbitrară de clasă $C^{(1)}(\bar{\Omega})$. Fie $a = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \zeta(x) dx$. Funcția $\zeta(x) - a$ satisface condiția (4). Punînd în (6) $\eta(x) = \zeta(x) - a$, obținem

$$-\int_\Omega \zeta \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial u_0}{\partial x_k} \right) dx + \int_\Gamma \zeta \left[A_{jk} \frac{\partial u_0}{\partial x_k} \cos(\nu, x_j) - h \right] d\Gamma +$$

$$+ a \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial u_0}{\partial x_k} \right) dx - a \int_\Gamma \left[A_{jk} \frac{\partial u_0}{\partial x_k} \cos(\nu, x_j) - h \right] d\Gamma = 0.$$

aplicînd celei de a treia integrale formula lui Ostrogradski, în baza egalității (3) observăm că a treia și a patra integrală din sumă se

reduc, obținînd identitatea

$$-\int_\Omega \zeta \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) dx + \int_\Gamma \zeta \left[A_{jk} \frac{\partial u_0}{\partial x_k} \cos(\nu, x_j) - h \right] d\Gamma = 0,$$

$$\forall \zeta \in C^{(1)}(\bar{\Omega}). \qquad (7)$$

Înlocuim în (7) pe x cu ξ; fie $\zeta = \omega_{h_0}(r)$, $r = |\xi - x|$, unde $x \in \Omega$ și h_0 este mai mic decît distanța de la x la Γ. Identitatea (7) capătă forma $\left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \right]_{h_0} = 0$. Facem pe h_0 să tindă la zero. Funcția de medie este continuă și conform teoremei 2.2.1 avem $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial u_0}{\partial x_k} \right) = 0$. Astfel, funcția $u_0(x)$ — soluția problemei variaționale — satisface ecuația (1).

În (7) integrala de volum dispare, identitatea devenind:

$$\int_\Gamma \zeta(\xi) \left[A_{jk}(\xi) \frac{\partial u_0}{\partial \xi_k} \cos(\nu, x_j) - h(\xi) \right] d_\xi \Gamma = 0.$$

Alegem acum pe $x \in \Gamma$ astfel încît în acest punct, precum și într-o vecinătate a lui suprafața Γ să fie netedă și fie apoi $\zeta = \omega_{h_0}(r)$. Notăm cu Γ' porțiunea din Γ cuprinsă în bila $r < h_0$, obținem egalitatea

$$\int_\Gamma \omega_{h_0}(r) \left[A_{jk}(\xi) \frac{\partial u_0}{\partial \xi_k} \cos(\nu, x_j) - h(\xi) \right] d_\xi \Gamma = 0.$$

Pe Γ' nucleul $\omega_{h_0}(r)$ este pozitiv și de aceea expresia din paranteză trebuie să schimbe semnul; devenind continuă, ea se anulează într-un anumit punct x', $|x' - x| < h_0$. Făcînd pe h_0 să tindă la zero și folosind din nou continuitatea expresiei din paranteză găsim că aceasta este egală cu zero în punctul x, adică funcția $u_0(x)$ satisface și condiția la limită (2).

Cele expuse mai sus conduc în mod firesc la următoarea definiție: se numește *soluția slabă a problemei Neumann* (1)—(2) funcția $u_0 \in W_2^{(1)}(\Omega)$ care realizează minimul funcționalei (5) în clasa funcțiilor din $W_2^{(1)}(\Omega)$ ce satisfac condiția (4).

Să demonstrăm că soluția slabă a problemei Neumann există dacă $h(x)$ satisface condiția (3), $h \in L_{q'}(\Gamma)$, unde $1/q + 1/q' = 1$ și $q < 2(m-1)/(m-2)$. Introducem în $W_2^{(1)}(\Omega)$ norma

$$\|u\|_{2,1}^2 = \left(\int_\Omega u \, dx \right)^2 + \int_\Omega A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} \, dx; \qquad (8)$$

este ușor de arătat că norma (8) este echivalentă cu norma (6.8) cap. 3. Pentru funcțiile ce satisfac condiția (4), obținem

$$\|u\|^2_{2,1} = \int_\Omega A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k}\, dx,$$

adică funcționala (5) poate fi scrisă sub forma mai simplă :

$$F(u) = \|u\|^2_{2,1} - 2lu\,; \quad lu = \int_\Gamma h(x)u(x)d\Gamma. \tag{9}$$

Funcționala liniară l este mărginită în $W_2^{(1)}(\Omega)$. Într-adevăr, conform inegalității lui Höllder $|lu| \leqslant \|h\|_{L_{q'}(\Gamma)} \|u\|_{L_q(\Gamma)}$, iar conform teoremei 3.3.2, $\|u\|_{L_q(\Gamma)} \leqslant C\|u\|_{2,1}$; C = const. În baza teoremei lui Riesz există o funcție $u_0 \in W_2^{(1)}(\Omega)$ astfel încît $lu = (u, u_0)_{2,1}$. Atunci $F(u) = \|u - u_0\|^2_{2,1}$ și este evident că $F(u)$ își atinge minimul în u_0.

Observație. Pe parcursul demonstrării existenței elementului u_0 nu am folosit faptul că h satisface condiția (3). Elementul u_0 care realizează minimul funcționalei (9) există și atunci cînd condiția (3) nu este satisfăcută, dar în acest caz u_0 nu poate fi privit ca soluția slabă a problemei Neumann.

Vom discuta pe scurt despre problema Neumann pentru ecuația

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + Cu = 0, \quad x \in \Omega\,; \tag{10}$$

ca și mai înainte, condiția la limită va avea forma (2); vom presupune că $C(x) \geqslant c_0 = \text{const} > 0$. În acest caz nu este necesar ca funcțiile h și u să satisfacă condițiile (3) și (4). Soluția slabă se definește ca funcția ce realizează în spațiul $W_2^{(1)}(\Omega)$ minimul funcționalei

$$\int_\Omega \left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2\right) dx - 2\int_\Gamma hu\, d\Gamma, \tag{11}$$

sau, ceea ce este echivalent, aceea care satisface identitatea integrală

$$\int_\Omega \left(A_{jk}\frac{\partial \eta}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu\eta\right)dx - \int_\Gamma h\eta d\Gamma = 0, \quad \forall \eta \in W_2^{(1)}(\Omega). \tag{12}$$

Dacă soluția slabă a problemei Neumann aparține clasei $C^{(2)}(\bar{\Omega})$, atunci ea este și soluția în sens clasic a acestei probleme. Acest lucru se demonstrează ca pentru problema (1)—(2), dar cu unele simplificări : nu este necesar să se introducă funcția ζ. Existența și unicitatea soluției slabe se demonstrează tot așa ca și pentru problema (1)—(2).

§ 9. ECUAȚII ELIPTICE DE ORDIN SUPERIOR ; SISTEME DE ECUAȚII

Metoda variațională permite să se găsească soluțiile slabe și pentru probleme mai generale decît cele analizate mai sus. Drept exemplu să analizăm prima problemă la limită (cu condiția la limită omogenă) pentru o ecuație eliptică al cărui ordin este mai mare decît doi. Vom desemna prin α și β multiindici de ordinul m. Să analizăm ecuația autoadjunctă de ordinul $2s$

$$\sum_{k=0}^{s} \sum_{|\alpha|=|\beta|=k} (-1)^k D^\alpha (A_{\alpha\beta}(x) D^\beta u) = f(x)\,; \quad A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}. \tag{1}$$

Ca și în cazul ecuației de ordinul al doilea, apartenența ecuației (1) la tipul eliptic se definește prin comportarea coeficienților săi dominanți, aceia pentru care $k = s$. Ecuația (1) se numește *eliptică nedegenerată* sau *uniform eliptică* în domeniul $\Omega \subset E_m$, dacă există o constantă $\mu_0 > 0$, astfel încît pentru orice $x \in \Omega$ și pentru orice valori ale variabilelor reale t_α are loc identitatea

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=s} A_{\alpha\beta} t_\alpha t_\beta \geqslant \mu_0 \sum_{|\alpha|=s} t_\alpha^2. \tag{2}$$

Vom presupune în cele de mai jos că această condiție este îndeplinită.

Prima problemă la limită (cu condiții la limită omogene) pentru ecuația (1) se numește problema integrării acestei ecuații în domeniul Ω dat, pentru condițiile la limită

$$\Gamma = \partial\Omega, \quad D^\gamma u_\Gamma = 0, \quad 0 \leqslant |\gamma| \leqslant s - 1. \tag{3}$$

Problemei (1), (3) i se asociază în mod evident un operator pe care îl notăm cu $\mathfrak{A}_s$. Drept domeniul de definiție al său luăm mulțimea funcțiilor de clasă $C^{(2s)}(\bar{\Omega})$, ce satisfac condiția (3) ; acest operator acționează conform formulei

$$\mathfrak{A}_s u = \sum_{k=0}^{s} \sum_{|\alpha|=|\beta|=k} (-1)^k D^\alpha (A_{\alpha\beta} D^\beta u).$$

Să arătăm că operatorul $\mathfrak{A}_s$ este pozitiv definit în $L_2(\Omega)$, dacă ceilalți coeficienți ai ecuației (1) satisfac inegalitățile

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=k} A_{\alpha\beta} t_\alpha t_\beta \geqslant 0, \quad k = 0, 1, \ldots, s-1. \tag{4}$$

Astfel, domeniul de definiție al operatorului $\mathfrak{A}_s$ este dens în $L_2(\Omega)$ deoarece conține mulțimea densă a funcțiilor finite. Mai departe, pentru $u, v \in D(\mathfrak{A}_s)$ calculăm produsul scalar

$$(\mathfrak{A}_s u, v) = \int_\Omega v \sum_{k=0}^{s} \sum_{|\alpha|=|\beta|=k} (-1)^k D^\alpha (A_{\alpha\beta} D^\beta u).$$

Integrînd prin părți și remarcînd că în baza condițiilor la limită (3) integralele de suprafață dispar, obținem egalitatea

$$(\mathfrak{A}_s u, v) = \int_\Omega \sum_{k=0}^{s} \sum_{|\alpha|=|\beta|=k} (-1)^k A_{\alpha\beta} D^\alpha v \, D^\beta u. \tag{5}$$

Expresia din partea dreaptă a relației (5) este simetrică în raport cu u și v, ceea ce arată că operatorul $\mathfrak{A}_s$ este simetric. Fie acum în (5), $v = u$. Omițînd din dreapta sumele nenegative corespunzătoare valorilor $k = 0, 1, \ldots, s-1$ și minorînd suma rămasă conform inegalității (2), obținem relația

$$(\mathfrak{A}_s u, u) \geqslant \mu_0 \int_\Omega \sum_{|\alpha|=s} (D^\alpha u)^2 dx. \tag{6}$$

Cum se observă din condiția (3), pentru însăși funcția u și pentru toate derivatele sale ce figurează în condiția amintită, are loc inegalitatea lui Friedrich. Aceasta conduce la inegalitățile succesive

$$\|u\|^2 = \int_\Omega u^2 dx \leqslant \varkappa \int_\Omega \sum_{|\alpha|=1} (D^\alpha u)^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \varkappa^2 \int_\Omega \sum_{|\alpha|=2} (D^\alpha u)^2 dx \leqslant \ldots \leqslant \varkappa^s \int_\Omega \sum_{|\alpha|=s} (D^\alpha u)^2 dx. \tag{7}$$

Comparînd relațiile (6) și (7), obținem inegalitatea

$$(\mathfrak{A}_s u, u) \geqslant \gamma^2 \|u\|^2, \quad \gamma = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varkappa^s}}, \tag{8}$$

care arată că operatorul $\mathfrak{A}_s$ este pozitiv definit. De aici rezultă că problema (1), (3) are o soluție generalizată și numai una; aceasta poate fi obținută ca soluția problemei de minim pentru funcționala

$$\int_\Omega \left[\sum_{k=0}^{s} \sum_{|\alpha|=|\beta|=k} A_{\alpha\beta} D^\alpha u \, D^\beta u - 2fu \right] dx. \tag{9}$$

Notația (1) poate fi considerată ca un sistem de N ecuații cu N funcții necunoscute, dacă prin $u(x)$ și $f(x)$ se înțeleg vectori-funcții cu N componente, iar prin $A_{\alpha\beta}(x)$ matrici pătrate de ordin N. Vom presupune că prin permutarea multiindicilor α și β matricea $A_{\alpha\beta}$ se transformă în adjuncta sa: $A_{\alpha\beta} = A^*_{\alpha\beta}$. Condiția (2) pentru sistem se va scrie astfel:

$$\left(\sum_{|\alpha|=|\beta|=s} A_{\alpha\beta}(x) t_\alpha, t_\beta \right) \geqslant \mu_0 \sum_{|\alpha|=s} |t_\alpha|^2. \tag{10}$$

Aici μ_0 este o constantă pozitivă, t_α un vector arbitrar cu N componente; simbolurile $(,)$ și $|\ \ |$ indică respectiv produsul scalar și norma în spațiul euclidian N-dimensional. În mod analog se modifică și condiția (4).

Sistemele de tipul (1), care satisfac condiția (10), aparțin clasei așa-numitelor *sisteme*[1] *tari eliptice*.

Toate rezultatele obținute în acest paragraf se extind fără dificultate pentru sistemele de tipul (1) ce satisfac condițiile (10), precum și condiția (4) modificată în mod corespunzător.

§ 10. PROBLEMA DIRICHLET PENTRU DOMENII NEMĂRGINITE

Să presupunem că în ecuația eliptică

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + Cu = f(x)$$

[1] Pentru amănunte despre sisteme tari eliptice, vezi [53].

matricea coeficienților $A_{jk}(x)$ este strict pozitivă, iar coeficientul $C(x)$ satisface inegalitatea $C(x) \geqslant C_0 = \text{const} > 0$. Atunci, după cum se verifică ușor, operatorul corespunzător problemei Dirichlet rămîne pozitiv definit și în cazul unui domeniu nemărginit, iar această problemă (în cazul unor condiții la limită omogene) are soluție slabă.

Prezintă interes cazul $C(x) \equiv 0$. Pentru simplificare ne mărginim la ecuația lui Laplace cu condiții la limită omogene. Cazul domeniilor nemărginite este analizat amănunțit în monografia [31].

Fie Ω un domeniu nemărginit cu frontiera Γ mărginită, netedă pe porțiuni. În acest domeniu considerăm problema Dirichlet

$$-\Delta u = f(x), \tag{1}$$

$$u|_\Gamma = 0. \tag{2}$$

Operatorul generat de această problemă îl notăm cu $\mathfrak{B}$. Drept domeniul său de definiție $D(\mathfrak{B})$ este indicat să fie luată mulțimea funcțiilor de clasă $C^2(\bar{\Omega})$, ce se anulează pe frontiera Γ și în vecinătatea (alta pentru fiecare funcție) punctului de la infinit; operatorul $\mathfrak{B}$ acționează conform formulei $\mathfrak{B}u = -\Delta u$. Vom privi pe $\mathfrak{B}$ ca un operator în $L_2(\Omega)$. Să arătăm că acest operator este strict pozitiv, dar nu și pozitiv definit. Considerăm produsul scalar

$$(\mathfrak{B}u, v) = -\int_\Omega v \Delta u \, dx; \quad u, v \in D(\mathfrak{B}). \tag{3}$$

Funcția $u(x)$ este diferită de zero numai într-un anumit domeniu mărginit pe care de fapt se și calculează integrala (3). De aceea integralei (3) i se poate aplica formula Green (formula (6.7) cap. 9). Ținînd seama că pe frontiera domeniului amintit avem $u = 0$, obținem

$$(\mathfrak{B}u, v) = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} \, dx,$$

adică operatorul $\mathfrak{B}$ este simetric. Pentru $v = u$ avem

$$(\mathfrak{B}u, u) = \int_\Omega \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx \geqslant 0. \tag{4}$$

Dacă $(\mathfrak{B}u, u) = 0$, atunci, evident, $\dfrac{\partial u}{\partial x_k} \equiv 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$ și $u(x) \equiv \text{const}$. Dar $u|_\Gamma = 0$ și de aceea $u(x) \equiv 0$. Pozitivitatea operatorului $\mathfrak{B}$ este deci demonstrată.

În domeniul nemărginit Ω cu frontiera mărginită, se poate plasa un cub cu muchia a oricît de mare. Alegem sistemul de coordonate astfel încît cubul să fie definit de inegalitățile $0 \leqslant x_k \leqslant a$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Să analizăm funcția

$$u_a(x) = \begin{cases} \prod_{k=1}^{m} \sin^3 \dfrac{\pi x_k}{a} & \text{în interiorul cubului,} \\ 0 & \text{în exteriorul cubului.} \end{cases} \tag{5}$$

Evident, $u_0(x) \in D(\mathfrak{B})$. Un calcul simplu arată că

$$\frac{(\mathfrak{B}u_a, u_a)}{\|u_a\|^2} = \frac{c}{a^2}, \quad c = \text{const}.$$

De aici rezultă

$$\lim_{a \to \infty} \frac{(\mathfrak{B}u_a, u_a)}{\|u_a\|^2} = 0$$

și, prin urmare,

$$\inf_{u \in D(\mathfrak{B})} \frac{(\mathfrak{B}u, u)}{\|u\|^2} = 0. \tag{6}$$

Din egalitatea (6) se deduce că $\mathfrak{B}$ nu este un operator pozitiv definit.

Conform celor expuse în §10, cap. 4, operatorului $\mathfrak{B}$ i se poate asocia spațiul energetic $H_\mathfrak{B}$. Deoarece operatorul $\mathfrak{B}$ este numai strict pozitiv, atunci nu toate elementele spațiului $H_\mathfrak{B}$ aparțin spațiului inițial $L_2(\Omega)$. Se poate demonstra (lăsăm pe seama cititorului acest lucru) că spațiul $H_\mathfrak{B}$ constă din acele și numai acele funcții care:

1) sînt definite aproape peste tot în Ω;

2) au derivatele generalizate de ordin întîi de pătrat integrabil în Ω;

3) satisfac condiția la limită (2) în sensul următor: dacă $u \in H_\mathfrak{B}$, atunci există un șir de funcții $\{u_n(x)\}$, $u_n \in C^{(2)}(\bar{\Omega})$, astfel că $u_n(x) = 0$ pe suprafața Γ și pentru $|x|$ suficient de mare, șir care satisface relația

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Cum s-a demonstrat în §10, cap. 4, problema (1)—(2) are soluție generalizată, atunci și numai atunci cînd funcționala (u, f) este mărgi-

nită în H_3. Pentru aceasta însă este necesar și suficient să existe un vector $F(x)$ astfel încît $f(x) = \operatorname{div} F(x)$ și $\|F(x)\| \in L_2(\Omega)$. Aici divergența se înțelege în sens generalizat (analog derivatei generalizate), iar simbolul $\|F(x)\|$ desemnează norma vectorului $F(x)$ în spațiul euclidian m-dimensional.

Se poate indica o condiție mai simplă, care însă este numai suficientă : soluția generalizată a problemei (1)—(2) există dacă dimensiunea spațiului $m > 2$ și dacă integrala

$$\int_\Omega |x|^2 f^2(x)\,dx$$

este convergentă.

Capitolul 18

SPECTRUL PROBLEMELOR DIRICHLET ȘI NEUMANN

§ 1. ASUPRA UNEI TEOREME DE SCUFUNDARE

Teorema 18.1.1. *Dacă $\Omega \subset E_m$ este un domeniu mărginit arbitrar, atunci spațiul $\mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$ se scufundă compact în $L_2(\Omega)$.*

Definiția spațiului $\mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$ a fost dată în §6 cap. 3. Dacă Ω este reuniunea unui număr finit de domenii stelate, atunci teorema 18.1.1 este o consecință imediată a teoremei 3.3.3.

Plasăm Ω în interiorul unei anumite bile B. Prelungim funcțiile de clasă $\mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$ pe această bilă, punîndu-le egale cu zero în $B \setminus \Omega$. Să arătăm că funcțiile astfel prelungite sînt de clasă $\mathring{W}_2^{(1)}(B)$.

Fie $u \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$ și u^* funcția prelungită :

$$u^*(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in B \setminus \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Conform definiției, $u \in L_2(\Omega)$ și deci $u^* \in L_2(B)$; cu atît mai mult $u^* \in L_1(B)$. Desemnăm prin $\varphi(x)$ o funcție arbitrară de clasă $\mathfrak{M}^{(1)}(B)$ (vezi introducere, §2) și să considerăm integrala

$$\int_B u^*(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k}\,dx = \int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k}\,dx, \quad 1 \leqslant k \leqslant m. \tag{2}$$

Fie $\{u_n(x)\}$ șirul de funcții ce satisface condițiile (6.11) cap. 3 ; atunci

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k}\,dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi(x) \frac{\partial u_n(x)}{\partial x_k}\,dx = -\int_\Omega \varphi(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\,dx. \tag{3}$$

Să considerăm

$$v_k(x) = \begin{cases} \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_k}, & x \in \Omega, \\ 0, & x \in B \setminus \Omega. \end{cases}$$

Din identităţile (2) şi (3) deducem că

$$\int_B u^* \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k}\, dx = -\int_B \varphi(x)\, v_k(x)\, dx.$$

De aici se observă că există derivatele generalizate $\partial u^*/\partial x_k = v_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, m$ şi că $\partial u^*/\partial x_k \in L_2(B)$. Avînd în vedere definiţia claselor $W_p^{(k)}$ (§1, cap. 3) observăm că $u^* \in W_2^{(1)}(B)$ şi afirmaţia noastră este demonstrată.

Fie acum M o mulţime arbitrară din $\mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$, mărginită în metrica acestui spaţiu. Prelungim fiecare din funcţiile mulţimii M conform formulei (1) şi notăm cu M^* mulţimea acestor noi funcţii; evident, mulţimea M^* este mărginită în metrica lui $W_2^{(1)}(B)$. Conform teoremei 4.3.3 din M^* se poate extrage un şir convergent în metrica lui $L_2(B)$; aceasta este echivalent cu faptul că din mulţimea M se poate extrage un şir convergent în metrica lui $L_2(\Omega)$.

§ 2. SPECTRUL PROBLEMEI DIRICHLET PENTRU DOMENII MĂRGINITE

Teorema 18.2.1. *În cazul unui domeniu mărginit, operatorul problemei Dirichlet pentru ecuaţia eliptică autoadjunctă nedegenerată de ordinul al doilea are spectrul discret.*

Fie M o mulţime mărginită în spaţiul $H_{\mathfrak{A}}$, unde $\mathfrak{A}$ este operatorul problemei Dirichlet din enunţul teoremei, şi deci

$$|u|_{\mathfrak{A}} \leqslant c = \text{const}, \quad \forall u \in M. \tag{1}$$

Menţionăm mai întîi că în baza teoremei 17.2.1 $M \subset \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$. Din inegalitatea (1) rezultă că

$$\forall u \in M, \quad \|u\| \leqslant \frac{c}{\gamma}, \tag{2}$$

udeu γ este constanta din pozitiva definire a operatorului $\mathfrak{A}$. Mai departe, conform formulei (2.3) cap. 17 avem

$$\int_\Omega \left[A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2 \right] dx \leqslant c^2.$$

Din relaţia (1.3) cap. 17 rezultă atunci inegalitatea

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 \leqslant \frac{c^2}{\mu_0}. \tag{3}$$

Inegalităţile (2) şi (3) arată că mulţimea M este mărginită în $\mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$ conform teoremei 18.1.1. ea este compactă în $L_2(\Omega)$. Astfel, orice mulţime mărginită în $H_{\mathfrak{A}}$ este compactă în $L_2(\Omega)$. Conform teoremei 5.6.1 spectrul operatorului $\mathfrak{A}$ este discret.

Din teorema demonstrată mai sus, precum şi din teorema 5.6.1 rezultă următoarea afirmaţie: există o mulţime numărabilă $\{\lambda_n\}$ a valorilor parametrului λ pentru care problema

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) - Cu + \lambda u = 0, \; x \in \Omega, \; u|_\Gamma = 0 \tag{4}$$

are soluţie nebanală. Valorile λ_n sînt valorile proprii ale operatorului problemei Dirichlet (pe scurt, valorile proprii ale problemei Dirichlet), iar soluţiile nebanale corespunzătoare ale problemei (4) sînt funcţii proprii ce corespund valorilor proprii λ_n. Fiecărei valori proprii îi corespunde un număr finit de funcţii proprii liniar independente. Vom considera fiecare valoare proprie de atîtea ori, cîte funcţii proprii îi corespund. Toate valorile proprii $\lambda_n > 0$, şi

$$\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty. \tag{5}$$

Sistemul $\{u_n\}$ al funcţiilor proprii poate fi considerat ortonormat în $L_2(\Omega)$:

$$(u_j, u_k) = \delta_{jk}; \quad j, k = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

El este de asemenea ortogonal, dar nu şi normat în $H_{\mathfrak{A}}$, şi anume

$$[u_j, u_k]_{\mathfrak{A}} = 0, \; j \neq k; \; [u_k, u_k]_{\mathfrak{A}} = |u_k|_{\mathfrak{A}}^2 = \lambda_k. \tag{7}$$

Sistemul funcţiilor proprii u_n este complet, atît în $L_2(\Omega)$ cît şi în $H_{\mathfrak{A}}$.

§ 3. CAZURI ELEMENTARE

Construirea efectivă a spectrului unui operator pozitiv definit pe baza teoremei 6.6.1 este deosebit de dificilă. Este suficient să ne gîndim pentru aceasta că este necesar să se extragă dintr-un şir minimizant un subşir convergent. De aceea prezintă interes exemple particulare în care spectrul problemei Dirichlet este uşor de construit. Mai jos se dau exemple de domenii pentru care se pot da expresii elementare ale valorilor proprii şi ale funcţiilor proprii ale problemei Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace.

Paralelipipedul în spaţiul m-dimensional

Dacă n este un număr natural, atunci funcţia de variabilă reală t

$$u_n(t) = \sin \frac{n\pi t}{a} \tag{1}$$

satisface ecuaţia diferenţială $u_n'' + \dfrac{n^2\pi^2}{a^2} u_n = 0$ şi condiţia la limită $u_n(0) = u_n(a) = 0$. De aici rezultă că funcţia

$$u_{n_1 n_2 \ldots n_m}(x) = c \prod_{k=1}^{m} \sin \frac{n_k \pi x_k}{a_k}, \quad c = \text{const}, \tag{2}$$

satisface ecuaţia diferenţială $\Delta u + \lambda u = 0$, $\lambda = \pi^2 \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{n_k^2}{a_k^2}$ şi se anulează pe suprafaţa paralelipipedului

$$0 < x_k < a_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{3}$$

Astfel, funcţiile (2) sînt funcţii proprii ale problemei Dirichlet pentru operatorul lui Laplace în paralelipipedul (3); valorile proprii corespunzătoare sînt

$$\lambda_{n_1 n_2 \ldots n_m} = \pi^2 \sum_{k=1}^{m} \frac{n_k^2}{a_k^2}. \tag{4}$$

Sistemul (2) este ortogonal în metrica lui $L_2(\Omega)$, unde Ω este paralelipipedul (3); el va fi şi normat dacă alegem

$$c = 2^{m/2} \prod_{k=1}^{m} a_k^{-1/2}. \tag{5}$$

Sistemul (2) este complet în $L_2(\Omega)$ — acest lucru este uşor de demonstrat plecînd de la faptul că sistemul de funcţii (1) este complet în $L_2(0, a)$. De aici rezultă că formula (2) epuizează sistemul de funcţii proprii ale problemei Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace în paralelipiped.

Bila în spaţiul m-dimensional

Funcţiile proprii şi valorile proprii ale problemei Dirichlet pentru bila m-dimensională $B_\rho = |x| < 1$ satisfac ecuaţia $\Delta u + \lambda u = 0$, sau dacă se trece la coordonatele sferice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{m-1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \delta u + \lambda u = 0 \tag{6}$$

şi condiţia la limită

$$u|_{\rho=1} = 0. \tag{7}$$

Vom căuta soluţia nebanală a problemei (6), (7) folosind *metoda separării variabilelor*, anume vom căuta soluţia de forma

$$u = f(\rho)\, \varphi(\theta) \tag{8}$$

Condiţia (7) conduce pentru funcţia $f(\rho)$ la următoarea condiţie la limită

$$f(1) = 0. \tag{9}$$

Folosind (8), ecuaţia (6) capătă uşor forma

$$\frac{\rho^2}{f}\left(f'' + \frac{m-1}{\rho} f' + \lambda f\right) = \frac{\delta \varphi}{\varphi}. \tag{10}$$

În ecuaţia (10) membrul stîng nu depinde de θ, iar membrul drept nu depinde de ρ; rezultă că ambele părţi ale ecuaţiei (10) nu depind nici de ρ, nici de θ şi prin urmare sînt egale cu o anumită constantă pe care o desemnăm prin μ. Astfel ecuaţia (10) se descompune în două ecuaţii diferenţiale

$$\delta \varphi - \mu \varphi = 0 \tag{11}$$

şi

$$f''(\rho) + \frac{m-1}{\rho} f'(\rho) + \left(\lambda - \frac{\mu}{\rho^2}\right) f(\rho) = 0. \tag{12}$$

În particular, pentru $\mu = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, se obțin drept $\varphi(\theta)$ funcții netede pe sferă. În acest caz ecuația (11) coincide cu ecuațiile diferențiale ale funcțiilor sferice și avem $\varphi(\theta) = Y^k_{n,m}(\theta)$. Prin substituția $f = \rho^{-\frac{m-2}{2}} y$ ecuația lui Bessel devine

$$y'' + \frac{1}{\rho} y' + \left(\lambda - \frac{\left(n + \frac{m-2}{2}\right)^2}{\rho^2} \right) y = 0. \tag{13}$$

Soluția acestei ecuații, mărginită pentru $\rho = 0$, are forma

$$y = C J_{n+\frac{m-2}{2}} (\sqrt{\lambda}\rho),$$

unde C este o constantă, iar J_ν reprezintă funcția Bessel de prima speță de ordinul ν. Condiția la limită (7) dă atunci valoarea lui λ:

$$\lambda = j^2_{n+\frac{m-2}{2},l}, \tag{14}$$

unde $j_{\nu,l}$ este a l-a rădăcină pozitivă a funcției Bessel J_ν.

Ajungem astfel la următoarele funcții proprii ale problemei Dirichlet pentru ecuația lui Laplace în bila unitate:

$$u_{n,k,l} = C_{n,k,l} \rho^{-\frac{m-2}{2}} J_{n+\frac{m-2}{2}}(j_{n+\frac{m-2}{2},l}\, \rho)\, Y^k_{n,m}(\theta);$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots; \quad k = 1, 2, \ldots, k_{n,m}; \quad l = 1, 2, 3, \ldots \tag{15}$$

Funcțiile (15) sînt reciproc ortogonale în bila unitate; factorii $C_{n,k,l}$ pot fi aleși astfel încît funcțiile respective să fie normate în aceeași bilă.

Nu este greu de arătat că sistemul (15) este complet în $L_2(B)$; nu insistăm asupra acestui aspect.

În plan (pentru $m = 2$) funcțiile (15) capătă forma

$$C_{n,l} J_n(j_{n,l}\rho) \cos n\theta,\ C'_{n,l} J_n(j_{n,l}\rho) \sin n\theta;$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots; \quad l = 1, 2, 3, \ldots \tag{16}$$

§ 4. ORDINUL DE CREȘTERE AL VALORILOR PROPRII

Ecuația lui Laplace în cubul m-dimensional. În cubul m-dimensional Q, definit de inegalitatea $0 \leqslant x_k \leqslant a$, $k = 1, 2, \ldots, m$, valorile proprii ale problemei Dirichlet pentru ecuația lui Laplace (formula (3.4)) sînt egale cu

$$\lambda_{n_1 n_2 \ldots n_m} = \frac{\pi^2}{a^2} \sum_{k=1}^{m} n_k^2. \tag{1}$$

Ordonăm numerele (1) în ordine crescătoare, desemnîndu-le prin λ_n astfel încît $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$. Problema constă în a da o evaluare a ordinului de creștere a mărimilor λ_n pentru $n \to \infty$. Mai comod este însă să evaluăm nu pe λ_n, ci numerele

$$\lambda'_n = \frac{a^2}{\pi^2} \lambda_n = \sum_{k=1}^{m} n_k^2. \tag{2}$$

Fie în spațiul euclidian m-dimensional bila B_N de rază N cu centrul în originea axelor de coordonate; numărul N este ales suficient de mare astfel încît să avem $\lambda'_n = N^2$. Pot fi mai multe astfel de numere λ'_n. Desemnăm prin ν_1 și ν_2 cea mai mică și cea mai mare valoare a lui n pentru care avem $\lambda'_n = N^2$. Mărimea ν_2 arată cîte numere de tipul (2) se găsesc în bila închisă $\bar{B}_N$. Din aceeași formulă (2) se observă că ν_2 este egal cu numărul punctelor incluse în bila $\bar{B}_N$ avînd coordonate întregi pozitive. Acesta este egal totodată cu volumul rețelei cubice T_m cu muchia unitate, care poate fi înscrisă în primul octant al bilei B_N (în fig. 22 este ilustrat cazul bidimensional). Volumul rețelei T_m este mai mic decît volumul octantului, adică

$$\nu_2 < \frac{|S_1|}{2^m m} N^m. \tag{3}$$

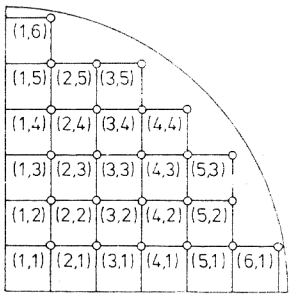

Fig. 22

Construim apoi bila B_{N-2} de rază $N - m - 1$ cu centrul în originea axelor de coordonate. Nu este greu de arătat că primul octant al acestei bile este conținut în rețeaua T_m. Pentru aceasta este suficient să se arate că pentru orice vîrf frontieră $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ al rețelei T_m avem

$$\sum_{k=1}^{m} n_k^2 > (N - m - 1)^2. \tag{4}$$

27 — 8. 775 21

Vîrful frontieră este caracterizat prin aceea că pentru el avem simultan

$$\sum_{k=1}^{m} n_k^2 \leqslant N^2,$$

$$\sum_{k=1}^{m} (n_k + 1)^2 = \sum_{k=1}^{m} n_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{m} n_k + m > N^2. \tag{5}$$

Din a doua inegalitate (5) rezultă că

$$\sum_{k=1}^{m} n_k^2 > N^2 - 2 \sum_{k=1}^{m} n_k - m > N^2 - 2mN - m = (N - m)^2 -$$

$$- m^2 - m,$$

care este mai mare decît $(N - m - 1)^2$ pentru N suficient de mare. Atunci

$$\nu^2 > \frac{|S_1|}{2^m m} (N - m - 1)^2; \tag{6}$$

inegalităţile (3) şi (6) arată că pentru N suficient de mare are loc evaluarea

$$\nu_2 = \frac{|(S_1|}{2^m m} N^m + o(N^m) = \frac{\pi^{m/2} N^m}{2^{m-1} m \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} + o(N^m). \tag{7}$$

Să evaluăm mărimea ν_1. Evident, $\nu_1 = \nu_2 - \sigma$, unde prin σ s-a notat numărul punctelor de coordonate numere pozitive întregi ce se găsesc pe sfera $\sum_{k=1}^{m} n_k^2 = N^2$ care mărgineşte bila B_N. Ducem prin punctele indicate drepte paralele la ultima axă. Pe aceste drepte primele $n - 1$ coordonate sînt întregi pozitivi, în intersecţiile cu planul $n_m = 0$ dreptele respective dau reţeaua de puncte utilizată în construcţia reţelei cubice T_{m-1}, analoagă reţelei T_m, dar de dimensiune cu o unitate mai mică. De aici este clar că numărul σ nu este mai mare decît volumul $(m - 1)$-dimensional al reţelei

T_{m-1} şi prin urmare are loc formula

$$\sigma = \frac{\pi^{(m-1)/2} N^{m-1}}{2^{m-2}(m-1)\,\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} + o(N^{m-1}). \tag{8}$$

Din reţelele (7) şi (8) şi egalitatea $\nu_1 = \nu_2 - \sigma$ rezultă că

$$v_1 = \frac{\pi^{m/2}\, N^m}{2^{m-1} m \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} + o(N^m). \tag{9}$$

Amintim că am notat cu n orice număr pentru care $\lambda_n' = N^2$, adică $\nu_1 \leqslant n \leqslant \nu_2$. Din egalităţile (7) şi (9) rezultă că

$$n = \frac{\pi^{m/2}\, N^m}{2^{m-1} m \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} + o(N^m).$$

De aici

$$\lambda_n = c_m n^{2/m} + o(n^{2/m}), \tag{10}$$

unde c_m este o constantă care nu este greu de calculat.

Cazul general. Să considerăm operatorul $\mathfrak{A}$ al problemei Dirichlet (§ 1, cap. 17) şi să presupunem că A_{jk} şi C satisfac condiţiile ((1.3) şi (1.4)) cap. 17, astfel că are loc inegalitatea (1.11) cap. 17. Pentru cele ce urmează este important să aibă loc o inegalitate de sens invers.

Coeficienţii $A_{jk}(x)$ sînt continui şi prin urmare mărginiţi în domeniul închis $\overline{\Omega}$. De aici rezultă că cea mai mare valoare proprie a matricii coeficienţilor $A_{jk}(x)$ este de asemenea mărginită. Fie M_0 marginea lor superioară; atunci

$$A_{jk}(x)\, t_j t_k \leqslant M_0 \sum_{k=1}^{m} t_k^2. \tag{11}$$

Coeficientul $C(x)$ este de asemenea continuu şi mărginit în $\overline{\Omega}$. Fie $C(x) \leqslant M_1$. Atunci, dacă $u \in D(\mathfrak{A})$, avem

$$(\mathfrak{A}\, u, u) \leqslant M_0 \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 \mathrm{d}x + M_1 \int_{\Omega} u^2 \mathrm{d}x.$$

Aplicînd integralei a doua inegalitatea lui Friedrich, obţinem în final:

$$(\mathfrak{A}u, u) \leqslant \mu_1 \int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx_1; \quad \mu_1 = M_0 + \varkappa M_1. \tag{12}$$

Considerăm două cuburi Q_1 şi Q_2, astfel încît primul să conţină domeniul Ω, iar celălalt să fie conţinut în acesta. Notăm respectiv cu $\mathfrak{A}_1$ şi $\mathfrak{A}_2$ operatorii problemei Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace în cuburile Q_1 şi Q_2. Desemnăm de asemenea prin λ_n, $\lambda_n^{(1)}$, $\lambda_n^{(2)}$ valorile proprii ale operatorilor $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ ordonate în ordine crescătoare. Aceşti operatori satisfac inegalităţile $\mu_0 \mathfrak{A}_1 \leqslant \mathfrak{A} \leqslant \mu_1 \mathfrak{A}_2$ (demonstraţi!). Aici μ_0 este constanta din inegalitatea (1.11) cap. 17. În baza principiului de minimax, avem

$$\mu_0 \lambda_n^{(1)} \leqslant \lambda_n \leqslant \mu_1 \lambda_n^{(2)}. \tag{13}$$

Numerele $\lambda_n^{(1)}$ şi $\lambda_n^{(2)}$ satisfac însă relaţiile de forma (10) şi deci pentru λ_n (valorile proprii ale operatorului $\mathfrak{A}$) obţinem evaluarea dublă

$$c_1 n^{2/m} \leqslant \lambda_n \leqslant c_2 n^{2/m}; \quad c_1 c_2 = \text{const}. \tag{14}$$

Observaţie. Este valabilă o afirmaţie mult mai exactă: există $\lim n/\lambda_n^{m/2}$ şi aceasta este egală cu

$$c'_m \int_\Omega \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{Det} A(x)}}, \quad c'_m = \text{const},$$

unde $A(x)$ este matricea coeficienţilor $A_{jk}(x)$, iar c_m depinde numai de dimensiune m a spaţiului (vezi [7] şi [44], vol. IV).

§ 5. SPECTRUL PROBLEMEI NEUMANN PENTRU DOMENII MĂRGINITE

Pentru simplificare ne limităm la cazul

$$\mathfrak{N}_0 u = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right), \quad \left[A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu, x_j)\right]_\Gamma = 0, \tag{1}$$

$$\int_\Omega u dx = 0. \tag{2}$$

Presupunem că Ω este reuniunea unui număr finit de domenii stelate. Cum s-a arătat în cap. 17, spaţiul energetic $H_{\mathfrak{N}_0}$ se scufundă în subspaţiul $W_2^{(1)}(\Omega)$, definit de condiţia (2), dacă normele din $H_{\mathfrak{N}_0}$ şi subspaţiul menţionat sînt echivalente. Dar conform teoremei 3.3.3 spaţiul $W_2^{(1)}(\Omega)$ se scufundă compact în $L_2(\Omega)$ şi atunci şi $H_{\mathfrak{N}_0}$ se scufundă compact în $L_2(\Omega)$ (mai exact, în subspaţiul $\widetilde{L}_2(\Omega)$ ortogonal la unitate). În baza teoremei 5.6.1 operatorul $\mathfrak{N}_0$ are spectru discret: există şirul $0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 < \ldots \leqslant \mu_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ al valorilor proprii şi corespunzător al sistemului de funcţii proprii $w_1(x)$, $w_2(x)$, ..., ortonormate în $L_2(\Omega)$, ortogonale în $H_{\mathfrak{N}_0}$ şi complet în $L_2(\Omega)$ şi $H_{\mathfrak{N}_0}$.

Observaţii. 1. Dacă se înlătură condiţia (2) şi se analizează operatorul

$$\mathfrak{N}u = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right); \quad \left[A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu, x_j)\right]_\Gamma = 0.$$

atunci spectrul operatorului $\mathfrak{N}$ diferă de spectrul operatorului $\mathfrak{N}_0$ prin adăugarea unui număr propriu $\mu_0 = 0$ şi corespunzător a unei funcţii proprii $w_0(x) = \text{const}$. De aici se deduce uşor că operatorul

$$\mathfrak{N}_1 u = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + u; \quad \left[A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu, x_j)\right]_\Gamma = 0 \tag{3}$$

are spectru discret. Valorile proprii ale operatorului (3) sînt $1, \mu_1 + 1, \mu_2 + 1, \ldots$, iar funcţiile proprii corespunzătoare — $w_0 = \text{const}$, $w_1(x)$, $w_2(x), \ldots$, unde $\mu_1, \mu_2, \ldots$ şi $w_1, w_2, \ldots$ sînt respectiv valorile şi funcţiile proprii ale operatorului $\mathfrak{N}_0$.

2. Nu este greu de demonstrat faptul că operatorul

$$\mathfrak{N}u = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + Cu; \quad \left[A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu, x_j)\right]_\Gamma = 0, \tag{4}$$

unde $C(x) \geqslant 0$ şi $C(x) \neq 0$ pe o mulţime de măsură pozitivă, este pozitiv definit şi are spectru discret.

§ 6. DESPRE ECUAŢII NEAUTOADJUNCTE

Fie ecuaţia

$$(A + \lambda K)u = f, \quad f \in H. \tag{1}$$

unde λ este un parametru numeric, A un operator pozitiv definit într-un spaţiu Hilbert separabil H, avînd spectru discret; K este un operator mărginit ce acţionează din H_A în H, unde H_A este spaţiul energetic al operatorului A.

Analizăm mai întîi ecuația autoadjunctă

$$Au = f. \tag{2}$$

Soluția generalizată u_0 a acestei ecuații se definește (vezi cap. 4) ca un element al spațiului H_A, ce satisface identitatea

$$[u_0, \eta]_A = (f, \eta), \ \forall \eta \in H_A. \tag{3}$$

Un astfel de element există și este unic determinat oricare ar fi $f \in H$. Astfel, relația (3) asociază fiecărui element $f \in H$ un element și numai unul singur $u_0 \in H_A$. Cu alte cuvinte, relația (3) definește un operator, pe care îl desemnăm prin G, astfel încît $Gf = u_0$, ce acționează din H în H_A și satisface identitatea

$$[Gf, \eta]_A = (f, \eta)\,; \ \forall \eta \in H_A, \quad \forall f \in H. \tag{4}$$

După cum s-a arătat în §5, cap. 4, operatorului G i se poate da o exprimare formală : dacă $\{\omega_n\}$ este un sistem complet și ortonormat în H_A, atunci

$$Gf = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \omega_n)\, \omega_n, \tag{5}$$

Ecuația (1) o scriem sub forma $Au = f - \lambda Ku$. Dacă această ecuație admite soluție, atunci ea satisface relația

$$u = Gf - \lambda GKf. \tag{6}$$

Punem $Gf = F$, $GK = T$; din cele de mai sus rezultă că $F \in H_A$ și că operatorul T acționează în H_A. Astfel, soluția ecuației (1), în ipoteza că ea există, satisface ecuația

$$u + \lambda\, Tu = F. \tag{7}$$

Introducem definiția: se numește *soluție generalizată* a ecuației (1) elementul (dacă acesta există) al spațiului H_A ce satisface ecuația (7).

Lema 18.6.1. *Operatorul G este compact în H.*

Fie $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots$ valorile proprii ale operatorului A și $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ vectorii proprii corespunzători, ortonormați în H. Atunci (vezi teorema 5.4.2) $[u_j, u_k]_A = 0$, $j \neq k$, $|u_k|_A^2 = \lambda_k$,

sistemul $\{u_n/\sqrt{\lambda_n}\}$ este ortonormat în H_A și, conform teoremei 5.6.1, complet în același spațiu. În formula (5) punem $\omega_n = u_n/\sqrt{\lambda_n}$. Aceasta dă următoarea reprezentare a operatorului G :

$$Gf = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, u_n)}{\lambda_n}\, u_n. \tag{8}$$

Fie

$$G = G_n' + G_n'', \ G_n' f = \sum_{k=1}^{n} \frac{(f, u_k)}{\lambda_k}\, u_k, \ G_n'' f = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(f, u_k)}{\lambda_k}\, u_k. \tag{9}$$

Primul operator este finit-dimensional și prin urmare compact. Să evaluăm norma celui de al doilea operator. Avem

$$\|G_n'' f\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(f, u_k)^2}{\lambda_k^2} \leqslant \frac{1}{\lambda_{n+1}^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} (f, u_k)^2.$$

În baza inegalității lui Bessel $\|G_n'' f\|^2 \leqslant \dfrac{1}{\lambda_{n+1}^2} \|f\|^2$. De aici $\|G_n''\| \leqslant$

$\leqslant \dfrac{1}{\lambda_{n+1}} \xrightarrow[u \to \infty]{} 0$ și prin urmare $\|G - G_n'\| \xrightarrow[u \to \infty]{} 0$.

Așadar, operatorul G este compact în H ca limită (în sensul convergenței în normă) a unor operatori compacți.

Teorema 18.6.1. *Operatorul $T = GK$ este compact în H_A.*

Operatorul G este compact în H și de aceea, dacă M este o mulțime mărginită în H, din ea putem extrage un astfel de șir $\{v_n\}$, pentru care $\{Gv_n\}$ converge și prin urmare $\|Gv_n - Gv_k\| \xrightarrow[n,k \to \infty]{} 0$.

Să analizăm apoi mulțimea arbitrară $N \subset H_A$, mărginită în metrica energetică, $|u| \leqslant a = \text{const}$, $\forall u \in N$. Operatorul K acționează mărginit din H_A în H și de aceea mulțimea KN este mărginită în norma lui H. Fie $\|Ku\| \leqslant c$, $\forall u \in N$. Din mulțimea KN, mărginită în H, putem extrage un astfel de șir $\{Kv_n\}$, pentru care

$$\|GKv_n - GKv_k\| = \|Tv_n - Tv_k\| \xrightarrow[k,n \to \infty]{} 0. \tag{10}$$

Relația (10) arată că T este compact ca operator din H_A în H. Rămîne să arătăm că T este compact ca operator din H_A în H_A. Pentru aceasta este suficient să arătăm că

$$|Tv_n - Tv_k|_A \xrightarrow[n,k \to \infty]{} 0. \tag{11}$$

Să evaluăm pătratul ultimei norme. Folosind formula (6.6) obținem

$$|Tv_n - Tv_k|_A^2 = [T(v_n - v_k),\ T(v_n - v_k)]_A = [GK(v_n - v_k),$$

$$T(v_n - v_k)]_A = (Kv_n - Kv_k,\ Tv_n - Tv_k) \leqslant$$

$$\leqslant \|Kv_n - Kv_k\| \cdot \|Tv_n - Tv_k\| \leqslant 2c\|Tv_n - Tv_k\| \xrightarrow[n,k\to\infty]{} 0.$$

Din teorema 18.6.1 rezultă că pentru ecuația (7) este adevărată teorema lui Fredholm:

1) ecuația (7) are o soluție și numai una pentru toate valorile λ, cu excepția unei mulțimi cel mult numărabile cu punct de acumulare numai la infinit;

2) subspațiile soluțiilor ecuațiilor omogene $u + \lambda Tu = 0$ și $v + \bar{\lambda} T^* v = 0$ sînt finit-dimensionale și de aceeași dimensiune;

3) ecuația (7) are soluție, atunci și numai atunci cînd

$$[F, v]_A = 0, \tag{12}$$

pentru orice soluție v a ecuației $v + \lambda T^* v = 0$.

În punctele 2) și 3) T^* este operatorul adjunct lui T.

Condiția (12) se mai poate simplifica. Astfel, $[F, v]_A = [Gf, v]_A$; conform formulei (4), $[F, v]_A = (f, v)$ și ajungem la condiția necesară și suficientă, mai simplă, pentru existența soluției generalizate a ecuației (1):

$$(f, v) = 0. \tag{13}$$

§ 7. PROBLEMELE DIRICHLET ȘI NEUMANN PENTRU ECUAȚIILE ELIPTICE NEAUTOADJUNCTE

Să analizăm ecuația

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \lambda\left(B_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k} + C(x)u\right) = f(x) \tag{1}$$

și condiția la limită Dirichlet

$$u|_\Gamma = 0, \tag{2}$$

unde Γ este frontiera netedă pe porțiuni a domeniului mărginit Ω din spațiul E_m de variabile $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Vom presupune că

$A_{jk} \in C^{(1)}(\bar{\Omega})$, iar B_k și C sînt mărginite și măsurabile în Ω, precum și că ecuația (1) este eliptică nedegenerată în $\bar{\Omega}$, adică

$$A_{jk}(x)\, t_j t_k \geqslant \mu_0 \sum_{k=1}^{m} t_k^2,\ \mu_0 = \text{const} > 0.$$

Introducem notațiile

$$Au = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right),\ u|_\Gamma = 0, \tag{3}$$

și

$$Ku = -B_k\frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu,\ u|_\Gamma = 0, \tag{4}$$

Operatorul A este pozitiv definit în $L_2(\Omega)$ (cap. 17, §1) și are spectru discret (prezentul capitol, §2). Este evident, de asemenea, că operatorul K acționează din H_A în $L_2(\Omega)$. Să arătăm că acest operator este mărginit. Fie $|B_k(x)| \leqslant Q$, $|C(x)| \leqslant Q$, $Q = \text{const}$, atunci

$$\|Ku\| \leqslant Q\left\{\sum_{k=1}^{m}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\| + \|u\|\right\}. \tag{5}$$

Conform inegalității lui Cauchy, obținem

$$\sum_{k=1}^{m}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\| \leqslant \sqrt{m}\left[\sum_{k=1}^{m}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|^2\right]^{1/2} = \sqrt{m}\left\{\int_\Omega \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 \mathrm{d}x\right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{m}{\mu_0}}\left\{\int_\Omega A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\,\mathrm{d}x\right\}^{1/2} = \sqrt{\frac{m}{\mu_0}}\,|u|_A.$$

Dacă γ este constanta de pozitivă definire a operatorului (3), atunci $\|u\| \leqslant \gamma^{-1}|u|_A$ și din inegalitatea (5) obținem

$$\|Ku\| \leqslant Q\left(\sqrt{\frac{m}{\mu_0}} + \frac{1}{\gamma}\right)|u|_A. \tag{6}$$

Inegalitatea (6) arată că operatorul K acționează mărginit din H_A în $L_2(\Omega)$ și afirmația este astfel demonstrată.

Aşadar, toate condiţiile §6 sînt îndeplinite şi pentru soluţia generalizată a problemei (1)—(2) are loc teorema lui Fredholm formulată la sfîrşitul §6. Soluţia generalizată amintită o vom numi de asemenea *soluţie slabă* a problemei (1)—(2).

Problema Neumann se formulează mai comod pentru ecuaţia scrisă sub forma

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+u+\lambda\left(B_k\frac{\partial u}{\partial x_k}+Cu\right)=f(x); \qquad (7)$$

condiţia la limită o scriem ca de obicei:

$$\left[A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu,\ x_j)\right]_\Gamma=0. \qquad (8)$$

Este indicat să punem

$$Au=-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+u,\quad Nu=0, \qquad (9)$$

şi

$$Ku=B_k\frac{\partial u}{\partial x_k}+Cu,\quad Nu=0; \qquad (10)$$

cu Nu s-a notat partea stîngă a egalităţii (8). Pentru soluţia slabă a problemei (7)—(8) sînt de asemenea valabile afirmaţiile din §6.

Capitolul 19

SOLUŢII TARI

Principalul scop al capitolului de faţă îl constituie demonstrarea afirmaţiei că soluţiile slabe ale primei sau celei de a doua probleme la limită pentru ecuaţia eliptică nedegenerată de ordinul al doilea sînt şi soluţii tari; aici admitem ipoteza că coeficienţii şi termenii liberi ai ecuaţiei şi ai condiţiilor la limită, precum şi domeniile considerate satisfac condiţiile formulate în cap. 17.

Amintim că, pe baza definiţiei dată în cap. 17, soluţia slabă este soluţia ce corespunde unei probleme variaţionale (sau, ceea ce este acelaşi lucru, funcţia ce satisface identitatea integrală corespunzătoare); despre această soluţie se ştie că aparţine spaţiului energetic al operatorului problemei corespunzătoare. De aici rezultă că în cazul unei ecuaţii de ordinul al doilea, soluţia slabă are primele derivate generalizate de ordinul întîi de pătrat integrabil în domeniul dat. Soluţia tare, conform definiţiei dată tot în cap. 17, are derivate generalizate de ordinul al doilea (este vorba, ca mai înainte, de ecuaţii de ordinul al doilea). Vom demonstra că în cazul general soluţiile slabe ale problemelor Dirichlet şi Neumann au în domeniul considerat derivate de ordinul al doilea generalizate (şi, prin urmare, sînt soluţii tari) şi că aceste derivate sînt de pătrat integrabil în orice subdomeniu interior. În cap. 17, §4 a fost demonstrată o astfel de afirmaţie pentru ecuaţia lui Laplace. În încheiere vom arăta că derivatele de ordinul al doilea sînt de pătrat integrabil pe întreg domeniul, dacă frontiera sa este suficient de netedă.

§ 1. SOLUŢIA ECUAŢIEI LUI LAPLACE PENTRU PARALELIPIPED

În capitolul 17, §1 s-a construit soluţia slabă $u_0(x)$ a problemei Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace $-\Delta u=f(x)$, $u|_{\partial\pi}=0$, $f\in L_2(\pi)$ în paralelipipedul $\Pi=\{x: 0<x_k<a_k$. Această soluţie are forma (vezi formula (1.21) cap. 17):

$$u_0(x)=\frac{2^m}{\pi^2|\Pi|}\sum_{n_1,\ n_2,\ldots,\ n_m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{n_k^2}{a_k^2}\right)^{-1}a_{n_1n_2\ldots n_m}\prod_{k=1}^{m}\sin\frac{n_k\pi x_k}{a_k}, \qquad (1)$$

unde

$$a_{n_1 n_2 \dots n_m} = \int_{\Pi} f(x) \prod_{k=1}^{m} \sin \frac{n_k \pi x_k}{a_k} \, dx. \tag{2}$$

Scopul acestui paragraf este de a arăta că $u_0 \in W_2^{(2)}(\Pi)$ și de a obține evaluările corespunzătoare.

Notăm

$$\frac{2^m}{\pi^2 |\Pi|} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{n_k^2}{a_k^2} \right)^{-1} a_{n_1 n_2 \dots n_m} = b_{n_1 n_2 \dots n_m}, \tag{3}$$

astfel încît

$$u_0(x) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_{m-1}}^{\infty} b_{n_1 n_2, \dots, n_m} \prod_{k=1}^{m} \sin \frac{n_k \pi x_k}{a_k}. \tag{4}$$

Diferențiind formal seria (4) în raport cu x_j, obținem o nouă serie

$$\frac{\pi}{a_j} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_{m-1}}^{\infty} n_j b_{n_1 n_2 \dots n_m} \cos \frac{n_j \pi x_j}{a_j} \prod_{k=1,\ k \neq j}^{m} \sin \frac{n_k \pi x_k}{a_k}. \tag{5}$$

Abstracție făcînd de factorul $2^{m/2}/\sqrt{|\Pi|}$, mărimile $a_{n_1 n_2 \dots n_m}$ reprezintă coeficienții Fourier ai funcției $f(x)$ în raport cu sistemul

$$\left\{ \frac{2^{m/2}}{\sqrt{|\Pi|}} \prod_{k=1}^{m} \sin \frac{n_k \pi x_k}{a_k} \right\}.$$

ortonormat în $L_2(\Pi)$. De aici rezultă că seria

$$\sum_{n_1, n_2, \dots, n_m = 1} a_{n_1 n_2 \dots n_m}^2 \tag{6}$$

este convergentă. Totodată sînt convergente și seriile

$$\sum_{n_1 n_2, \dots, n_m = 1}^{\infty} n_j^2 b_{n_1 n_2 \dots n_m}^2, \qquad j = 1, 2, \dots, m, \tag{7}$$

$$\sum_{n_1, n_2, \dots, n_m = 1}^{\infty} n_j^2 n_l^2 b_{n_1 n_2 \dots n_m}^2, \qquad j, l = 1, 2, \dots, m. \tag{8}$$

Din convergența seriei (7) rezultă că seria (5) converge în norma lui $L_2(\Pi)$; desemnăm suma sa prin $v_j(x)$. Este evident că și seria (4) converge în aceeași normă. Din convergența seriilor menționate rezultă următoarele: dacă se notează

$$u_N(x) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_m = 1}^{N} b_{n_1 n_2 \dots n_m} \prod_{k=1}^{m} \sin \frac{n_k \pi x_k}{a_k}, \tag{9}$$

atunci $u_N(x) \xrightarrow[N \to \infty]{} u_0(x)$ și $\frac{\partial u_N}{\partial x_j} \xrightarrow[N \to \infty]{} v_j$, $j = 1, 2, \dots, m$ în norma lui $L_2(\Pi)$. Conform teoremei 3.3.1 funcția $u_0 \in W_2^{(1)}(\Pi)$ (acest lucru rezultă și din proprietățile generale ale soluției slabe) și

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_j} = \frac{\pi}{a_j} \sum_{n_1, n_2 \dots n_m = 1}^{\infty} n_j b_{n_1 n_2 \dots n_m} \cos \frac{n_j \pi x_j}{a_j} \prod_{k=1,\ k \neq j}^{m} \sin \frac{n_k \pi x_k}{a_k}. \tag{10}$$

Să diferențiem formal seria (10) în raport cu x_l. Ținînd seama de convergența seriei (8), se arată, ca mai sus, că $u_0 \in W_2^{(2)}(\Pi)$ și că derivatele de ordinul al doilea se pot obține diferențiind de două ori, termen cu termen, seria (4):

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\pi^2}{a_i a_j} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_m = 1}^{\infty} n_i n_j b_{n_1 n_2 \dots n_m} \times$$

$$\times \cos \frac{n_i \pi x_i}{a_i} \cos \frac{n_j \pi x_j}{a_j} \prod_{k=1,\ k \neq i, j}^{m} \sin \frac{n_k \pi x_k}{a_k}, \quad i \neq j. \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_j^2} = -\frac{\pi^2}{a_j^2} \sum_{n_1 n_2, \dots, n_m = 1}^{\infty} n_j^2 b_{n_1, n_2 \dots n_m} \prod_{k=1}^{m} \sin \frac{n_k \pi x_k}{a_k}.$$

În încheiere să arătăm că are loc inegalitatea

$$\|u_0\|_{2,2} \leqslant K \|f\|, \qquad K = \text{const}. \tag{12}$$

Norma în $W_2^{(2)}(\Pi)$ este dată de

$$\|u\|_{2,2}^2 = \|u\|^2 + \sum_{i,j=1}^{m} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|^2.$$

Din formula (1.21) cap. 17 rezultă egalitatea

$$\|f\|^2 = \frac{2^m}{|\Pi|} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_m = 1}^{\infty} a_{n_1 n_2 \dots n_m}^2. \tag{13}$$

Pe de altă parte, conform formulelor (11) și (3), avem

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|^2 = \frac{2^m}{|\Pi|} \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_m = 1}^{\infty} \frac{n_i^2 n_j^2}{a_i^2 a_j^2} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{n_k^2}{a_k^2} \right)^{-2} a^2_{n_1 n_2 \ldots n_m}. \quad (14)$$

Evident că

$$\frac{n_i^2 n_j^2}{a_i^2 a_j^2} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{n_k^2}{a_k^2} \right)^{-2} < \frac{1}{4}$$

și prin urmare

$$\left\| \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j} \right\|^2 \leqslant \frac{2^{m-2}}{|\Pi|} \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_m = 1} a^2_{n_1 n_2 \ldots n_m} = \frac{1}{4} \|f\|^2. \quad (15)$$

Conform formulei (1), avem

$$\|u_0\|^2 = \frac{2^m}{\pi^4 |\Pi|} \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_m = 1}^{\infty} a^2_{n_1 n_2 \ldots n_m} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{n_k^2}{a_k^2} \right)^{-2} \leqslant \quad (16)$$

$$\leqslant \frac{2^m}{\pi^4 |\Pi|} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{a_k^2} \right)^{-2} \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_m = 1}^{\infty} a^2_{n_1 n_2 \ldots n_m} = \frac{1}{\pi^4} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{a_k^2} \right)^{-2} \|f\|^2.$$

Inegalitatea (12) rezultă, evident, din relațiile (15) și (16) unde

$$K^2 = \frac{m^2}{4} + \frac{1}{\pi^4} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{a_k^2} \right)^{-2}. \quad (17)$$

Pentru cele ce urmează este important faptul că mărimea K rămîne mărginită cînd $a_k \to 0$. În particular, dacă $a_k \leqslant 1$, atunci

$$K^2 \leqslant \frac{m^2}{4} + \frac{1}{m^2 \pi^2} = K_0^2. \quad (18)$$

§ 2. PRODUSUL SOLUȚIILOR SLABE CU FUNCȚII NETEDE

Să analizăm ecuația

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + Cu = f(x); \quad x \in \Omega, f \in L_2(\Omega), \quad (1)$$

cu condiția la limită Dirichlet sau Neumann. Fie funcția $\sigma \in C^{(2)}(\bar{\Omega})$. Dacă $u(x)$ are în Ω toate derivatele generalizate de ordinul întîi și

al doilea și satisface ecuația (1) atunci, după cum rezultă din calculele simple, funcția $v(x) = \sigma(x)u(x)$ este soluția ecuației

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) = F(x), \quad (2)$$

unde

$$F = \sigma f - 2A_{jk} \frac{\partial \sigma}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} - u \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial \sigma}{\partial x_k} \right) - C\sigma u. \quad (3)$$

Să presupunem acum că $\sigma \in \mathfrak{M}^{(2)}(\Omega_1)$, $\Omega_1 \subset \Omega$, $\partial\Omega_1 \in C^{(0,1)}$ și că u este soluția slabă a problemei Dirichlet sau Neumann pentru ecuația (1) în domeniul Ω. Să arătăm că în acest caz produsul $v = \sigma u$ este soluția slabă a problemei

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) = F(x), \quad x \in \Omega_1; \quad v|_{\partial\Omega_1} = 0. \quad (4)$$

În acest caz admitem ipoteza că A_{jk} și C verifică condițiile din cap. 17 și păstrăm notațiile adoptate în capitolul respectiv.

Conform celor demonstrate în § 2 și în §§ 7–8, cap. 17, $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$. De aici rezultă că $F \in L_2(\Omega)$ și cu atît mai mult $F \in L_2(\Omega_1)$. Deoarece u este soluție slabă, atunci $[u, \eta]_A = (f, \eta)$, $\forall \eta \in H_A$; unde A este operatorul $-\frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + Cu$ pentru condiția la limită omogenă Dirichlet sau Neumann. Mai explicit, putem scrie

$$\int_\Omega A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \, dx = \int_\Omega (f - Cu) \, \eta \, dx; \quad \forall \eta \in H_A. \quad (5)$$

Notăm cu H_0 spațiul energetic al problemei (4); produsul scalar și norma corespunzătoare le vom desemna respectiv cu $[,]_0$ și $|\cdot|_0$. Este evident că $v \in H_0$.

Să analizăm expresia

$$\forall \eta \in H_0; \quad [v, \eta]_0 = \int_{\Omega_1} A_{jk} \frac{\partial(\sigma u)}{\partial x_k} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \, dx =$$

$$= \int_{\Omega_1} \left[A_{jk} \sigma \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + A_{jk} u \frac{\partial \sigma}{\partial x_k} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \right] dx.$$

Pentru primul termen avem

$$\int_{\Omega_1} A_{jk}\sigma \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial \eta}{\partial x_j}\,dx = \int_{\Omega_1} A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial(\sigma\eta)}{\partial x_j}\,dx - \int_{\Omega_1} A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial \sigma}{\partial x_j}\eta\,dx;$$

şi deci

$$[v, \eta]_0 = \int_{\Omega_1} A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial(\sigma\eta)}{\partial x_j}\,dx + \int_{\Omega_1} A_{jk}\left(u\frac{\partial \sigma}{\partial x_k}\frac{\partial \eta}{\partial x_j} - \eta\frac{\partial \sigma}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)dx.$$

Prelungim funcţia η în tot domeniul Ω, punînd $\eta(x) = 0$, $x \in \Omega \setminus \Omega_1$. Evident, printr-o astfel de prelungire $\eta \in H_A$. Ultima identitate se poate scrie atunci astfel:

$$[v, \eta]_0 = \int_{\Omega} A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial(\sigma\eta)}{\partial x_j}\,dx + \int_{\Omega_1} A_{jk}\left(u\frac{\partial \sigma}{\partial x_k}\frac{\partial \eta}{\partial x_j} - \eta\frac{\partial \sigma}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)dx. \quad (6)$$

Evident, $\sigma\eta \in H_A$; prima integrală din (6) este egală cu $[u, \sigma\eta]_A$. Dar pe baza identităţii (5)

$$[u, \sigma\eta]_A = (f - Cu, \sigma\eta) = \int_{\Omega} (f - Cu)\,\sigma\eta\,dx = \int_{\Omega_1} (f - Cu)\,\sigma\eta\,dx,$$

obţinîndu-se egalitatea

$$[v, \eta]_0 = \int_{\Omega_1}\left[(f - Cu)\sigma - A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial \sigma}{\partial x_j}\right]\eta\,dx + \int_{\Omega_1} A_{jk}u\frac{\partial \sigma}{\partial x_k}\frac{\partial \eta}{\partial x_j}dx. \quad (7)$$

Se poate arăta că în Ω_1 pentru funcţii din $W_2^{(1)}$ are loc formula de integrare prin părţi. Aplicînd această formulă celei de a doua integrale din (7), η iese de sub simbolul de derivare. Prin aceasta integrala de suprafaţă dispare, deoarece $\eta \in H_0$ şi deci $\eta|_{\partial\Omega_1} = 0$. Formula (7) devine astfel

$$[v, \eta]_0 = \int_{\Omega_1}\left[(f - Cu)\sigma - 2A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial \sigma}{\partial x_j} - u\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial \sigma}{\partial x_k}\right)\right]\eta dx = (F, \eta).$$

Ultima relaţie arată că v este soluţia slabă a problemei (4).

§ 3. SOLUŢII TARI PENTRU DOMENII OARECARE

Să analizăm soluţia slabă a problemei Dirichlet sau Neumann pentru ecuaţia

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + Cu = f(x), \quad f \in L_2(\Omega), \quad (1)$$

într-un domeniu mărginit $\Omega \in E_m$ cu frontiera $\partial\Omega = \Gamma$ netedă pe porţiuni. Condiţia la limită a problemei este presupusă omogenă. Coeficienţii A_{jk} şi C verifică condiţiile din cap. 17. În cazul problemei Neumann, cînd $C(x) = 0$, vom considera că Ω este reuniunea unui număr finit de domenii stelate.

Teorema 19.3.1. *Fie $u(x)$ soluţia slabă pentru problema la limită omogenă Dirichlet sau Neumann* (1) *în domeniul Ω şi fie Ω_1 un subdomeniu interior oarecare al lui Ω; atunci $u \in W_2^{(2)}(\Omega_1)$.*

Demonstraţia conţine cinci etape.

1°. Fie x_0 un punct oarecare din Ω. Construim cubul Q (fig. 23) cu muchiile de lungime 4ε, paralele cu axele de coordonate, şi cu centrul în x_0; alegem ε astfel încît cubul respectiv împreună cu frontiera sa să fie în Ω. Construim funcţia $\sigma \in \mathfrak{M}^{(2)}(Q)$ astfel încît $\sigma(x) = 1$, $x \in B$, unde B este bila cu centrul în x_0 de rază ε', $\varepsilon' < \varepsilon$. Acest lucru poate fi făcut, de exemplu, alegîndu-l pe ε', $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, şi punînd

$$\sigma_0(x) = \begin{cases} 1, & |x - x_0| < 2\varepsilon', \\ 0, & |x - x_0| \geqslant 2\varepsilon'. \end{cases} \quad \forall x \in E_m,$$

Mediem funcţia $\sigma_0(x)$, luînd raza de mediere mai mică decît fiecare din numerele ε' şi $2(\varepsilon - \varepsilon')$. Restricţia funcţiei la Ω, obţinută prin mediere, poate fi luată drept $\sigma(x)$.

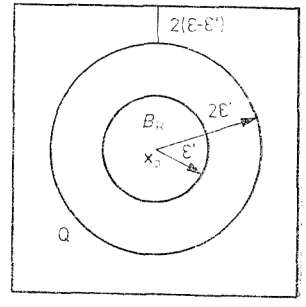

Fig. 23

Conform celor demonstrate în § 2, produsul $v = \sigma u$ este soluţia slabă a problemei

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial v}{\partial x_k}\right) = F(x), \quad x \in Q; \quad v|_{\partial Q} = 0, \quad (2)$$

în care termenul liber F este definit de formula (2.3).

2°. Transformăm acum ecuaţia diferenţială (2): desfacem parantezele din stînga şi apoi, printr-o transformare liniară nedegenerată, aducem ecuaţia la forma canonică (vezi cap. 9, §3) în punctul x_0.

Dacă $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ sînt noile coordonate, atunci ecuația (2) capătă forma

$$-\tilde{A}_{jk}(\xi)\frac{\partial^2 v}{\partial \xi_j\, \partial \xi_k} + \tilde{A}_k \frac{\partial v}{\partial \xi_k} = F(x) = F_1(\xi).$$

Notînd cu ξ_0 transformatul lui x_0, avem $\tilde{A}_{jk}(\xi_0) = v_{jk}\,\delta_{jk}$, $v_k = \text{const} > 0$; incluziunile $A_{jk} \subset C^{(1)}(\Omega)$ și $A_k \in C(\overline{\Omega})$ rămîn valabile. Punînd acum $y_k = \sqrt{v_k}\,\xi_k$, aducem ecuația (2) la forma

$$-B_{jk}(y)\frac{\partial^2 v}{\partial y_j\, \partial y_k} + B_k \frac{\partial v}{\partial y_k} = F_1(\xi) = F_2(y); \qquad (3)$$

aici $B_{jk}(y) = (\nu_j \nu_k)^{-1/2} A_{jk}(\xi)$ și prin urmare $B_{jk}(y_0) = \delta_{jk}$, unde y_0 este transformatul lui ξ_0. În sfîrșit, izolînd în stînga operatorul lui Laplace, ajungem în final la ecuația

$$-\Delta_y v - [B_{jk}(y) - \delta_{jk}]\frac{\partial^2 v}{\partial y_j \partial y_k} + B_k \frac{\partial v}{\partial y_k} = F_2(y). \qquad (4)$$

Drept rezultat al trecerii de la coordonatele x_k la y_k, cubul Q și bila B se transformă respectiv în paralelipipedul oblic Q' și în elipsoidul B'. Dacă ε este suficient de mic, atunci în spațiul coordonatelor y_k poate fi construit un paralelipiped dreptunghic Π, astfel încît $B \subset \Pi \subset Q'$. Funcția v (exprimată în variabilele y_k) este soluția slabă a ecuației (4) cu condiția la limită

$$v|_{\partial\Pi} = 0. \qquad (5)$$

3°. Notăm cu G inversul operatorului problemei Dirichlet pentru ecuația Laplace în paralelipipedul Π; expresia operatorului G este dată de formulele (1.1) și (1.2). După cum am văzut (formula (1.12)), operatorul G acționează mărginit din $L_2(\Pi)$ în $W_2^{(2)}(\Pi)$. Aplicînd ecuației (4) operatorul G, obținem o nouă ecuație

$$v(y) - Pv - Tv = \Phi(y), \qquad (6)$$

unde

$$Pv = G\left[(B_{jk} - \delta_{jk})\frac{\partial^2 v}{\partial y_j \partial y_k}\right], \quad Tv = G\left(B_k \frac{\partial v}{\partial y_k}\right), \quad \Phi(y) = GF_2. \qquad (7)$$

Deoarece $F_2 \subset L_2(\Pi)$, atunci $\Phi \in W_2^{(2)}(\Pi)$. Să arătăm că operatorii P și T acționează în $W_2^{(2)}(\Pi)$, că T este compact, iar P este mărginit și pentru ε suficient de mic este de normă oricît de mică.

Fie M mulțimea funcțiilor din $W_2^{(2)}(\Pi)$, mărginită în norma acestui spațiu. $W_2^{(2)}(\Pi)$ se scufundă compact în $W_2^{(1)}(\Pi)$ și de aceea mulțimea derivatelor de forma $\partial v/\partial y_k$, $v \in M$, este compactă în $L_2(\Pi)$. Cum funcțiile B_k sînt mărginite, mulțimea funcțiilor $B_k \partial v/\partial y_k$ este compactă în $L_2(\Pi)$. În sfîrșit, operatorul G, care acționează mărginit din $L_2(\Pi)$ în $W_2^{(2)}(\Pi)$, transformă ultima mulțime într-o nouă mulțime, de asemenea compactă în $W_2^{(2)}(\Pi)$. Aceasta arată că operatorul T este compact în $W_2^{(2)}(\Pi)$.

Să revenim la operatorul P. Coeficienții $B_{jk}(y)$ sînt continui și $B_{jk}(y_0) = \delta_{jk}$, de aceea dacă ε este suficient de mic, atunci $|B_{jk}(y) - \delta_{jk}| < \tilde{\sigma}$, unde $\tilde{\sigma}$ este un număr pozitiv fixat oarecare. Acum conform inegalității triunghiului și inegalității lui Cauchy, avem

$$\left\|(B_{jk}(y) - \delta_{jk})\frac{\partial^2 v}{\partial y_j \partial y_k}\right\|_{L_2(\Pi)} \leqslant \tilde{\sigma} \sum_{j,k=1}^{m} \left\|\frac{\partial^2 v}{\partial y_j \partial y_k}\right\|_{L_2(\Pi)} \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{\sigma}\sqrt{m}\left\{\sum_{j,k=1}^{m}\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial y_j \partial y_k}\right\|^2\right\}^{1/2} \leqslant \tilde{\sigma}\sqrt{m}\,\|v\|_{W_2^{(2)}(\Pi)}.$$

Mărimea ε poate fi luată oricît de mică și deci putem presupune că $\varepsilon < 1$. Conform formulelor (1.12) și (1.18) obținem inegalitatea

$$\|Pv\|_{W_2^{(2)}(\Pi)} \leqslant \tilde{\sigma}\sqrt{m}\,K_0\,\|v\|_{W_2^{(2)}(\Pi)}.$$

De aici se observă că P este un operator mărginit în $W_2^{(2)}(\Pi)$ și că norma sa poate fi făcută oricît de mică cînd ε este suficient de mic. Fie ε astfel încît $\tilde{\sigma}\sqrt{m}\,K_0 \leqslant 1/2$. Atunci $\|P\| \leqslant 1/2$, operatorul $(I - P)^{-1}$ (I este operatorul identic) există, este definit în tot spațiul $W_2^{(2)}(\Pi)$ și este mărginit, anume $\|(I - P)^{-1}\| \leqslant 2$.

4°. Să arătăm că ecuația (6) are o soluție și numai una singură în $W_2^{(2)}(\Pi)$. Aplicăm operatorul $(I - P)^{-1}$ ecuației (6):

$$v(y) - (I - P)^{-1} Tv = (I - P)^{-1}\Phi. \qquad (8)$$

Operatorul $(I - P)^{-1} T$, ca produs de operatori mărginiți și compacți este compact și deci ecuației (8) i se poate aplica teoria lui Fredholm; această ecuație are cel mult o soluție. Într-adevăr, să presupunem că ar avea două soluții. Fiecare soluție a ecuației (8) este tare și prin urmare este și soluție slabă a problemei (4)—(5). Trecînd la variabilele x_k, obținem două soluții slabe ale problemei (2), ceea ce este imposibil deoarece operatorul acesteia este pozitiv definit.

Astfel, ecuația (8) are în $W_2^{(2)}(\Pi)$ cel mult o soluție. Corespunzător teoriei lui Fredholm, această ecuație are soluție. Fie v soluția sa.

Trecînd la coordonatele x_k, găsim că funcția v este soluția tare a problemei (2) în $\widetilde{\Pi}$, unde $\widetilde{\Pi}$ este imaginea paralelipipedului Π prin trecerea de la coordonatele y_k la x_k; mai mult, v este din clasa $W_2^{(2)}(\widetilde{\Pi})$. Definind funcția v ca nulă în mulțimea $Q \setminus \widetilde{\Pi}$, obținem în acest fel soluția slabă a problemei (2) în Q. Dar problema (2) are în Q soluția unică $v = u(x)\sigma(x)$. De aici rezultă că $u(x)\sigma(x) = v(x)$ și deci $u\sigma \in W_2^{(2)}(\widetilde{\Pi})$. Dar $B \subset \widetilde{\Pi}$ și cu atît mai mult $u\sigma \in W_2^{(2)}(B)$. Dacă $x \in B$, atunci $\sigma(x) = 1$ și deci $u \in W_2^{(2)}(B)$.

Este adevărată inegalitatea

$$\|u\|_{W_2^{(2)}(B)} \leqslant N \|f\|_{L_2(\Omega)}, \tag{9}$$

în care N este o anumită constantă. Să arătăm aceasta. Din faptul că ecuația (8) are soluție unică, rezultă existența rezolventei acestei ecuații și că aceasta este mărginită. Fie N_1 norma sa; în acest caz

$$\|u\|_{W_2^{(2)}(\Pi)} \leqslant N_1 \|(I - P)^{-1}\Phi\|_{W_2^{(2)}(\Pi)} \leqslant 2N_1 \|\Phi\|_{W_2^{(2)}(\Pi)}.$$

Conform formulei (7) și inegalității (1.18) avem

$$\|v\|_{W_2^{(2)}(\Pi)} \leqslant 2N_1 K_0 \|F_2\|_{L_2(\Pi)}. \tag{10}$$

Transformarea liniară a coordonatelor carteziene nu modifică spațiul W_p^k, ducîndu-i numai norma în una echivalentă; în particular,

$$\|F\|_{L_2(\Pi)} \leqslant c\|F\|_{L_2(\widetilde{\Pi})} \leqslant c\|F\|_{L_2(\Omega)}, \quad c = \text{const} \tag{11}$$

și

$$\|v\|_{W_2^{(2)}(\widetilde{\Pi})} \leqslant c_1 \|v\|_{W_2^{(2)}(\Pi)}, \quad c_1 = \text{const}. \tag{12}$$

Din inegalitățile (10)—(12) găsim

$$\|v\|_{W_2^{(2)}(\widetilde{\Pi})} \leqslant 2cc_1 N_1 K_0 \|F\|_{L_2(\Omega)}. \tag{13}$$

Să evaluăm norma din partea dreaptă. Ținînd seama că funcțiile $\sigma(x)$ și $A_{jk}(x)$ sînt continuu diferențiabile, iar funcția $C(x)$ este mărginită, pe baza formulei (2.3), obținem

$$\|F\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c_2\|f\|_{L_2(\Omega)} + c_3\|u\|_{L_2(\Omega)} + c_4|u|; \tag{14}$$

liniile verticale aldine desemnează norma energetică a problemei Dirichlet sau Neumann, a cărei soluție este funcția $u(x)$. Conform inegalităților (5.9) și (5.10) cap. 4, avem

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \gamma^{-2}\|f\|_{L_2(\Omega)}; \quad |u| \leqslant \gamma^{-1}\|f\|_{L_2(\Omega)},$$

unde γ este constanta din pozitiva definire a problemei analizate. Înlocuind în (14), obținem

$$\|F\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c_5\|f\|; \quad c_5 = \text{const}.$$

Astfel din inegalitatea (13) rezultă

$$\|v\|_{W_2^{(2)}(\widetilde{\Pi})} \leqslant N\|f\|_{L_2(\Omega)}; \quad N = 2cc_1c_5N_1K_0;$$

înlocuind $\|v\|_{W_2^{(2)}(\widetilde{\Pi})}$ cu mărimea mai mică $\|v\|_{W_2^{(2)}(B)} = \|u\|_{W_2^{(2)}(B)}$, ajungem la inegalitatea (9).

5°. Fie Ω_1 un subdomeniu interior al lui Ω. Conform celor demonstrate la punctul 4°, fiecare punct $x \in \bar{\Omega}$ poate fi acoperit de bila B, în care soluția slabă $u(x)$ este și soluție tare, anume $u \in W_2^{(2)}(B)$ și astfel inegalitatea (9) este satisfăcută. Conform lemei lui Borel, domeniul închis $\bar{\Omega}_1$ poate fi acoperit cu un număr finit de astfel de bile. Să arătăm că soluția slabă $u(x)$ este tare în Ω_1, adică $u \in W_2^{(2)}(\Omega_1)$ și satisface inegalitatea

$$\|u\|_{W_2^{(2)}(\Omega_1)} \leqslant N_0\|f\|_{L_2(\Omega)}; \quad N_0 = \text{const}. \tag{15}$$

Fie $B^{(1)}$ și $B^{(2)}$ două bile de intersecție nevidă oarecare din apropierea lui Ω_1. Conform cap. 3, § 4, $u \in W_2^{(2)}(B^{(1)} \cup B^{(2)})$. Dacă $B^{(3)}$ este o altă bilă a aceleiași acoperiri ce intersectează reuniunea $B^{(1)} \cup B^{(2)}$, atunci pe baza acelorași rezultate $u \in W_2^2\left(\bigcup_{n=1}^{3} B^{(n)}\right)$. Continuînd în același mod, deducem că $u \in W_2^{(2)}\left(\bigcup_{n=1}^{k} B^{(n)}\right)$, unde k este numărul bilelor din acoperire. Dar domeniul Ω_1 este conținut în acoperire; conform teoremei 2.4.2, $u \in W_2^{(2)}(\Omega_1)$. Mai departe,

$$\|u\|_{W_2^{(2)}(\Omega_1)} \leqslant \sum_{n=1}^{k} \|u\|_{W_2^{(2)}(B^{(n)})}$$

și, conform inegalității (9),

$$\|u\|_{W_2^{(2)}(\Omega_1)} \leqslant N_0\|f\|_{L_2(\Omega)}; \quad N_0 = kN.$$

Menționăm că pe parcursul demonstrației s-a stabilit evaluarea (15) pentru norma din $W_2^{(2)}$. Cum subdomeniul Ω_1 este oarecare, rezultă că soluția slabă $u(x)$ este și soluție tare în domeniul Ω.

§ 4. CONDIȚII LA LIMITĂ NEOMOGENE

Să analizăm ecuația eliptică omogenă

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+C(x)\,u=0 \qquad (1)$$

pentru condițiile la limită neomogene ale problemei Dirichlet

$$u|_\Gamma=\varphi(x) \qquad (2)$$

sau Neumann

$$\left[A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu, x_j)\right]_\Gamma=h(x). \qquad (3)$$

Presupunem că datele ambelor probleme satisfac condițiile din cap. 17. În particular, funcția φ satisface condiția de prelungibilitate : există o funcție $\psi\in W_2^{(1)}(\Omega)$, astfel încît $\psi(x)|_\Gamma=\varphi(x)$.

În aceste condiții este adevărată următoarea teoremă.

Teorema 19.4.1. *Fie $u_0(x)$ soluția slabă a problemei Dirichlet* (1), (2), *sau a problemei Neumann* (1), (3). *Dacă Ω_1 este un subdomeniu interior oarecare al lui Ω, atunci $u_0\in W_2^{(2)}(\Omega_1)$.*

Această teoremă se demonstrează în același mod ca și teorema din paragraful precedent. Schițăm pe scurt demonstrația.

Soluția slabă $u_0(x)$ a problemei Dirichlet (1), (2) se definește prin identitatea integrală

$$\int_\Omega\left(A_{jk}\frac{\partial\eta}{\partial x_j}\frac{\partial u_0}{\partial x_k}+Cu_0\eta\right)dx=0,\qquad\forall\eta\in H_{\mathfrak{A}} \qquad (4)$$

(vezi formula (3.9) cap. 17). În mod analog, soluția slabă a problemei Neumann se definește (vezi §§ 7—9, cap. 17) prin identitatea integrală

$$\int_\Omega\left(A_{jk}\frac{\partial\eta}{\partial x_j}\frac{\partial u_0}{\partial x_k}+Cu_0\eta\right)dx=\int_\Gamma h\eta\,d\Gamma,\quad\forall\eta\in W_2^{(1)}(\Omega). \qquad (5)$$

Ca și în § 3, construim cubul Q situat în interiorul lui Ω și punem $v=\sigma u_0$. Ca mai înainte, funcția v este soluția slabă a problemei (3.2), dar cu funcția F ceva mai simplă : în cazul dat,

$$F(x)=-2A_{jk}\frac{\partial\sigma}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}-u\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial\sigma}{\partial x_k}\right)-C\sigma u. \qquad (6)$$

Raționamentul se desfășoară în continuare ca în § 3, fără nici o modificare.

§ 5. CAZUL FRONTIERELOR SUFICIENT DE NETEDE

În acest caz se presupune că funcțiile date pe frontieră sînt suficient de netede și că putem arăta că soluțiile slabe ale problemelor Dirichlet și Neumann aparțin clasei $W_2^{(2)}$ în tot domeniul analizat. Vom studia aici numai problema Dirichlet cu condiții la limită omogene, demonstrînd următoarea teoremă.

Teorema 19.5.1. *Fie că $A_{jk}(x)$ și $C(x)$ satisfac condițiile* §1, cap. 17 *și fie $\Omega\subset E_m$ un domeniu mărginit de frontieră $\partial\Omega=\Gamma\in C^{(2)}$. Atunci soluția slabă a problemei*

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+C(x)\,u=f(x),\quad f\in L_2(\Omega);\quad u|_\Gamma=0, \qquad (1)$$

aparține clasei $W_2^{(2)}(\Omega)$.

Fie δ astfel încît $0<\delta<\frac{1}{3}\,d$, unde d este raza sferei Liapunov pentru suprafața Γ. Ca de obicei, vom nota prin Ω_h banda frontieră de lățimea h. Conform teoremei 19.3.1 pentru soluția slabă a problemei (1) avem $u\in W_2^{(2)}(\Omega\setminus\Omega_{\delta/2})$. Să arătăm că $u\in W_2^{(2)}(\Omega_\delta)$: atunci nu va fi greu să demonstrăm (vezi [46], p. 47) că $u\in W_2^{(2)}(\Omega)$.

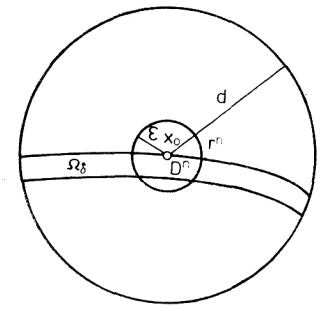

Fig. 24

Fie un punct oarecare $x_0\in\Gamma$ și să construim sfera Liapunov $S_d(x_0)$; ca de obicei, desemnăm cu $S_r(x)$ sfera de rază r cu centrul în x. Notăm respectiv prin D' și Γ' porțiunile din domeniul Ω și din suprafața Γ cuprinse în interiorul sferei $S_d(x_0)$ (pe fig. 24 este reprezentat cazul bidimensional). Mai departe, trasăm sfera $S_\varepsilon(x_0)$ de rază ε suficient de mică și fie Γ'' porțiunea din suprafața Γ ce se află în interiorul noii sfere, iar D'' porțiunea din banda Ω_δ situată în interiorul aceleiași sfere.

Introducem funcția $\sigma(x)$ cu următoarele proprietăți:

a) $\sigma \in C^{(2)}(\bar{\Omega})$;

b) $\sigma(x) \equiv 1$ în interiorul și pe frontiera lui $S_\varepsilon(x_0)$;

c) $\sigma(x) \equiv 0$ pe sfera $S_{3\varepsilon}(x_0)$ și în exteriorul ei. Este clar că $\sigma(x) \equiv 1$, dacă $x \in D''$. Funcția $\sigma(x)$ poate fi construită mediind funcția

$$\sigma_0(x) = \begin{cases} 1, & |x - x_0| \leqslant 2\varepsilon, \\ 0, & |x - x_0| > 2\varepsilon \end{cases} \tag{2}$$

luînd raza de mediere mai mică decît ε și restrîngînd funcția obținută la domeniul Ω.

Ca și în § 2 se arată că produsul $v(x) = \sigma(x)\, u(x)$ este soluția slabă a problemei

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\frac{\partial v}{\partial x_k}\right) = F(x); \qquad u|_{\partial D'} = 0, \tag{3}$$

în domeniul D'; funcția F se definește prin formula (2.3).

Fie că ecuația porțiunii de suprafață Γ' în coordonate locale are forma

$$\xi_m = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}); \tag{4}$$

este evident că $f \in C^{(2)}$. Introducem noile variabile independente $y_1, y_2, \ldots, y_m$ după formulele

$$y_k = \xi_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant m-1; \quad y_m = \xi_m - f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}). \tag{5}$$

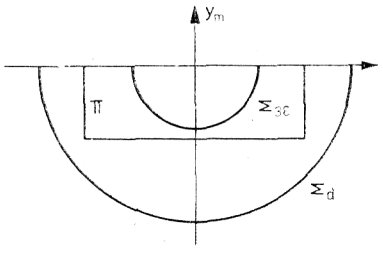

Fig. 25

Transformarea (5) duce domeniul D' într-un domeniu nou $\tilde{D}'$, a cărui porțiune de frontieră $\tilde{\Gamma}$, imagine a suprafeței Γ', se găsește în planul $y_m = 0$. Menționăm că punctul x_0 trece în originea coordonatelor spațiului variabilelor y_k (fig. 25). Sferele $S_\varepsilon(x_0)$ și $S_d(x_0)$ se transformă în anumite suprafețe Σ_ε și Σ_d; dacă raza d se ia suficient de mică, atunci aceste suprafețe vor fi oricît de apropiate de sferele cu centrul în originea coordonatelor și de raze respectiv egale cu ε și d. În domeniul D' transformarea (5) este bijectivă, de două ori continuu diferențiabilă și are jacobianul identic egal cu unitatea. O astfel de transformare păstrează evident clasa $W_2^{(2)}$.

Dacă ε este suficient de mic, atunci se poate construi paralelipipedul Π (vezi fig. 25) cu următoarele proprietăți: una din fețele sale este în planul $y_m = 0$; el se află în domeniul mărginit de suprafața Σ_d și planul $y_m = 0$; conține domeniul mărginit de același plan $y_m = 0$ și suprafața $\Sigma_{3\varepsilon}$. În particular, el conține domeniul D''. Prin aceasta, pe acele fețe ale paralelipipedului pentru care $y_m < 0$, funcția σ se anulează. De aici rezultă că

$$v|_{\partial\Pi} = 0. \tag{6}$$

Ca rezultat al trecerii de la coordonatele x_k la y_k ecuația diferențială (3) capătă forma (vezi § 3)

$$-B_{jk}\frac{\partial^2 v}{\partial y_j \partial y_k} + B_k\frac{\partial v}{\partial y_k} = F_2(y). \tag{7}$$

Astfel, funcția v este soluția slabă a problemei (6)—(7) în paralelipipedul Π. Toate raționamentele următoare se desfășoară ca și în § 3, conducînd la concluzia că $u \in W_2^{(2)}(\Omega_\delta)$.

Capitolul 20

ECUAȚIA PROPAGĂRII CĂLDURII

În capitolul de față vom analiza ecuația căldurii. Mai exact, vom analiza clasa ecuațiilor parabolice, care pot fi privite ca ecuații generalizate ale căldurii în cazul unor medii cu proprietăți fizice mai complicate (medii neomogene și neizotrope) în spații de dimensiuni oarecare.

În ecuația căldurii una din variabilele independente reprezintă timpul, celelalte — coordonate spațiale. În legătură cu acestea vom folosi următoarele notații întrucîtva diferite de cele din capitolele precedente. În general numărul variabilelor independente va fi desemnat nu prin m ci $m+1$, primele m variabile desemnîndu-le prin $x_1, x_2, \ldots, x_m$, ultima prin t. Numerele $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sînt privite drept coordonatele carteziene ale punctului x ce aparține spațiului euclidian m-dimensional oarecare E_m. Vom respecta regula de notare a sumei adoptată în capitolele precedente: dacă într-un monom oarecare indicele variabilei ce ia valori de la 1 la m se repetă de două ori, atunci se efectuează sumarea de la 1 la m după acest indice.

Uneori, pentru simplificarea notațiilor, vom scrie x_{m+1} în loc de t.

Notațiile introduse aici vor fi folosite peste tot în capitolele următoare.

§ 1. ECUAȚIA PROPAGĂRII CĂLDURII ȘI CARACTERISTICILE EI

Să analizăm ecuația diferențială de ordinul al doilea cu $m+1$ variabile independente

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A_{jk}(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + A_k(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0(x, t)u = f(x, t),$$

$$A_{jk} = A_{kj}, \tag{1}$$

Matricea coeficienților ei dominanți are forma

$$\begin{Vmatrix} -A_{11} & -A_{12} \ldots -A_{1n} & 0 \\ -A_{21} & -A_{22} \ldots -A_{2n} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -A_{n1} & -A_{n2} \ldots -A_{nn} & 0 \\ 0 & 0 \ldots 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Una din variabilele proprii ale acestei matrici este egală cu zero, iar celelalte diferă numai prin semn de valorile caracteristice ale matricii coeficienților A_{jk}. Dacă aceste valori au același semn, atunci ecuația (1) este de tipul $(m, 0, 1)$ și prin urmare este parabolică; în acest caz ecuația (1) o vom numi ecuația căldurii.

Menționăm că expresia diferențială

$$-A_{jk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + A_k\frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0 u \tag{2}$$

care intră în ecuația căldurii este eliptică în variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

În cele ce urmează vom presupune că matricea coeficienților A_{jk} are valorile proprii strict pozitive, adică această matrice este pozitiv definită.

Să găsim caracteristicile ecuației (1). Dacă $\omega(x, t) = \text{const}$ este ecuația suprafeței caracteristice, atunci (vezi §2, cap. 9) funcția ω satisface ecuația

$$A_{jk}\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_k} = 0.$$

Dar cum matricea

$$\|A_{jk}\| \begin{matrix} j,\ k = m \\ j,\ k = 1 \end{matrix}$$

este pozitiv definită, este necesar ca $\partial\omega/\partial x_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, funcția ω depinzînd numai de t și ecuația suprafeței caracteristice capătă forma $\omega(t) = \text{const}$. Dacă într-un anumit interval $\omega'(t) \equiv 0$, atunci ω este identic constantă pe acest interval și ecuația $\omega = \text{const}$ nu definește nici o suprafață. Dacă însă $\omega'(t) \not\equiv 0$, atunci în vecinătatea oricărei valori t, unde $\omega'(t) \neq 0$, ecuația $\omega(t) = \text{const}$ poate fi rezolvată în raport de t, obținînd

$$t = \text{const}. \tag{3}$$

Astfel, *caracteristicile* ecuației căldurii sînt *planele m-dimensionale, normale la axa t.*

În cele ce urmează vom analiza de regulă ecuația căldurii în următoarele ipoteze particulare.

1. Expresia diferențială eliptică (2) are forma

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right), \tag{4}$$

deci ecuația căldurii capătă forma

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=f(x,t). \tag{5}$$

Uneori vom considera că $f(x, t) \equiv 0$ și vom analiza ecuația omogenă a căldurii ce are acum forma

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=0. \tag{6}$$

2. Coeficienții A_{jk} nu depind de t și sînt continuu diferențiabili în raport cu $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

3. Expresia eliptică (4) este nedegenerată.

§ 2. PRINCIPIUL DE MAXIM

În planul $t = 0$ (în spațiul euclidian m-dimensional E_m) să considerăm domeniul mărginit Ω cu frontiera Γ. Construim suprafața cilindrică de directoare Γ, cu generatoare paralele la axa t; porțiunea acestei suprafețe cuprinsă între planurile $t = 0$ și $t = T$, unde T este o constantă pozitivă, o notăm cu B_T. Mai notăm prin Ω_T proiecția domeniului Ω pe planul $t = T$ și prin Q_T domeniul din spațiul $(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$ cu frontiera $\Omega \cup B_T \cup \Omega_T$.

Introducem următoarele notații: dacă D este o mulțime oarecare în spațiul variabilelor $(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$, atunci $C^{(p,q)}(D)$ va reprezenta clasa funcțiilor care au pe D derivate continue de ordin $\leqslant p$ în raport cu $x_1, x_2, \ldots, x_m$ și derivate de ordin $\leqslant q$ continue în raport cu t.

Teorema 20.2.1. *Fie funcția*

$$u(x,t)\in C(\bar{Q}_T)\cap C^{(2,1)}(Q_T\cup\Omega_T) \tag{1}$$

ce satisface în Q_T ecuația omogenă a căldurii (1.6). *Atunci cea mai mare ca și cea mai mică valoare a funcției $u(x, t)$ în domeniul închis $\bar{Q}_T$ este luată pe $\Omega \cup B_T$.*

Este suficient să dăm demonstrația pentru cazul maximului: dacă funcția $u(x, t)$, care verifică condițiile din teoremă, își atinge minimul într-un anumit punct, atunci în același punct își atinge maximul funcția $-u(x, t)$ ce satisface și ea condițiile teoremei.

Notăm

$$M=\max_{(x,t)\in\bar{Q}_T}u(x,t),\quad \mu=\max_{(x,t)\in\Omega\cup B_T}u(x,t).$$

Este evident că $\mu \leqslant M$. Afirmația teoremei constă în aceea că $\mu = M$. Să presupunem contrariul: fie $\mu < M$. Atunci funcția $u(x, t)$, continuă în $\bar{Q}_T$, își atinge maximul într-un anumit punct (x_0, t_0), ce se găsește fie în Q_T, fie în Ω_T: astfel $u(x_0, t_0) = M$, $(x_0, t_0) \in Q \cup \Omega_T$.

Construim funcția ajutătoare

$$v(x,t)=u(x,t)+\frac{M-\mu}{2T}(t_0-t). \tag{2}$$

Dacă $(x, t) \in \Omega \cup B_T$, atunci $t_0 - t \leqslant t_0 \leqslant T$ și prin urmare

$$v(x,t)|_{(x,t)\in\Omega\cup B_T}\leqslant\mu+\frac{M-\mu}{2}=\frac{M+\mu}{2}<M.$$

Pe de altă parte, $v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M$.

Astfel, în exteriorul lui $\Omega \cup B_T$ există un punct în care funcția v ia valoarea M, în condițiile în care pe $\Omega \cup B_T$ valorile lui v sînt strict mai mici decît M. De aici rezultă că $v(x, t)$ își atinge în $\bar{Q}_T$ maximul într-un punct ce aparține fie lui Ω_T, fie lui Q_T.

Notăm prin (x_1, t_1) punctul în care funcția $v(x, t)$ își atinge maximul. Presupunem mai întîi că $(x_1, t_1) \in Q_T$. Pentru orice alegere a axelor ortogonale $Ox_1, Ox_2, \ldots, Ox_m$, în punctul (x_1, t_1) sînt îndeplinite condițiile necesare de maxim

$$\frac{\partial v}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x_k}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2}\leqslant 0,\ k=1,2,\ldots,m. \tag{3}$$

Pentru simplitate desemnăm prin L expresia diferențială din partea stîngă a ecuației căldurii (1.6). Calculăm mărimea Lv în punctul (x_1, t_1):

$$Lv\Big|_{(x_1,t_1)}=\left[\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial A_{jk}}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_k}-A_{jk}\frac{\partial^2 v}{\partial x_j\partial x_k}\right]_{(x_1,t_1)}=-A_{jk}\frac{\partial^2 v}{\partial x_j\partial x_k}\Big|_{(x_1,t_1}$$

Alegem direcția axelor de coordonate Ox_k astfel încît în punctul x_1 matricea

$$\left\| A_{jk} \right\| \begin{matrix} j,\ k = m \\ j,\ k = 1 \end{matrix}$$

să fie diagonală; acest lucru este posibil deoarece A_{jk} este simetrică. Dar această matrice este și pozitiv definită și de aceea în sistemul de coordonate ales avem

$$A_{jj}(x_1) > 0,\ A_{jk}(x_1) = 0,\ j \neq k,$$

și

$$Lv\Big|_{(x_1,\ t_1)} = -\sum_{j=1}^{m} A_{jj} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}\Big|_{(x_1,\ t_1)} \geqslant 0.$$

Pe de altă parte,

$$Lv = Lu + \frac{M-\mu}{2T} L(t_0 - t) = -\frac{M-\mu}{2T} < 0,$$

contradicția obținută arătînd că $(x_1, t_1) \notin Q_T$.

Fie acum $(x_1, t_1) \in \Omega_T$. Aceasta înseamnă că $t_1 = T_1$, $x_1 \in \Omega$. Atunci t_1 este un punct frontieră al intervalului $(0, T)$ iar x_1 un punct interior al lui Ω; condițiile necesare de maxim în punctul (x_1, t_1) au forma

$$\frac{\partial v}{\partial t} \geqslant 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial v^2}{\partial x_k^2} \leqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m;$$

astfel

$$Lv\Big|_{(x_1,\ t_1)} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{(x_1,\ t_1)} - \left[\sum_{j=1}^{m} A_{jj} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}\right]_{(x_1,\ t_1)} \geqslant 0.$$

Pe de altă parte, ca și mai sus, $Lv < 0$; noua contradicție arată că $(x_1, t_1) \notin \Omega_T$.

Astfel, punctul (x_1, t_1) care trebuia să aparțină reuniunii $Q_T \cup \Omega_T$, nu aparține nici lui Q_T, nici lui Ω_T. Din această contradicție rezultă că ipoteza $\mu < M$ este falsă și prin urmare $\mu = M$.

Teorema 20.2.1 se numește *principiul de maxim* pentru ecuația căldurii.

Mersul demonstrației arată că pentru cazul maximului aceasta rămîne adevărată dacă ecuația $Lu = 0$ este înlocuită cu inecuația $Lu \leqslant 0$. Este valabilă astfel următoarea formă mai tare a principiului de maxim.

Teorema 20.2.2. *Să presupunem că funcția $u(x, t)$ aparține intersecției* (1). *Dacă $Lu \leqslant 0$ în Q_T, atunci funcția $u(x, t)$ își atinge maximul pe $\Omega \cup B_T$. Dacă însă $Lu \geqslant 0$ în Q_T, atunci funcția $u(x, t)$ își atinge minimul pe $\Omega \cup B_T$.*

§ 3. PROBLEMA CAUCHY ȘI PROBLEMA MIXTĂ

În §2, cap. 9 s-a arătat că pentru ecuația căldurii se poate da numai una din datele Cauchy și de aceea problema Cauchy pentru ecuația căldurii se formulează astfel: să se găsească soluția acestei ecuații pentru orice $x \in E_m$ și orice $t > 0$, dacă se cunoaște valoarea acesteia pentru $t = 0$

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ x \in E_m. \tag{1}$$

Un rol important îl joacă așa-numita *problemă mixtă*, care se formulează în modul următor. Fie Ω un domeniu din E_m, Γ frontiera sa și B suprafața cilindrică cu directoarea Γ și generatoarele paralele la axa t; mai exact, drept B se ia acea porțiune din suprafață pentru care $t > 0$. Problema mixtă pentru ecuația (1.5) se formulează astfel: să se găsească soluția acestei ecuații, definită în domeniul $\Omega \times (0, \infty)$ al spațiului variabilelor $x_1, x_2, \ldots, x_m$, t cu frontiera $\Omega \cup B$, care pentru $t = 0$ satisface condiția Cauchy

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ x \in \Omega, \tag{2}$$

și pe suprafața cilindrică B verifică o condiție la limită.

Diverse tipuri de condiții la limită conduc la diverse probleme mixte.

Cele mai interesante sînt următoarele trei tipuri de condiții la limită:

$$u|_B = \psi(x, t); \tag{3}$$

$$\left[A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(n, x_j)\right]_B = \chi(x, t); \tag{4}$$

$$\left[A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(n, x_j) + \sigma(x, t) u\right]_B = \omega(x, t). \tag{5}$$

Mai jos vom examina numai una din problemele mixte, și anume pe prima (condiția la limită (3)).

§ 4. TEOREME DE UNICITATE

Teorema 20.4.1. *Problema mixtă pentru ecuația căldurii*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(x, t) \tag{1}$$

pentru condițiile inițiale și la limită

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \quad u|_B = \psi(x, t) \tag{2}$$

are în clasa

$$C(\bar{\Omega} \times [0, \infty)) \cap C^{(2,1)}(\Omega \times (0, \infty)) \tag{3}$$

cel mult o soluție.

Să presupunem că există două soluții. Dacă ar exista două soluții ale problemei (1)—(2), atunci diferența lor $w(x, t)$ ar satisface ecuația omogenă a căldurii (1.6) și ar aparține clasei (3). În baza principiului de maxim, funcția $w(x, t)$ își atinge cea mai mare, ca și cea mai mică valoare fie în Ω, fie pe cilindrul B. Dar funcția w mai satisface condițiile inițiale și la limită omogene:

$$w|_{t=0} = 0, \quad x \in \Omega; \quad w|_B = 0.$$

De aici rezultă că atît cea mai mare, cît și cea mai mică valoare a lui $w(x, t)$ este zero. În acest caz $w(x, t) \equiv 0$ și ambele soluții ale problemei (1)—(2) coincid.

Unicitatea soluției problemei Cauchy o vom studia pentru cazul cel mai simplu cînd $A_{jk} = \delta_{jk}$, adică expresia eliptică ce intervine în ecuația căldurii se înlocuiește cu operatorul lui Laplace.

Teorema 20.4.2. *Ecuația*

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x, t) \tag{4}$$

are în clasa

$$C(E_m \times [0, \infty)) \cap C^{(2,1)}(E_m \times (0, \infty)) \tag{5}$$

cel mult o soluție mărginită ce satisface condiția Cauchy $u|_{t=0} = \varphi(x)$, *unde* $\varphi(x)$ *este o funcție dată.*

Dacă ar exista două soluții, atunci diferența lor $w(x, t)$ ar fi soluție a problemei Cauchy omogenă

$$Lw = \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = 0, \tag{6}$$

$$w|_{t=0} = 0 \tag{7}$$

și ar aparține clasei (5). Ea este mărginită ca diferență a două funcții mărginite; fie $|w(x, t)| \leqslant M$.

În planul $t = 0$, adică în spațiul euclidian E_m, să considerăm bila B_R de rază R cu centrul în originea coordonatelor; sfera ce o mărginește o desemnăm prin S_R. Construim suprafața cilindrică cu generatoarele paralele la axa t și cu directoarea S_R; porțiunea din această suprafață pe care $t > 0$ o desemnăm prin B. Domeniul din spațiul $(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$ cu frontiera $B_R \cup B$ îl desemnăm cu Q.

Construim funcția ajutătoare

$$v_R(x, t) = \frac{2Mm}{R^2}\left(\frac{|x|^2}{2m} + t\right), \quad |x|^2 = \sum_{k=1}^{m} x_k^2. \tag{8}$$

Se observă ușor că v_R satisface ecuația căldurii omogenă. Dar $v_R|_{t=0} = M|x^2|/R^2 \geqslant 0$; în baza egalității (7), $v_R|_{t=0} \geqslant |w||_{t=0}$ și, în sfîrșit, $v_R|_B = v_R|_{|x|^2=R^2} \geqslant M \geqslant |w|_B$. Ultimele două relații arată că

$$v_R|_{B_R \cup B} \geqslant |w|_{B_R \cup B},$$

și este clar că mărimile $v_R + w$ și $v_R - w$ sînt pozitive pe $B_R \cup B$. În afară de aceasta, fiecare din cele două mărimi satisfac ecuația (6). Dar atunci conform principiului de maxim, în domeniul închis $\bar{Q}_T$, în care $x \in \bar{\Omega}$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $T = \text{const}$, atît suma $v_R + w$, cît și diferența $v_R - w$ își ating minimul pe $B_R \cup B$, și aceste minime sînt pozitive. De aici rezultă că $v_R + w \geqslant 0$, $v_R - w \geqslant 0$, pentru $|x|^2 \leqslant R^2$, $t \geqslant 0$. Astfel, pentru $|x|^2 \leqslant R^2$, $t \geqslant 0$ are loc inegalitatea $-v_R \leqslant w \leqslant v_R$ sau, ceea ce este echivalent,

$$|w(x, t)| \leqslant \frac{2Mm}{R^2}\left(\frac{|x|^2}{2m} + t\right).$$

Fixăm arbitrar pe x și t și facem pe $R \to \infty$. Din ultima inegalitate rezultă atunci că $|w(x, t)| \leqslant 0$, adică $w(x, t) = 0$.

§ 5. FUNCȚII ABSTRACTE DE VARIABILĂ REALĂ

Vom spune că pe mulțimea E a axei numerice s-a definit o *funcție abstractă* dacă după o anumită lege oricărui $t \in E$ i se pune în corespondență un și numai un element $u(t) \in X$. Mai jos vom presupune că X este un spațiu Banach.

În spațiul Banach există două tipuri de convergență: tare (sau convergență în normă) și slabă. Corespunzător acestora pentru func-

ţiile abstracte de variabilă reală putem formula noţiunea de continuitate tare şi slabă, de derivabilitate tare şi slabă etc. Avînd în vedere aplicaţiile ce vor urma, ne mărginim la a studia continuitatea tare şi derivabilitatea tare; de aceea în cele ce urmează cuvîntul „tare" va fi omis.

Funcţia abstractă $u(t)$ este continuă în punctul $t = t_0$ dacă

$$\lim_{t \to t_0} \| u(t) - u(t_0) \|_x = 0;$$

ea este continuă pe o mulţime, dacă este continuă în fiecare punct al acestei mulţimi. Funcţia abstractă $u(t)$ are în punctul t derivata $u'(t)$ dacă

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - u'(t) \right\|_x = 0.$$

Ca de obicei, o funcţie care admite derivată într-un punct se numeşte diferenţiabilă în acel punct. Este evident că funcţia diferenţiabilă într-un punct este continuă în acel punct. În mod natural se definesc şi derivatele de ordin superior ale funcţiilor abstracte.

Un rol important îl va juca în continuare următoarea formulă de diferenţiere a produsului scalar: dacă $u(t)$ şi $v(t)$ sînt funcţii abstracte cu valori într-un spaţiu Hilbert şi dacă aceste funcţii sînt diferenţiabile în punctul t, atunci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t), v(t)) = (u'(t), v(t)) + (u(t), v'(t)). \tag{1}$$

Într-adevăr,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t), v(t)) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} [(u(t+h), v(t+h)) - (u(t), v(t))] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\left(\frac{u(t+h) - u(t)}{h}, v(t+h) \right) + \left(u(t), \frac{v(t+h) - v(t)}{h} \right) \right];$$

trecînd la limită sub semnul produsului scalar, obţinem formula (1).

În mod natural se introduce şi noţiunea de integrală a funcţiilor abstracte.

Mai jos vom folosi următoarele notaţii. Analizăm funcţiile abstracte ale căror valori aparţin unei anumite clase de obiecte $\mathfrak{K}$ şi vom presupune că aceste funcţii sînt continue pe mulţimea E a valorilor variabilei t. Mulţimea acestor funcţii o vom nota prin $C(E; \mathfrak{K})$. Dacă pe E funcţiile indicate sînt de k ori continuu diferenţiabile, atunci această mulţime de funcţii va fi desemnată prin $C^{(k)}(E; \mathfrak{K})$.

§ 6. SOLUŢIA SLABĂ A PROBLEMEI MIXTE

Să analizăm problema mixtă pentru ecuaţia

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \tag{1}$$

cu condiţia la limită omogenă

$$u|_B = 0 \tag{2}$$

şi cu condiţia iniţială, în general, neomogenă

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Domeniul Ω îl considerăm mărginit, iar frontiera sa Γ netedă pe porţiuni.

Vom presupune că soluţia căutată $u(x, t)$ aparţine clasei

$$C(\bar{\Omega} \times [0, \infty)) \cap C^{(2,1)}(\bar{\Omega} \times (0, \infty)).$$

Pentru $t \geqslant 0$ fixat, condiţia (2) arată că

$$u|_\Gamma = 0 \tag{4}$$

iar pentru t fixat, $u(x, t)$ poate fi privit ca un element al domeniului de definiţie $D(\mathfrak{A})$ al operatorului $\mathfrak{A}$ al problemei Dirichlet pentru expresia diferenţială eliptică $-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)$, $x \in \Omega$. Cu atît mai mult el poate fi privit ca element al spaţiului energetic corespunzător $H_{\mathfrak{A}}$.

Problema mixtă pusă se poate formula şi altfel, dacă se foloseşte noţiunea de funcţie abstractă.

Funcţia $f(x, t)$ o vom privi ca o funcţie abstractă $f(t)$ cu valori în $L_2(\Omega)$, funcţia $\varphi(x)$ fiind elementul φ al spaţiului $L_2(\Omega)$. În sfîrşit, funcţia căutată $u(x, t)$ o vom considera ca funcţia abstractă $u(t)$ cu valori în domeniul $D(\mathfrak{A})$; valorile acestei funcţii sînt prin urmare elemente ale ambelor spaţii $L_2(\Omega)$ şi $H_{\mathfrak{A}}$. Problema (1)—(3) poate fi

redusă la următoarea problemă Cauchy abstractă: să se integreze ecuația diferențială ordinară abstractă de ordinul întîi

$$\frac{du}{dt} + \mathfrak{A}u = f(t), \quad t > 0, \quad u|_{t=0} = \varphi. \tag{5}$$

Să presupunem că problema (5) are soluție. Fie $\eta(t)$ funcția abstractă arbitrară cu valori în $H_{\mathfrak{A}}$ și să înmulțim scalar ecuația (5) (în sensul metricii lui $L_2(\Omega)$) cu $\eta(t)$. Ținînd seama de definiția produsului energetic, obținem

$$\left(\frac{du}{dt}, \eta\right) + [u, \eta] = (f, \eta); \tag{6}$$

aici și în cele ce urmează, simbolul $\mathfrak{A}$ de la produsul și norma energetică va fi omis.

Reciproc, dacă $u \in C^{(1)}((0, \infty); D(\mathfrak{A}))$ și această funcție satisface identitatea (6), atunci ea satisface și ecuația (5). Într-adevăr, dacă $u \in D(\mathfrak{A})$, atunci $[u, \eta] = (\mathfrak{A}u, \eta)$ și identitatea (6) capătă forma

$$\left(\frac{du}{dt} + \mathfrak{A}u - f, \quad \eta\right) = 0, \quad \forall \eta \in H_{\mathfrak{A}}; \tag{7}$$

cum elementele spațiului $H_{\mathfrak{A}}$ formează o mulțime densă în $L_2(\Omega)$, atunci $(du/dt) + \mathfrak{A}u - f = 0$.

Funcția abstractă $u(t)$ o vom numi *soluția slabă a problemei mixte* (1)—(3) dacă ea satisface următoarele condiții:

1) $u(t)$ aparține simultan claselor $C([0, \infty); L_2(\Omega))$, $C((0, \infty); H_{\mathfrak{A}})$, $C^{(1)}((0, \infty); L_2(\Omega))$, adică această funcție este continuă pentru $t \geqslant 0$ și continuu diferențiabilă pentru $t > 0$, ca funcție abstractă cu valori în $L_2(\Omega)$; totodată ea este continuă pentru $t > 0$, ca funcție abstractă cu valori în $H_{\mathfrak{A}}$;

2) $u(t)$ satisface identitatea (7) pentru orice $t > 0$ și orice funcție abstractă $\eta(t)$ cu valori în $H_{\mathfrak{A}}$;

3) $u(t)$ satisface condiția inițială (6). Ultima condiție se înțelege în sensul că

$$\lim_{t \to 0} \|u(t) - \varphi\|_{L_2(\Omega)} = 0.$$

Din cele demonstrate rezultă că soluția slabă $u(t)$ este astfel și soluția obișnuită dacă $u(t) \in D(\mathfrak{A})$ pentru orice $t > 0$ și dacă $u(x, t) \xrightarrow[t \to 0]{} \varphi(x)$ nu numai în metrica lui $L_2(\Omega)$, ci și uniform.

Capitolul 21

ECUAȚIA UNDELOR

§ 1. NOȚIUNEA DE ECUAȚIE A UNDELOR

Se numește *ecuația undelor* o ecuație de ordinul al doilea de forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - A_{jk}(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + A_k(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0(x, t)u = f(x, t), \tag{1}$$

în care matricea coeficienților A_{jk} este pozitiv definită. Matricea coeficienților dominanți ai ecuației (1) are forma

$$\begin{Vmatrix} -A_{11} & -A_{12} & \dots & -A_{1m} & 0 \\ -A_{21} & -A_{22} & \dots & -A_{2m} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -A_{m1} & -A_{m2} & \dots & -A_{mm} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{2}$$

Una din valorile caracteristice ale matricii (2) este egală cu unitatea, celelalte coincid cu valorile caracteristice ale matricii $-\|A_{jk}\|$ și prin urmare sînt negative. De aici rezultă că ecuația undelor este de tipul $(m, 1, 0)$, adică de tip hiperbolic.

Ecuația caracteristică a ecuației undelor are forma

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 - A_{jk}\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_k} = 0. \tag{3}$$

Ecuația (1), ca orice ecuație hiperbolică, are caracteristicile reale. Remarcăm că funcția $\omega(x, t) \equiv t$ nu satisface ecuația (3) și de aceea planele $t = \text{const}$ nu sînt suprafețe caracteristice ale ecuației undelor și pentru $t = \text{const}$ se pot propune ambele date Cauchy.

Vom examina ecuația mai puțin generală a undelor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(x, t). \tag{4}$$

Din punct de vedere fizic ecuația (4) descrie micile vibrații ale mediului sub acțiunea unor forțe continuu repartizate, a căror intensitate este proporțională cu $f(x, t)$. În cazul general mediul care vibrează este neomogen și neizotrop și proprietățile sale fizice variază în timp. Dacă proprietățile mediului sînt constante în timp, atunci coeficienții A_{jk} nu depind de t, situație pe care o vom și examina în cele ce urmează. Dacă mediul este omogen, atunci $A_{jk} = \text{const}$; în acest caz printr-o transformare de coordonate afină putem transforma matricea $\|A_{jk}\|$ în matricea unitate. Atunci ajungem la forma cea mai simplă a ecuației undelor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x, t). \tag{5}$$

Pentru aplicațiile ei fizice prezintă interes mai mare considerarea ecuației mai generale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(x, t), \quad a^2 = \text{const}. \tag{6}$$

Aceasta poate fi adusă la forma (5) dacă efectuăm modificarea unității de timp, adică dacă facem schimbarea $t' = at$.

Revenind la ecuația (4), reamintim că A_{jk} nu depind de t și sînt presupuse continuu diferențiabile și că matricea $\|A_{jk}\|$ este nedegenerată.

§ 2. PROBLEMA MIXTĂ ȘI SOLUȚIA EI SLABĂ

Formularea problemei mixte pentru ecuația undelor este foarte asemănătoare cu formularea aceleiași probleme pentru ecuația căldurii. Să formulăm problema mai amănunțit. În planul $t = 0$ fie dat un domeniu mărginit Ω cu frontiera Γ netedă pe porțiuni. Se cere să se găsească în domeniul $Q = \Omega \times (0, \infty)$ soluția ecuației undelor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(x, t), \tag{1}$$

care să satisfacă condiția inițială

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x) \tag{2}$$

și una din următoarele condiții la limită:

$$u|_B = \psi(x, t) \tag{3}$$

(prima problemă);

$$\left[A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(n, x_j)\right]_B = \chi(x, t) \tag{4}$$

(a doua problemă);

$$\left[A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(n, x_j) + \sigma(x, t)u\right]_B = \omega(x, t) \tag{5}$$

(a treia problemă). Evident, sînt posibile și alte tipuri de condiții la limită.

În cele ce urmează ne mărginim la cazul condiției la limită omogenă (3), adică

$$u|_B = 0. \tag{6}$$

Ca și pentru ecuația căldurii, problema mixtă pentru ecuația undelor poate fi formulată în termeni operatoriali. Vom considera, pentru moment, că soluția $u(x, t)$ a problemei mixte aparține clasei $C^{(2,2)}(\Omega \times [0, \infty))$. Atunci această soluție poate fi interpretată ca o funcție abstractă $u(t)$ cu valori în $D(\mathfrak{A})$, unde $\mathfrak{A}$ este operatorul problemei Dirichlet; această funcție are două derivate continue în intervalul $(0, \infty)$. Funcția $f(x, t)$ o vom privi ca o funcție abstractă cu valori în $L_2(\Omega)$. În sfîrșit, vom considera funcția $\varphi_0(x)$ ca elementul φ_0 al spațiului energetic $H_{\mathfrak{A}}$, iar funcția $\varphi_1(x)$ ca elementul φ_1 al spațiului $L_2(\Omega)$. Atunci problema mixtă pentru ecuația (1), pentru condițiile inițiale (2) și condiția la limită (6), poate fi interpretată ca o problemă Cauchy pentru ecuația diferențială ordinară abstractă de ordinul al doilea

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \mathfrak{A}u = f(x) \tag{7}$$

cu condițiile inițiale

$$u(0) = \varphi_0, \quad u'(0) = \varphi_1. \tag{8}$$

Fie $\eta(t)$ o funcție abstractă ce aparține intersecției

$$K = C([0, \infty); H_{\mathfrak{A}}) \cap C^{(1)}([0, \infty); L_2(\Omega)). \tag{9}$$

Înmulțim scalar (în metrica lui $L_2(\Omega)$) cu $\eta(t)$ ecuația (7):

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 u(t)}{\mathrm{d}t^2}, \eta(t)\right) + (\mathfrak{A}u(t), \eta(t)) = (f(t), \eta(t)),$$

ceea ce conduce la forma [1]

$$\left(\frac{d^2u(t)}{dt^2}, \eta(t)\right) + [u(t), \eta(t)] = (f(t)\eta(t)), \quad \eta \in K. \tag{10}$$

Alegem un moment arbitrar $T > 0$ și impunem condiția ca $\eta(T) = 0$. Integrăm după t ambele părți ale identității (10) pe intervalul $(0, T)$. Conform formulei (5.1) cap. 20, avem

$$\left(\frac{d^2u(t)}{dt^2}, \eta(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{du(t)}{dt}, \eta(t)\right) - \left(\frac{du(t)}{dt}, \frac{d\eta(t)}{dt}\right).$$

Folosind egalitățile $\eta(T) = 0$, $u'(0) = \varphi_1$, obținem

$$-\int_0^T \left(\frac{du(t)}{dt}\frac{d\eta(t)}{dt}\right) dt + \int_0^T [u(t), \eta(t)]dt - (\varphi_1, \eta(0)) =$$

$$= \int_0^T (f(t), \eta(t))dt, \quad \eta \in K_T. \tag{11}$$

Notăm cu K_T clasa funcțiilor $\eta(t)$ astfel încît $\eta \in K$ și $\eta(T) = 0$.

Vom spune că funcția abstractă $u(t)$ este *soluția slabă* a problemei mixte (1), (2), (6) dacă: 1) $u \in K$; 2) $u(0) = \varphi_0$; această egalitate trebuie înțeleasă în sensul că $\lim_{t\to 0} |u(t) - \varphi_0| = 0$; 3) $u(t)$ satisface identitatea (11) în care $\eta(t)$ este o funcție arbitrară din clasa K_T.

Este ușor de arătat că soluția slabă $u(t)$ ce aparține intersecției $C^{(1)}([0, \infty); D(\mathfrak{A})) \cap C^{(2)}((0, \infty); D(\mathfrak{A}))$ este și soluția obișnuită a problemei mixte pentru ecuația undelor.

§ 3. ECUAȚIA UNDELOR CU COEFICIENȚI CONSTANȚI. PROBLEMA CAUCHY. CONUL CARACTERISTIC

În cele ce urmează în acest capitol vom analiza ecuația undelor de cea mai simplă formă

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x, t). \tag{1}$$

[1] Aici și în cele ce urmează în acest capitol omitem simbolul $\mathfrak{A}$ de la produsul și norma energetică.

După cum s-a arătat în §1, suprafața $t = 0$ nu este caracteristică pentru ecuația (1). Problema Cauchy pentru această ecuație se pune în felul următor: pentru orice $x \in E_m$ și orice $t > 0$, să se găsească soluția ecuației (1) ce satisface condițiile inițiale

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad \forall x \in E_m, \ \forall t > 0. \tag{2}$$

Un concept important în studierea și rezolvarea problemei Cauchy pentru ecuația undelor îl reprezintă așa-numitul *con caracteristic*.

Fie (x_0, t_0) un punct oarecare și să analizăm suprafața definită de ecuațiile

$$t_0 - t = r, \quad r = |x - x_0|. \tag{3}$$

Aceasta este pînza inferioară a conului cu vîrful în punctul (x_0, t_0) și axa paralelă cu axa t. Nu este greu de observat că suprafața (3) este caracteristică pentru ecuația undelor (1). Într-adevăr, punînd $\omega(x, t) = t_0 - t - r$, putem scrie ecuația (3) sub forma $\omega(x, t) = 0$. Ecuația caracteristică pentru ecuația (1) are forma

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 - \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_k}\right)^2 = 0. \tag{4}$$

În cazul dat,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -1, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x_k} = -\frac{\partial r}{\partial x_k} = -\frac{x_k - x_{k_0}}{r},$$

unde x_{k_0} este componenta de ordin k a punctului x_0; atunci

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 - \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_k}\right)^2 = 1 - \frac{1}{r^2}\sum_{k=1}^{m}(x_k - x_{k_0})^2 = 0.$$

Suprafața (3) se numește *conul caracteristic* al ecuației undelor.

Să găsim direcția normalei exterioare n la conul caracteristic. Aceasta formează un unghi ascuțit cu axa t și deci cosinusul acestui unghi este pozitiv; conform unei cunoscute formule din geometria diferențială avem

$$\cos(n, t) = -\frac{\dfrac{\partial \omega}{\partial t}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 + \sum_{k=1}^{m}\left(\dfrac{\partial \omega}{\partial x_k}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{5}$$

De aici deducem de asemenea

$$\sum_{k=1}^{m} \cos^2(n, x_k) = 1 - \cos^2(n, t) = \frac{1}{2}. \tag{6}$$

§ 4. TEOREMA DE UNICITATE PENTRU PROBLEMA CAUCHY. DOMENIUL DE INFLUENȚĂ

Teorema 21.4.1. *Presupunem formulate problemele Cauchy*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x, t); \quad u\Big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x);$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v = g(x, t); \quad v\Big|_{t=0} = \psi_0(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi_1(x).$$

și că în conul caracteristic $|x - x_0| \leqslant t_0 - t$, *cu vîrful* (x_0, t_0), *termenii liberi coincid, adică* $f(x, t) \equiv g(x, t)$, *iar în bila* $|x - x_0| \leqslant t_0$ *secțiunea conului menționată cu spațiul* $t = 0$ *coincid, adică* $\varphi_0(x) \equiv \psi_0(x)$, $\varphi_1(x) \equiv \psi_1(x)$.

Dacă ambele probleme au soluții continue împreună cu derivatele lor de ordinul întîi și al doilea, atunci aceste soluții coincid în interiorul și pe frontiera conului $|x - x_0| \leqslant t_0 - t$.

Diferența $w(x, t)$ a soluțiilor celor două probleme Cauchy despre care este vorba în condițiile teoremei, satisface ecuația omogenă a undelor

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - \Delta w = 0 \tag{1}$$

și condițiile inițiale

$$w|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad |x - x_0| \leqslant t_0. \tag{2}$$

Valorile $w|_{t=0}$ și $\dfrac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}$ în exteriorul bilei $|x - x_0|^2 \leqslant t_0^2$ nu prezintă interes pentru noi.

Să considerăm domeniul D al spațiului $(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$, mărginit de planul $t = 0$ și conul caracteristic $t_0 - t = |x - x_0|$. În interiorul, sau pe frontiera acestui domeniu, luăm un punct arbitrar $(\tilde{x}, \tilde{t})$ și construim un nou con caracteristic $\tilde{t} - t = |\tilde{x} - x|$. Notăm

cu $\widetilde{D}$ domeniul mărginit de planul $t = 0$ și noul con. Este important de menționat că domeniul D este mărginit în planul $t = 0$ de bila $|x - \tilde{x}|^2 \leqslant \tilde{t}^2$, care reprezintă o parte din bila inițială $|x - x_0|^2 \leqslant t_0^2$; de aici rezultă că în noua bilă are loc relația (2).

Înmulțim ecuația (1) cu $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ și integrăm pe domeniul $\widetilde{D}$. Ținînd seama de identitățile

$$\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2, \quad \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial x_k}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)^2$$

și aplicînd formula lui Ostrogradski, obținem

$$\int_{\widetilde{D}} \frac{\partial w}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Delta w\right) dx dt = \frac{1}{2}\int_{B \cup K} \left\{\left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)\right]\cos(n, t) - \right.$$

$$\left. - 2\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial x_k}\cos(n, x_k)\right\} dS = 0. \tag{3}$$

Aici prin B s-a notat bila $|x - \tilde{x}| \leqslant \tilde{t}$, prin K conul caracteristic $\tilde{t} - t = |x - \tilde{x}|$, iar cu dS elementul de măsură pe frontiera $B \cup K$ a domeniului $\widetilde{D}$. În baza condițiilor (2), în bila B sînt satisfăcute identitățile $\dfrac{\partial w}{\partial t} \equiv 0$ și $w \equiv 0$. Derivînd ultima identitate în raport cu x_k, obținem de asemenea $\dfrac{\partial w}{\partial x_k} \equiv 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Astfel, în (3) integrala pe B se anulează, obținîndu-se identitatea mult mai simplă

$$\int_K \left\{\left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)^2\right]\cos(n, t) - 2\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial x_k}\cos(n, x_k)\right\} dS = 0.$$

Înmulțind ultima egalitate cu $1/\sqrt{2} = \cos(n, t)$ și ținînd seama de (3.6), obținem

$$\int_K \sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\partial w}{\partial t}\cos(n, x_k) - \frac{\partial w}{\partial x_k}\cos(n, t)\right]^2 dS = 0,$$

de unde rezultă că pe conul K au loc relațiile

$$\frac{\partial w}{\partial t}\cos(n, x_k) - \frac{\partial w}{\partial x_k}\cos(n, t) \equiv 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

prin urmare

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} : \cos(n, x_1) = \ldots = \frac{\partial w}{\partial x_m} : \cos(n, x_m) = \frac{\partial w}{\partial t} : \cos(n, t).$$

Aceste egalități arată că pe conul K vectorul grad w este paralel cu normala.

Fie l o generatoare a conului K. Este evident că vectorul grad w este ortogonal la l. În acest caz, $\frac{\partial w}{\partial t} = \mathrm{Pr}_l \operatorname{grad} w = 0$. De aici rezultă că $w = \text{const}$ de-a lungul oricărei generatoare a conului K. În particular, valoarea w în vîrful $(\tilde{x}, \tilde{t})$ coincide cu valoarea lui w în acel punct al generatoarei l, care se găsește în planul $t = 0$. Dar conform condițiilor (2) în acest punct $w = 0$. De aici rezultă că $w(\tilde{x}, \tilde{t}) = 0$ și cum punctul $(\tilde{x}, \tilde{t})$ este arbitrar în $\widetilde{D}$, atunci $w(x, t) \equiv 0$, $(x, t) \in \widetilde{D}$.

Fie $u(x, t)$ soluția problemei Cauchy pentru ecuația omogenă a undelor (1) cu condiții inițiale arbitrare. După cum rezultă din teorema 21.4.1, valoarea funcției u în orice punct (x_0, t_0) se definește numai prin valorile funcțiilor inițiale în bila $|x - x_0| \leqslant t_0$.

Mulțimea punctelor din planul $t = 0$, cu proprietatea că valorile funcției inițiale în aceste puncte sînt suficiente pentru determinarea mărimii $u(x_0, t_0)$, se numește *domeniul de influență* al punctului (x_0, t_0). Din cele de mai sus este clar că putem lua drept domeniu de influență bila $|x - x_0| \leqslant t_0$. În capitolul 24 se va arăta că pentru $m > 1$ impar domeniul de influență poate fi restrîns: în cazul indicat drept domeniu de influență poate fi luat nu bila menționată, ci numai frontiera sa, adică sfera $|x - x_0| = t_0$.

Dacă în locul ecuației (1) se analizează ecuația $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0$, $a = \text{const}$, atunci domeniul de influență al punctului (x_0, t_0) va fi bila $|x - x_0| \leqslant at_0$ (sfera $|x - x_0| = at_0$ în cazul lui m impar, $m > 1$).

§ 5. FENOMENUL DE PROPAGARE A UNDELOR

Din teorema de unicitate demonstrată în §4 (mai exact, din existența domeniului de influență și din caracterul acestui domeniu), decurg unele consecințe de ordin fizic despre care vom vorbi aici pe scurt.

Să analizăm ecuația omogenă a undelor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0, \quad a = \text{const},$$

pentru condițiile

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad x \in E_m.$$

Să presupunem că funcțiile inițiale $\varphi_0(x)$ și $\varphi_1(x)$ sînt identic nule în exteriorul unui domeniu mărginit $D \subset E_m$ (fig. 26); în interiorul acestui domeniu funcțiile inițiale se presupun, în general, diferite de zero. Vom presupune că problema Cauchy formulată are soluție.

Fie un punct oarecare $x_0 \in E_m$, situat în exteriorul lui D. La momentul inițial valoarea lui u în x_0 este zero, după cum se observă din condițiile inițiale; în acest moment punctul x_0 se găsește în stare de repaus. Să considerăm momentul t_0, suficient de apropiat de momentul inițial, și anume fie $t_0 < \delta/a$, unde δ este distanța cea mai mică de la punctul x_0 pînă la frontiera domeniului D. Domeniul de influență pentru punctul x_0 la momentul t_0 este bila de rază at_0 cu centrul în x_0, ce nu intersectează domeniul D. În acest caz în domeniul de influență funcțiile inițiale sînt zero; conform teoremei de unicitate $u(x_0, t_0) = 0$ și punctul x_0 rămîne, la momentul t_0, în stare de repaus atît timp cît $t_0 < \delta/a$.

Fie acum $t_0 > \delta/a$. Domeniul de influență intersectează domeniul D (în fig. 27 această intersecție este haşurată). În acest domeniu funcțiile inițiale sînt diferite de zero și, în general, $u(x_0, t_0) \neq 0$.

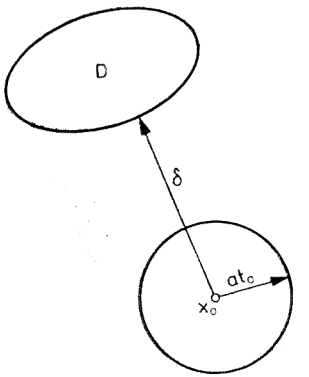

Fig. 26

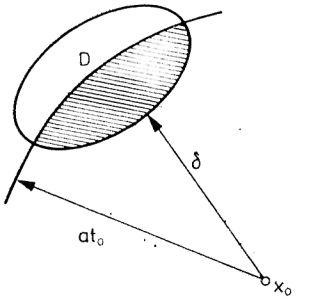

Fig. 27

Astfel, momentul $t_0 = \delta/a$ poate fi privit ca momentul cînd perturbația sosește în punctul x_0; pînă la acest moment, punctul respectiv se găsește în stare de repaus, iar după aceea în stare perturbată.

Nu este greu să se răspundă și la următoarea întrebare: fie dat momentul t_0; care sînt domeniile de repaus și de perturbare la acest moment?

Fie Γ frontiera domeniului D al perturbației inițiale. Din fiecare punct al frontierei Γ, ca centru, descriem sfere de rază at_0. Înfășurătoarea Γ_{t_0} a acestor sfere (mai exact, locul geometric al punctelor ce se află în exteriorul lui D și se găsesc la distanța at_0 de Γ) delimitează domeniul de repaus de cel al punctelor perturbate. Suprafața Γ_{t_0} se numește *front anterior de undă*.

Procesul propagării perturbațiilor se numește *undă*. Este evident că perturbația se propagă cu viteza a în direcția normalei la Γ.

Observații. Dacă dimensiunea spațiului este impară și mai mare ca unitatea, atunci într-un mediu omogen, în anumite condiții, se observă așa-numitul *front de undă posterior*: după un anumit timp, perturbația din fiecare punct dispare. Vom reveni la această problemă în cap. 24.

Capitolul 22

METODA FOURIER

În esență metoda Fourier este metoda rezolvării problemelor mixte și a problemelor Cauchy, bazată pe folosirea proprietăților spectrale ce intervin în ecuația operatorului eliptic. În lucrările clasice însuși Fourier și discipolii săi au legat metoda Fourier de separarea variabilelor în ecuațiile diferențiale; această metodă a fost folosită în §3, cap. 18. În capitolul de față pe baza metodei Fourier se va da soluția problemelor mixte pentru ecuația căldurii și ecuația undelor.

§1. METODA FOURIER PENTRU ECUAȚIA CĂLDURII

În acest paragraf vom prezenta metoda construirii soluției slabe a problemei mixte pentru ecuația căldurii; de aici, ca o consecință, se obține demonstrarea existenței și unicității acestei soluții. Noțiunea de soluție slabă a problemei mixte a fost dată în §6, cap. 20. Amintim că soluția slabă, în cazul dat, este o funcție abstractă de t din clasa

$$C([0, \infty); L_2(\Omega)) \cap C((0, \infty), H_{\mathfrak{A}}) \cap C^{(1)}((0, \infty); L_2(\Omega)), \qquad (*)$$

ce satisface relația

$$\left(\frac{du(t)}{dt}, \eta(t)\right) + [u(t), \eta(t)]_{\mathfrak{A}} = (f(t), \eta(t)) \qquad (1)$$

și condiția inițială

$$u(0) = \varphi. \qquad (2)$$

Aici $\mathfrak{A}$ este operatorul problemei Dirichlet (vezi §1, cap. 17) pentru domeniul mărginit $\Omega \subset E_m$ cu frontiera Γ netedă pe porțiuni; $\eta(t)$ este o funcție abstractă de t cu valori în spațiul energetic $H_{\mathfrak{A}}$ și φ un element al spațiului $L_2(\Omega)$. În sfîrșit, $f(t)$ este o funcție abstractă de t cu valorile în $L_2(\Omega)$; presupunem că $f \in C^{(1)}([0, \infty); L_2(\Omega))$.

Să admitem că soluția $u(t) = u(x, t)$ a problemei (1)—(2) există. Pentru orice $t \geqslant 0$ ea este un element din $L_2(\Omega)$ și poate fi dezvol-

tată în serie după orice sistem complet ortonormat din $L_2(\Omega)$, în particular, după sistemul funcțiilor proprii ale operatorului $\mathfrak{A}$. Desemnăm aceste elemente prin $u_n = u_n(x)$, iar valorile proprii corespunzătoare prin λ_n. Notînd

$$(u(t), u_n) = c_n(t), \tag{3}$$

avem

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) u_n. \tag{4}$$

Problema se reduce la calcularea coeficienților $c_n(t)$. Pentru aceasta punem în identitatea (1) $\eta(t) = u_k$. Elementul u_k nu depinde de t și, conform formulei (5.1) cap. 20, avem

$$\left(\frac{du(t)}{dt}, u_k\right) = \frac{d}{dt}(u(t), u_k) = c_k'(t).$$

Conform definiției funcției (generalizate) proprii (vezi formula (3.2) cap. 5) avem

$$[u(t), u_k] = \lambda_k(u(t), u_k) = \lambda_k c_k(t).$$

Dacă notăm

$$(f(t), u_k) = f_k(t), \tag{5}$$

atunci în final obținem ecuația

$$c_k'(t) + \lambda_k c_k(t) = f_k(t). \tag{6}$$

Aceasta este o ecuație diferențială de ordinul întîi: $f(t)$ este dată, iar $c_k(t)$ este necunoscuta. Soluția generală a acestei ecuații este

$$c_k(t) = e^{-\lambda_k t}\left[C_k + \int_0^t e^{\lambda_k \tau} f_k(\tau)\, d\tau\right], \quad C_k = \text{const}.$$

Din formulele (2) și (3) rezultă condiția inițială pentru ecuația (6), $c_k(0) = (\varphi, u_k)$; de aici $C_k = (\varphi, u_k)$ și deci

$$c_k(t) = (\varphi, u_k)\, e^{-\lambda_k t} + \int_0^t e^{-\lambda_k (t-\tau)} f_k(\tau)\, d\tau. \tag{7}$$

Se înlocuiește (7) în formula (4) și ajungem la următoarea concluzie: dacă problema mixtă a ecuației căldurii (1)—(2) are soluție generalizată, atunci aceasta se reprezintă prin seria

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, u_n)\, e^{-\lambda_n t} u_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \int_0^t e^{-\lambda_n (t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau. \tag{8}$$

Din formula (8) rezultă, în particular, *unicitatea soluției slabe a problemei mixte* pentru ecuația căldurii.

§ 2. FUNDAMENTAREA METODEI FOURIER

Să arătăm că seria (1.8) reprezintă într-adevăr soluția slabă a problemei căldurii. Demonstrația se reduce la verificarea următoarelor afirmații.

a) Seria (1.8) converge uniform în metrica lui $L_2(\Omega)$, în raport cu t pe orice segment $[0, T]$.

Pentru aceasta este suficient să arătăm că seria pătratelor coeficienților seriei (1.8) converge uniform pe segmentul $[0, T]$; dar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{(\varphi, u_n)\, e^{-\lambda_n t} + \int_0^t e^{-\lambda_n (t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau\right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, u_n)^2 e^{-2\lambda_n t} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\int_0^t e^{-\lambda_n (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau\right\}^2. \tag{1}$$

Funcția abstractă $f(t)$ este continuă pentru $t \geqslant 0$; de aici rezultă că pe segmentul $[0, T]$ mărimea $\|f(t)\|$ este continuă.

Apoi, nu este greu de arătat că cea de a doua serie din dreapta în (1) converge uniform. Într-adevăr, conform inegalității lui Buniakovski,

$$\left\{\int_0^t e^{-\lambda_n (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau\right\}^2 \leqslant \int_0^t e^{-2\lambda_n (t-\tau)}\, d\tau \int_0^t f_n^2(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1 - e^{-2\lambda_n t}}{2\lambda_n} \int_0^t f_n^2(\tau)\, d\tau < \frac{1}{2\lambda_n} \int_0^t f_n^2(\tau)\, d\tau. \tag{2}$$

Înlocuind aici pe λ_n prin valoarea mai mică λ_1, găsim că termenul general al seriei respective are estimarea $\frac{1}{2\lambda_1}\int_0^t f_n^2(\tau)\mathrm{d}\tau$. Egalitatea

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(\tau) = \|f(\tau)\|^2 \tag{3}$$

arată că seria de termeni pozitivi și continui (3) converge și are drept sumă o funcție continuă. Conform cunoscutei teoreme a lui Dini seria (3) este uniform convergentă pe segmentul $[0, T]$ pentru orice $T > 0$. Deci cea de a doua serie din dreapta lui (1) converge uniform.

Convergența primei serii (1) se stabilește mai simplu:

$$2(\varphi, u_n)^2 \, \mathrm{e}^{-2\lambda_n t} \leqslant 2(\varphi, u_n)^2,$$

iar seria $2\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi, u_n)^2$ converge în virtutea inegalității lui Bessel.

Din cele arătate rezultă că suma seriei (1.8), $u(x, t) = u(t)$, aparține clasei $C([0, \infty); L_2(\Omega))$.

b) Seria (1.8) converge în metrica lui $H_{\mathfrak{A}}$, uniform în raport cu t, pe orice segment $[\bar{t}, T]$, unde $0 < \bar{t} < T < \infty$.

În metrica lui $H_{\mathfrak{A}}$ funcțiile $u_n(x)/\sqrt{\lambda_n}$ sînt ortonormate; seria (1.8) poate fi reprezentată sub forma:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \times$$

$$\times \left\{(\varphi, u_n)\,\mathrm{e}^{-\lambda_n t} + \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right\} u_n(x)/\sqrt{\lambda_n}. \tag{4}$$

Este suficient ca seria pătratelor coeficienților ei să conveargă uniform. Să o evaluăm pe aceasta. Avem

$$\sqrt{\lambda_n}\,\mathrm{e}^{-\lambda_n t} = \frac{1}{t\sqrt{\lambda_n}}\lambda_n t \mathrm{e}^{-\lambda_n t} \leqslant \frac{1}{\bar{t}\sqrt{\lambda_n}} \max z\mathrm{e}^{-z} = \frac{1}{\bar{t}\mathrm{e}\sqrt{\lambda_n}} \tag{5}$$

și

$$\lambda_n c_n^2(t) \leqslant 2(\sqrt{\lambda_n}\,\mathrm{e}^{-\lambda_n t})^2 \ (\varphi, u_n)^2 + 2\lambda_n\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau)\mathrm{d}\tau\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\bar{t}^2\mathrm{e}^2\lambda_n}(\varphi, u_n)^2 + \int_0^t f_n^2(\tau)\ \mathrm{d}\tau; \tag{6}$$

am folosit aici estimarea (2). Seria cu termenul general (6) converge uniform și afirmația de la punctul b) este demonstrată. Din aceasta rezultă că

$$u(x, t) = u(t) \in C((0, \infty); H_{\mathfrak{A}}).$$

c) Seria obținută prin derivarea seriei (1.8) în raport cu t converge în metrica lui $L_2(\Omega)$ uniform în raport cu t pe orice segment $[\bar{t}, T]$ unde $0 < \bar{t} < T < \infty$.

Derivînd seria (1.8) în raport cu t, obținem

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\lambda_n(\varphi, u_n)\,\mathrm{e}^{-\lambda_n t} + f_n(t) - \lambda_n\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} u_n(x)$$

sau, integrînd prin părți,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\lambda_n(\varphi, u_n)\,\mathrm{e}^{-\lambda_n t} + f_n(0)\,\mathrm{e}^{-\lambda_n t} + \right.$$

$$\left. + \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n'(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} u_n(x). \tag{7}$$

Ca și mai sus, aceasta este o serie în raport cu sistemul $\{u_n(x)\}$ complet ortonormat în $L_2(\Omega)$. Să evaluăm coeficienții săi. Conform inegalității lui Cauchy, pătratul coeficienților lui $u_n(x)$ în seria (7) nu depășește mărimea

$$3(\lambda_n \mathrm{e}^{-\lambda_n t})^2(\varphi,\ u_n)^2 + 3f_n^2(0)\,\mathrm{e}^{-2\lambda_n t} + 3\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n'(t)\ \mathrm{d}\tau\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{(\bar{t}\mathrm{e})^2}(\varphi, u_n)^2 + 3f_n^2(0) + \frac{3}{2\lambda_n}\int_0^T [f_n'(\tau)]^2\ \mathrm{d}\tau. \tag{8}$$

Din ipotezele făcute asupra funcțiilor $\varphi(x)$ și $f(x, t)$ rezultă că seria cu termenul general (8) converge. În acest caz seria (7) converge în metrica lui $L_2(\Omega)$ uniform pe segmentul $[\bar{t}, T]$. Afirmația de la punctul c) este demonstrată. Din aceasta rezultă suma seriei (1.8)

$$u(x, t) = u(t) \in C^{(1)}((0, \infty);\ L_2(\Omega)).$$

d) Suma seriei (1.8) satisface condiția inițială (1.2).

Într-adevăr, în baza demonstrației de la punctul a), în această serie se poate trece la limită, termen cu termen, pentru $t \to 0$ și de aceea

$$\lim_{t\to 0} \|u(t) - \varphi\|_{L_2} = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, u_n)\, u_n - \varphi \right\| = 0.$$

e) Suma seriei (1.8) satisface relația integrală (1.1).

Fie $\eta(t)$ o funcție de t abstractă arbitrară, $0 < t < \infty$, cu valori în $H_{\mathfrak{A}}$. Derivăm seria (1.8) în raport cu t și înmulțim scalar egalitatea obținută (în metrica lui $L_2(\Omega)$) cu $\eta(t)$:

$$\left(\frac{du(t)}{dt},\ \eta(t)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n'(t)\,(u_n,\ \eta(t)).$$

Înlocuind pe $c_n'(t)$ conform formulei (1.6), obținem

$$\left(\frac{du(t)}{dt},\ \eta(t)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)(u_n,\ \eta(t)) - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n(t)\,(u_n,\ \eta(t)) =$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)u_n,\ \eta(t)\right) - \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)[u_n,\ \eta(t)] = (f(t),\ \eta(t)) -$$

$$- \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)u_n,\ \eta(t)\right] = (f(t),\ \eta(t)) - [u(t),\ \eta(t)].$$

Afirmația este astfel demonstrată.

O b s e r v a ț i e. Metoda Fourier poate fi aplicată fără nici o modificare problemelor de forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathfrak{A}u = f(t), \quad u(0) = \varphi, \tag{9}$$

unde $\mathfrak{A}$ este un operator pozitiv definit arbitrar cu spectru discret, ce acționează într-un spațiu Hilbert H; $f(t)$ și $u(t)$ sînt funcții abstracte, cea dată și cea căutată, cu valori în același spațiu. Soluția slabă a problemei (9), ca mai înainte, se definește ca funcția abstractă ce satisface identitatea (1.1) cu condiția inițială (1.2). Această soluție există, este unică și poate fi calculată conform formulei (1.8). În particular, în acest mod pot fi construite (pentru H convenabil ales) soluțiile slabe corespunzătoare condițiilor la limită (3.4) și (3.5) cap. 20, dacă în aceste condiții termenii liberi sînt zero.

O remarcă analoagă este adevărată și atunci cînd se folosește metoda Fourier pentru ecuația undelor (vezi mai jos, §§ 6—8).

§ 3. DESPRE CORECTITUDINEA PROBLEMEI MIXTE A ECUAȚIEI CĂLDURII

Vom analiza soluția problemei (1.1)—(1.2) în domeniul Q_T (vezi cap. 20), adică în domeniul $\Omega \times [0, T]$. Dezvoltarea din §1 se adaptează fără nici o dificultate pentru cazul cînd t variază în intervalul mărginit $[0, T]$. Pentru aceasta este suficient să presupunem că $f \in C^{(1)}([0, T];\ L_2(\Omega))$ și putem arăta că în clasa $C^{(1)}([0, T];\ H_{\mathfrak{A}}) \cap C([0, T];\ L_2(\Omega))$ soluția problemei (1.1)—(1.2) există și este unică. Se pot menționa diverse perechi de spații în care problema analizată aici este corectă. Să ne oprim amănunțit la următoarea pereche.

Drept B_1 considerăm spațiul $C([0, T];\ L_2(\Omega))$ în care definim norma în modul următor:

$$\|u\|_1 = \max_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(t)\|_{L_2(\Omega)}. \tag{1}$$

Drept B_2 considerăm spațiul de funcții de forma

$$\Phi = (\varphi(x);\ f(t, x)), \tag{2}$$

unde $\varphi \in L_2(\Omega)$ și $f \in C^{(1)}([0, T];\ L_2(\Omega))$; norma în noul spațiu o definim prin formula

$$\|\Phi\|_2 = \|\varphi\|_{L_2(\Omega)} + \max_{0\leqslant t\leqslant T} [\|f(t)\|_{L_2(\Omega)} + \|f'(t)\|_{L_2(\Omega)}]. \tag{3}$$

Să arătăm că problema (1.1)—(1.2) este corectă în perechea de spații (B_1, B_2). Despre existența și unicitatea soluției s-a vorbit deja și este deci suficient să dovedim că operatorul R, ce acționează din B_2 în B_1 și duce elementul Φ în soluția u, este mărginit.

Să revenim la formula (1.8). Sistemul $\{u_n\}$ este ortonormat în $L_2(\Omega)$ și de aceea

$$\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\varphi, u_n)\, e^{-\lambda_n t} + \int_0^t e^{-\lambda_n (t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau\right]^2.$$

Ultima serie coincide cu seria (2.1); din estimările efectuate în §2 rezultă imediat că suma acestei serii nu depășește mărimea

$$2\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, u_n)^2 + \frac{1}{\lambda_1}\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(\tau)\, d\tau =$$

$$= 2\|\varphi\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{\lambda_1}\int_0^t \|f(\tau)\|^2_{L_2(\Omega)}\, d\tau.$$

De aici

$$\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant 2\|\varphi\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{T}{\lambda_1}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|f(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \alpha^2\|\Phi\|^2_2,$$

unde $\alpha^2 = \max\left(2, \frac{T}{\lambda_1}\right)$. Luînd maximul părţii din stînga, obţinem $\|u\|_1 \leqslant \alpha\|\Phi\|_2$ şi prin urmare $\|R\|_{B_2\to B_1} \leqslant \alpha$.

Problema mixtă pentru ecuaţia căldurii este de asemenea corectă şi pentru următoarea pereche de spaţii: B_1 — spaţiul $C^{(1)}([0, T]; L_1(\Omega))$ cu norma

$$\|u\|_{B_1} = \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_{L_2(\Omega)} + \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u'(t)\|_{L_2(\Omega)},$$

şi B_2 — spaţiul perechilor (2) în care definim norma

$$\|\Phi\|_{B_2} = \|\varphi\|_{L_2(\Omega)} + \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|f(t)\|_{L_2(\Omega)} + \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|f'(t)\|_{L_2(\Omega)}.$$

Demonstraţia acestei afirmaţii o lăsăm pe seama cititorului.

§ 4. DESPRE STABILITATEA SOLUŢIILOR

Teorema 22.4.1. *Fie $\mathfrak{A}$ un operator pozitiv definit cu spectru discret, ce acţionează în spaţiul Hilbert H şi fie că în ecuaţia*

$$\frac{du}{dt} + \mathfrak{A}u = f(t),\ t \in C^{(1)}([0, \infty), H),$$

termenul liber $f(t)$ converge pentru $t \to \infty$ la o anumită limită g, adică

$$\|f(t) - g\| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \tag{1}$$

şi că

$$\int_0^\infty \|f'(t)\|^2\,dt < \infty. \tag{2}$$

Atunci soluţia slabă a problemei (2.9) converge în metrica lui H pentru $t \to \infty$ la soluţia slabă a problemei

$$\mathfrak{A}v = g. \tag{3}$$

Peste tot în acest paragraf simbolul normă desemnează norma în spaţiul H.

Menţinem condiţiile şi notaţiile din §§1, 2 ale acestui capitol. Soluţia slabă a problemei (3) este dată de formula

$$v = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{g_n}{\lambda_n}u_n;\ g_n = (g, u_n), \tag{4}$$

care se obţine uşor astfel: sistemul $\{u_n/\sqrt{\lambda_n}\}$ este complet în spaţiul energetic $H_{\mathfrak{A}}$ al operatorului $\mathfrak{A}$ şi de aceea (vezi formula (5.11) cap. 4)

$$v = \sum_{n=1}^{\infty}\left(g, \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right)\frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n}{\lambda_n}u_n.$$

Mai departe, soluţia problemei (2.9) poate fi reprezentată conform formulei (1.8) sub forma $u(t) = u^{\mathrm{I}}(t) + u^{\mathrm{II}}(t)$, unde

$$u^{\mathrm{I}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi, u_n)\,e^{-\lambda_n t}u_n,$$

$$u^{\mathrm{II}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}u_n\int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}f_n(\tau)\,d\tau.$$

Avem

$$\|u(t) - v\| \leqslant \|u^{\mathrm{I}}(t)\| + \|u^{\mathrm{II}}(t) - v\|; \tag{5}$$

mai departe,

$$\|u^{\mathrm{I}}(t)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}e^{-2\lambda_n t}\,(\varphi, u_n)^2 \leqslant$$

$$\leqslant e^{-2\lambda_1 t}\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi, u_n)^2 = e^{-2\lambda_1 t}\|\varphi\|^2 \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

Integrînd prin părţi, obţinem pentru $u^{\mathrm{II}}(t)$:

$$u^{\mathrm{II}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\left[f_n(t) - e^{-\lambda_n t}f_n(0) - \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}f_n'(\tau)\,d\tau\right]u_n.$$

De aici

$$\|u^{\mathrm{II}}(t) - v\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\left[(f_n(t) - g_n) - e^{-\lambda_n t}f_n(0) - \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}f_n'(\tau)d\tau\right]^2$$

și conform inegalității lui Cauchy,

$$\|u^{II}(t) - v\|^2 \leqslant 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} (f_n(t) - g_n)^2 +$$

$$+ 3 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\lambda_n t} f_n^2(0) + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \left(\int_0^t e^{-\lambda_n (t-\tau)} f_n'(\tau)\, d\tau \right)^2. \qquad (6)$$

Primii doi termeni din dreapta în (6) se estimează astfel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} (f_n(t) - g_n)^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(t) - g_n)^2 = \frac{1}{\lambda_1^2} \|f(t) - g\|^2 \xrightarrow[t \to \infty]{} 0;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\lambda_n t} f_n^2(0) \leqslant e^{-2\lambda_1 t} \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(0) = e^{-2\lambda_1 t} \|f(0)\|^2 \xrightarrow[t \to \infty]{} 0.$$

Să estimăm cel de al treilea termen din (6). Alegem numărul $\bar{t}$ astfel încît $\int_{\bar{t}}^{\infty} \|f(\tau)\|^2\, d\tau < \frac{\varepsilon \lambda_1^3}{2}$, unde ε este un număr pozitiv arbitrar dat. Conform inegalităților lui Cauchy și Buniakovski,

$$\left(\int_0^t e^{-\lambda_n (t-\tau)} f_n'(\tau)\, d\tau \right)^2 \leqslant 2 \left(\int_0^{\bar{t}} e^{-\lambda_n (t-\tau)} f_n'(\tau)\, d\tau \right)^2 +$$

$$+ 2 \left(\int_{\bar{t}}^t e^{-\lambda_n (t-\tau)} f_n'(\tau)\, d\tau \right)^2 \leqslant \frac{e^{-2\lambda_n (t-\bar{t})} - e^{-2\lambda_n t}}{\lambda_n} \int_0^{\bar{t}} f_n'^2(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \frac{1 - e^{-2\lambda_n (t-\bar{t})}}{\lambda_n} \int_{\bar{t}}^t f_n'^2(\tau)\, d\tau <$$

$$< \frac{e^{-2\lambda_1 (t-\bar{t})}}{\lambda_1} \int_0^{\bar{t}} f_n'^2(\tau)\, d\tau + \frac{1}{\lambda_1} \int_{\bar{t}}^{\infty} f_n'^2(\tau)\, d\tau.$$

De aici rezultă pentru ultima sumă din (6) estimarea

$$\frac{e^{-2\lambda_1 (t-\bar{t})}}{\lambda_1^3} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\bar{t}} f_n'^2(\tau)\, d\tau + \frac{1}{\lambda_1^3} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\bar{t}}^{\infty} f_n'^2(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{e^{-2\lambda_1 (t-\bar{t})}}{\lambda_1^3} \int_0^{\bar{t}} \|f'(\tau)\|^2\, d\tau + \frac{1}{\lambda_1^3} \int_{\bar{t}}^{\infty} \|f'(\tau)\|^2\, d\tau <$$

$$< \frac{e^{-2\lambda_1 (t-\bar{t})}}{\lambda_1^3} \int_0^{\infty} \|f'(\tau)\|^2\, d\tau + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Rămîne să alegem t_0 suficient de mare, astfel încît pentru $t \geqslant t_0$ să aibă loc inegalitatea

$$\frac{e^{-2\lambda_1 (t-\bar{t})}}{\lambda_1^3} \int_0^{\infty} \|f'(\tau)\|^2\, d\tau < \frac{\varepsilon}{2},$$

atunci $\|u^{III} - v\| < \varepsilon$, unde prin u^{III} s-a notat ultima sumă din expresia (6).

§ 5. EXISTENȚA SOLUȚIILOR CLASICE

După ce s-a demonstrat în condiții destul de largi existența soluției slabe a problemei mixte a ecuației căldurii, este locul să ne punem următoarea întrebare: ce restricții asupra datelor sînt suficiente pentru ca soluția să fie „clasică"; prin aceasta vom înțelege că soluția este continuă în $Q \cup B \cup \Omega$ și are în Q derivata de ordinul întîi continuă în raport cu t și derivate continue de ordinul al doilea în raport cu coordonatele.

Rezolvarea acestei probleme o dăm pentru cazul cel mai simplu cînd $m = 1$, domeniul Ω este intervalul $(0, 1)$ al axei Ox și ecuația căldurii are forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \qquad (1)$$

Condițiile, inițiale și la limită, capătă forma

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad (2)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0; \qquad (3)$$

soluția este definită în semibanda $0 < x < 1$, $t > 0$.

Dacă soluția $u(x, t)$ este continuă în semibanda $0 \leqslant x \leqslant 1$, $t \geqslant 0$, atunci înainte de toate este necesar ca $\varphi(x)$ să fie continuă. Apoi, în punctele $x = 0$, $t = 0$ și $x = 1$, $t = 0$ se poate calcula valoarea $u(x, t)$, pornind atît de la condiția inițială, cît și de la condiția la limită (3). Ambele procedee trebuie să conducă la unu și același rezultat. De aici rezultă că funcția $\varphi(x)$ trebuie să satisfacă *condițiile de racordare*

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0. \tag{4}$$

Acum se poate formula răspunsul la problema pusă mai sus: soluția slabă a problemei (1)—(3) va fi și *soluția clasică* dacă: funcția inițială $\varphi(x)$ este absolut continuă pe segmentul $[0, 1]$, derivata ei $\varphi' \in L_2(0, 1)$ și sînt îndeplinite condițiile de racordare (4). Să demonstrăm acest lucru.

În cazul dat, operatorul $\mathfrak{A}$ acționează după formula $\mathfrak{A}u = -\dfrac{d^2u}{dx^2}$ și este definit pe clasa funcțiilor $C^{(2)}(0, 1)$, ce se anulează pentru $x = 0$ și $x = 1$. Formulele (9.3) și (9.4a) cap. 5 dau următoarele valori proprii și funcții proprii ale operatorului $\mathfrak{A}$

$$\lambda_n = a^2\pi^2, \quad u_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x.$$

Conform formulei (1.8) găsim

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x, \tag{5}$$

unde, pentru simplitate, s-a notat

$$b_n = 2\int_0^1 \varphi(x) \sin n\pi x \, dx. \tag{6}$$

Să demonstrăm mai întîi că pentru $0 \leqslant x \leqslant 1$, $t \geqslant 0$, seria (5) converge uniform. Pentru aceasta integrăm (6) prin părți; ținînd seama de condiția (4), obținem $b_n = \beta_n/n$, unde

$$\beta_n = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \varphi'(x) \cos n\pi x \, dx$$

este al n-lea coeficient Fourier al funcției $\dfrac{1}{\pi}\varphi'(x)$ din dezvoltarea ei după sistemul ortonormat $\{\sqrt{2} \cos n\pi x\}$. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2$ converge și atunci, în virtutea inegalității $|b_n| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\beta_n^2 + \dfrac{1}{n^2}\right)$, converge și seria $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$. Ultima serie majorează seria (5), ceea ce arată că ea este absolut și uniform convergentă; termenii seriei (5) sînt continui și suma ei este de asemenea continuă pentru $0 \leqslant x \leqslant 1$, $t \geqslant 0$.

Să arătăm acum că funcția $u(x, t)$ — suma seriei (5) — are pentru $t > 0$ derivate de orice ordin în raport cu x și t. Pentru aceasta este suficient să arătăm că prin derivarea seriei (5) în raport cu x și t, de un număr arbitrar de ori, se obține o serie ce converge uniform pentru $0 \leqslant x \leqslant 1$, $t \geqslant \bar{t}$, unde $\bar{t}$ este o constantă pozitivă arbitrară. Derivînd seria (5) de p ori în raport cu x și de q ori în raport cu t, obținem seria

$$(-1)^q \sum_{n=1}^{\infty} n^{p+2q} \pi^{p+2q} b_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin\left(n\pi x + p\frac{\pi}{2}\right). \tag{7}$$

Coeficienții Fourier b_n sînt, evident, mărginiți și seria (7) este majorată de seria

$$C \sum_{n=1}^{\infty} n^{2s} e^{-n^2\pi^2 t}, \quad C = \text{const}, \quad 2s \geqslant p + 2q, \quad s = \text{const}.$$

Apoi,

$$n^{2s} e^{-n^2\pi^2 t} < \frac{n^{2s}}{1 + n^2\pi^2\bar{t} + \ldots + \dfrac{n^{2s+2}}{(2s+2)!}(\pi^2\bar{t})^{2s+2}} < \frac{(2s+2)!}{(\pi^2\bar{t})^{2s+2} n^2},$$

adică putem construi majorantul mai puternic $C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, $C_1 = \text{const}$, care, evident, converge.

Cum se observă din mersul demonstrației, se poate stabili existența unui număr infinit de derivate pentru $t > 0$, presupunînd doar că $\varphi \in L(0, 1)$; ipotezele suplimentare asupra funcției $\varphi(x)$ au fost necesare numai pentru demonstrarea continuității soluției pentru $t = 0$.

§ 6. CAZUL CU PARTE ELIPTICĂ NEAUTOADJUNCTĂ

Fie ecuaţia căldurii de forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + B_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k} + C(x)u = f(x, t). \qquad (1)$$

În domeniul $Q = \Omega \times (0, \infty)$ formulăm pentru ecuaţia (1) problema mixtă cu condiţiile la limită

$$u|_B = 0, \qquad B = \partial[\Omega \times (0, \infty)] \qquad (2)$$

şi condiţia iniţială

$$u|_{t=0} = \varphi(x). \qquad (3)$$

Vom presupune că $A_{jk} \in C^{(1)}(\bar{\Omega})$, iar B_k şi C sînt mărginiţi şi măsurabili în Ω. Fie, de asemenea, $f \in C^{(1)}([0, \infty); L_2(\Omega))$. Ca şi mai sus desemnăm cu $\mathfrak{A}$ operatorul

$$\mathfrak{A}u = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right), \qquad u|_{\partial\Omega} = 0$$

şi punem

$$Ku = B_k\frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Considerînd $u(x, t)$ şi $f(x, t)$ ca funcţii abstracte de t, problema (1)—(3) poate fi reprezentată sub forma

$$\frac{du}{dt} + \mathfrak{A}u + Ku = f(t), \qquad u(0) = \varphi. \qquad (4)$$

Înmulţind scalar aceasta cu o funcţie abstractă oarecare $\eta(t)$ cu valori în $H_{\mathfrak{A}}$, obţinem identitatea

$$\left(\frac{du}{dt}, \eta\right) + [u, \eta]_{\mathfrak{A}} + (Ku, \eta) = (f, \eta). \qquad (5)$$

Funcţia $u(t)$, care satisface identitatea (5) şi condiţia iniţială (3), o vom numi *soluţia slabă* a problemei (1)—(3). Vom considera ca şi mai înainte că soluţia slabă este o funcţie abstractă de t, ce aparţine clasei (*) §1.

Ca şi în §6, cap. 18, desemnăm prin G operatorul care asociază funcţiei $f \in L_2(\Omega)$ soluţia slabă u_0 a problemei $\mathfrak{A}u = f$. Folosind formula (6.4) cap. 18, aducem identitatea (5) la forma

$$\left(\frac{du}{dt}, \eta\right) + [u, \eta]_{\mathfrak{A}} + [Vu, \eta]_{\mathfrak{A}} = (f, \eta), \qquad (6)$$

unde $V = GK$. (Acest produs s-a notat aici cu litera V în loc de T, care în prezentul paragraf joacă un alt rol. Amintim (vezi §6, cap. 18) că V este un operator compact în $H_{\mathfrak{A}}$).

Dacă soluţia slabă a problemei există, atunci, pentru orice t fixat, ea este un element atît din $L_2(\Omega)$, cît şi din $H_{\mathfrak{A}}$. Menţinînd notaţiile λ_n şi u_n pentru valorile proprii şi funcţiile proprii ale operatorului $\mathfrak{A}$, avem dezvoltarea

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)u_k, \quad c_k(t) = (u(t), u_k), \qquad (7)$$

convergentă atît în metrica lui $L_2(\Omega)$, cît şi în metrica lui $H_{\mathfrak{A}}$. Înlocuind această dezvoltare în identitatea (6) şi punînd în ea $\eta = u_n$, obţinem sistemul infinit pentru coeficienţii seriei (7)

$$c_n'(t) + \lambda_n c_n(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [Vu_k, u_n]_{\mathfrak{A}}\, c_k(t) = f_n(t); \quad f_n(t) = (f(t), u_n).$$

De aici, folosind condiţia iniţială, deducem

$$c_n(t) + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} \sum_{k=1}^{\infty} [Vu_k, u_n]_{\mathfrak{A}}\, c_k(\tau)\, d\tau =$$

$$= (\varphi, u_n)\, e^{-\lambda_n t} + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau; \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \qquad (8)$$

Considerăm spaţiul Banach $\mathscr{B}$ ale cărui elemente sînt şirurile $z = \{z_n(t)\}$ de funcţii numerice pentru care

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left\{\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2(t)\right\}^{1/2} < \infty; \qquad (9)$$

drept normă a elementului $z \in \mathscr{B}$ luăm partea stîngă a inegalităţii (9). Este uşor de arătat că şirul părţilor din dreapta sistemului infinit (8) este un element al spaţiului $\mathscr{B}$; să arătăm că şirul elementelor necunoscute $\{c_n(t)\}$, dacă el există, aparţine aceluiaşi spaţiu. Într-adevăr,

soluția slabă $u \in C([0, \infty) L_2(\Omega))$ și de aceea mărimea $\|u(t)\|_{L_2(\Omega)}$ este funcție continuă de t pe segmentul $[0, T]$. În acest caz ea este mărginită

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(t)\|_{L_2(\Omega)} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2(t) \right\}^{1/2} < \infty$$

și afirmația a fost demonstrată.

Șirul părților din dreapta ale sistemului (8) îl notăm prin $g = \{g_n(t)\}$, iar șirul $\{c_n(t)\}$ prin c. În spațiul $\mathscr{B}$ introducem doi operatori. Unul dintre ei, generat de matricea $[Vu_k, u_n]_{\mathfrak{H}}$ îl desemnăm prin W; celălalt, pe care îl desemnăm prin P, este definit de

$$(Pz)_n = \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} z_n(\tau) d\tau.$$

Ambii operatori sînt mărginiți în $\mathscr{B}$: pentru P acest lucru este evident, iar mărginirea lui W rezultă ușor din faptul că operatorul V este compact și prin urmare mărginit în $H_{\mathfrak{H}}$. De asemenea, operatorii P și W comută, adică $PW = WP$.

Sistemul (8) poate fi scris sub forma

$$c = PWc + g. \tag{10}$$

Să arătăm că ecuația (10) are în $\mathscr{B}$ o soluție și numai una singură. Demonstrația se bazează pe următoarea lemă care rezultă din faptul că operatorul P este de tip Volterra.

Lema 22.6.1. *Seria*

$$\sum_{s=0}^{\infty} (PW)^s \tag{11}$$

converge în norma spațiului $\mathscr{B}$.

Operatorii P și W comută și de aceea $(PW)^s = P^s W^s$ și $\|(PW)^s z\| \leqslant \|P^s\| \cdot \|W\|^s \cdot \|z\|$. Să găsim expresia P^s. Avem

$$(P^2 z)_n = \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\sigma)} (Pz_n)(\sigma) d\sigma =$$

$$= \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\sigma)} \left\{ \int_0^\tau e^{-\lambda_n(\sigma-\tau)} z_n(\tau) d\tau \right\} d\sigma =$$

$$= \int_0^t z_n(\tau) \left\{ \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\sigma \right\} d\tau = \int_0^t (t-\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} z_n(\tau) d\tau,$$

și prin urmare obținem ușor

$$(P^s z)_n = \frac{1}{(s-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{s-1} e^{-\lambda_n(t-\tau)} z_n(\tau) d\tau. \tag{12}$$

Pentru cele ce urmează este suficientă următoarea estimare. Conform definiției normei în $\mathscr{B}$ avem

$$\|P^s z\|^2 = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \sum_{n=1}^{\infty} [(P^s z)_n(t)]^2,$$

și din formula (12) obținem

$$[(P^s z)_n(t)]^2 \leqslant \frac{T^{2s-2}}{[(s-1)!]^2} \left(\int_0^T |z_n(\tau)| d\tau \right)^2 \leqslant \frac{T^{2s-1}}{[(s-1)!]^2} \int_0^T z_n^2(\tau) d\tau,$$

de unde

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(P^s z)_n(t)]^2 \leqslant \frac{T^{2s-1}}{[(s-1)!]^2} \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} z_n^2(\tau) d\tau \leqslant \frac{T^{2s}}{[(s-1)!]^2} \|z\|^2.$$

Luînd marginea superioară a părții din stînga, găsim estimarea normei operatorului P^s:

$$\|P^s\| \leqslant \frac{T^s}{(s-1)!}. \tag{13}$$

De aici rezultă că seria (11) este majorată în normă de seria numerică convergentă

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{T^s \|W\|^s}{(s-1)!}.$$

Nu este greu de verificat că seria

$$c = \sum_{s=0}^{\infty} (PW)^s g \tag{14}$$

dă soluția ecuației (10). Această soluție este unică: dacă $c^{(0)}$ și $c^{(1)}$ sînt două soluții ale ecuației (10), atunci diferența $\tilde{c} = c^{(0)} - c^{(1)}$

satisface ecuaţia $\tilde{c} = PW\tilde{c}$. De aici $\tilde{c} = (PW)^2\tilde{c} = \ldots = (PW)^s\tilde{c}$, unde s este un număr natural arbitrar. Atunci

$$\| \tilde{c} \| = \| (PW)^s \tilde{c} \| \leqslant \| P^s \| \cdot \| W \|^s \cdot \| \tilde{c} \| \leqslant \frac{T^s \| W \|^s}{(s-1)!} \| \tilde{c} \| \xrightarrow[s \to \infty]{} 0$$

şi deci $\tilde{c} = 0$, sau $c^{(0)} = c^{(1)}$.

Astfel, rezolvînd ecuaţia (10), găsim un unic şir al coeficienţilor c şi formula (7) arată că soluţia slabă a problemei (1)—(3) este unică. Pe de altă parte, raţionînd ca în §2, constatăm că funcţia definită de seria (7), unde coeficienţii $c_k(t)$ sînt daduşi din ecuaţia (10), este soluţia slabă a problemei (1)—(3). De asemenea, nu este greu de arătat că această problemă este corectă în perechea de spaţii construite în § 3.

§ 7. METODA FOURIER PENTRU ECUAŢIA UNDELOR

Soluţia slabă $u(x, t) = u(t)$ a problemei mixte pentru ecuaţia undelor (vezi § 2, cap. 21) este o funcţie abstractă de t ce aparţine clasei K (formula (2.9) cap. 21) ce satisface identitatea

$$-\int_0^T \left(\frac{du(t)}{dt}, \frac{d\eta(t)}{dt} \right) dt + \int_0^T [u(t), \eta(t)]\, dt - (\varphi_1, \eta(0)] = \int_0^T (f(t), \eta(t))\, dt, \quad \eta \in K_T, \tag{1}$$

şi condiţia iniţială

$$u(0) = \varphi_0. \tag{2}$$

Aici $\varphi_0 \in H_{\mathfrak{A}}$, $\varphi_1 \in L_2(\Omega)$. Presupunem că $f(t) = f(x, t)$ este o funcţie abstractă din clasa $C([0, \infty); L_2(\Omega))$. Condiţia (2) se înţelege în sensul trecerii la limită în metrica energetică, adică $\lim_{t \to 0} |u(t) - \varphi_0| = 0$.

Să presupunem că soluţia $u(t)$ a problemei (1) — (2) există. O dezvoltăm în serie în metrica lui $L_2(\Omega)$ după sistemul funcţiilor proprii ale operatorului $\mathfrak{A}$

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\, u_n, \quad c_n(t) = (u(t), u_n). \tag{3}$$

Aceeaşi serie scrisă sub forma $u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}\, c_n(t) \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}$, reprezintă dezvoltarea soluţiei $u(t)$ în metrica lui $H_{\mathfrak{A}}$ după sistemul complet ortonormat $u_n/\sqrt{\lambda_n}$.

Punem în identitatea (1) $\eta(t) = (T - t)u_n$. Avînd în vedere că $[u(t), u_n] = \lambda_n(u(t), u_n) = \lambda_n c_n(t)$, obţinem pentru coeficienţii $c_n(t)$ ecuaţia

$$\int_0^T c_n'(t)\, dt - T(\varphi_1, u_n) + \lambda_n \int_0^T (T - t)\, c_n(t)\, dt = \int_0^T (T - t) f_n(t)\, dt, \tag{4}$$

unde

$$f_n(t) = (f(t), u_n). \tag{5}$$

Diferenţiem ecuaţia (4) în raport cu T şi schimbăm notaţiile T şi t, respectiv cu t şi τ:

$$c_n'(t) - (\varphi_1, u_n) + \lambda_n \int_0^t c_n(\tau)\, d\tau = \int_0^t f_n(\tau)\, d\tau. \tag{6}$$

Ecuaţia (6) arată că derivata de ordinul al doilea $c_n''(t)$ există. Derivînd, observăm că $c_n(t)$ verifică ecuaţia diferenţială de ordinul al doilea cu coeficienţii constanţi

$$\frac{d^2 c_n(t)}{dt^2} + \lambda_n c_n(t) = f_n(t); \tag{7}$$

condiţiile iniţiale pentru această ecuaţie le obţinem din relaţiile (2), (3) şi (6)

$$c_n(0) = (\varphi_0, u_n), \quad c_n'(0) = (\varphi_1, u_n). \tag{8}$$

Soluţia problemei are forma

$$c_n(t) = (\varphi_0, u_n) \cos \sqrt{\lambda_n}\, t + \frac{(\varphi_1, u_n)}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n}\, t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t \sin \sqrt{\lambda_n}(t - \tau) f_n(\tau)\, d\tau. \tag{9}$$

De aici

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (\varphi_0, u_n) \cos \sqrt{\lambda_n} t + \frac{(\varphi_1, u_n)}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n}\, t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t \sin \sqrt{\lambda_n}(t - \tau) f_n(\tau)\, d\tau \right\} u_n(x). \qquad (10)$$

Astfel, dacă soluția slabă a problemei mixte pentru ecuația undelor există, atunci ea trebuie să aibă forma (10). Ca și în cazul ecuației căldurii de aici rezultă *unicitatea soluției slabe*.

Formula (10) este destul de greoaie, de aceea o justificăm în modul următor.

Să presupunem că funcțiile $v(x, t)$ și $w(x, t)$ sînt soluțiile slabe ale următoarelor probleme: ecuația omogenă a undelor cu condiții inițiale neomogene

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \mathfrak{A}v = 0, \quad v|_{t=0} = \varphi_0, \quad \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = \varphi_1 \qquad (11)$$

și ecuația neomogenă a undelor cu condiții inițiale omogene

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \mathfrak{A}w = f(t), \quad w|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=0} = 0. \qquad (12)$$

Atunci, evident, $u = v + w$. Din formula generală (10) deducem următoarele formule pentru v și w:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (\varphi_0, u_n) \cos \sqrt{\lambda_n}\, t + \frac{(\varphi_1, u_n)}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n}\, t \right\} u_n(x), \qquad (13)$$

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t \sin \sqrt{\lambda_n}\,(t - \tau) f_n(\tau)\, d\tau. \qquad (14)$$

În următoarele două paragrafe justificăm metoda Fourier pentru fiecare din problemele (11) și (12).

§ 8. JUSTIFICAREA METODEI PENTRU ECUAȚIA OMOGENĂ

Ca și în cazul ecuației căldurii (§ 2), justificarea metodei Fourier constă în verificarea cîtorva afirmații.

a) **Seria (7.13) converge în metrica lui $H_{\mathfrak{A}}$ uniform în raport cu t pe toată axa.**

Scriem seria (7.13) sub forma

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{ \sqrt{\lambda_n}\, (\varphi_0, u_n) \cos \sqrt{\lambda_n}\, t +$$

$$+ (\varphi_1, u_n) \sin \sqrt{\lambda_n}\, t \} \frac{u_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\varphi_0, \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}} \right] \cos \sqrt{\lambda_n}(t) + (\varphi_1, u_n) \sin \sqrt{\lambda_n}\, t \right\} \frac{u_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}. \qquad (1)$$

Ultima serie este o serie după sistemul de funcții $\left\{ \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}} \right\}$, ortonormat în metrica lui $H_{\mathfrak{A}}$ și este suficient să se arate că seria pătratelor coeficienților ei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\varphi_0, \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}} \right] \cos \sqrt{\lambda_n}\, t + (\varphi_1, u_n) \sin \sqrt{\lambda_n}\, t \right\}^2, \qquad (2)$$

converge uniform în raport cu t. Suma acestei serii nu depășește mărimea $2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi_0, \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}} \right]^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_1, u_n)^2$. Pe baza inegalității lui Bessel ambele serii converg. În același timp termenii lor nu depind de t. Conform teoremei lui Weierstrass, seria (2) converge uniform.

Seria (7.13) converge uniform în raport cu t și în metrica lui $L_2(\Omega)$. Acest lucru rezultă imediat din inegalitatea de pozitivă definire (inegalitatea (3.5) cap. 4).

Din afirmația stabilită mai sus rezultă de asemenea că

$$v(x, t) = v(t) \in C([0, \infty), H_{\mathfrak{A}}).$$

b) Seria obținută prin derivarea seriei (4.13) în raport cu t

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{ - \sqrt{\lambda_n}\, (\varphi_0, u_n) \sin \sqrt{\lambda_n}\, t + (\varphi_1, u_n) \cos \sqrt{\lambda_n}\, t \} u_n(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ - \left[\varphi_0, \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}} \right] \sin \sqrt{\lambda_n}\, t + (\varphi_1, u_n) \cos \sqrt{\lambda_n}\, t \right\} u_n(x), \qquad (3)$$

converge uniform în raport cu t în metrica lui $L_2(\Omega)$.

Este suficient să se scrie inegalitatea

$$\left\{-\left[\varphi_0, \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right]\sin\sqrt{\lambda_n}\,t + (\varphi_1, u_n)\cos\sqrt{\lambda_n}\,t\right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\left[\varphi_0, \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right]^2 + 2(\varphi_1, u_n)^2$$

și apoi, ca și la punctul a), să aplicăm inegalitatea lui Bessel și teorema lui Weierstrass.

Din cele demonstrate la punctele *a*) și *b*) rezultă că $v(x, t) = v(t) \in C^{(1)}([0, \infty); L_2(\Omega))$ și prin urmare $v(t) \in K$.

c) Suma seriei (4.13) satisface condițiile inițiale (4.11).

Într-adevăr, pe baza celor demonstrate la punctul a), în seria (1) se poate trece la limită, termen cu termen (în metrica lui $H_{\mathfrak{A}}$), pentru $t \to 0$; de aici se deduce că

$$\lim_{t\to 0} |v(t) - \varphi_0| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_0, \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right]\frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}} - \varphi_0\right| = 0.$$

Mai departe, conform celor demonstrate la punctul b), suma seriei (3) este egală cu $dv(t)/dt$ și în această serie se poate de asemenea trece la limită, termen cu termen, pentru $t \to 0$:

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{dv(t)}{dt} - \varphi_1\right\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_1 u_n)\,u_n - \varphi_1\right\| = 0.$$

d) Suma seriei (7.13) satisface identitatea

$$-\int_0^T\left(\frac{dv(t)}{dt}, \frac{d\eta(t)}{dt}\right)dt + \int_0^T [v(t), \eta(t)]\,dt - (\varphi_1, \eta(0)) = 0,$$

$$\forall \eta \in K_T, \tag{4}$$

ce se obține din identitatea (7.1) pentru $f \equiv 0$.

Pentru simplificare, notăm cu $\gamma_n(t)$ coeficienții seriei (7.13)

$$\gamma_n(t) = (\varphi_0, u_n)\cos\sqrt{\lambda_n}t + \frac{(\varphi_1, u_n)}{\sqrt{\lambda_n}}\sin\sqrt{\lambda_n}t,$$

atunci

$$v(x, t) = v(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n(t)\,u_n.$$

Coeficienții $\gamma_n(t)$ satisfac ecuația diferențială (7.7) în care punem $f_n(t) \equiv 0$:

$$\gamma_n''(t) + \lambda_n\gamma_n(t) = 0. \tag{5}$$

Astfel,

$$-\int_0^T\left(\frac{dv}{dt}, \frac{d\eta}{dt}\right)dt = -\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\gamma_n'(t)\left(u_n, \frac{d\eta(t)}{dt}\right)dt.$$

Integrînd prin părți seria (3), uniform convergentă în raport cu t, obținem

$$-\int_0^T\gamma_n'(t)\left(u_n, \frac{d\eta(t)}{dt}\right)dt = \int_0^T\gamma_n''(t)\,(u_n, \eta(t))\,dt -$$

$$-\gamma_n'(t)\,(u_n, \eta(t))\Big|_{t=0}^{t=T} = \int_0^T\gamma_n''(t)\,(u_n, \eta(t))\,dt + (\varphi_1, u_n)\,(u_n, \eta(0));$$

și de aici

$$-\int_0^T\left(\frac{dv(t)}{dt}, \frac{d\eta(t)}{dt}\right)dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\gamma_n''(t)(u_n, \eta(t))\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_1, u_n)\,(u_n, \eta(0)).$$

Dar conform egalității lui Parseval

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_1, u_n)\,(u_n, \eta(0)) = (\varphi_1, \eta(0)),$$

și prin urmare

$$-\int_0^T\left(\frac{dv(t)}{dt}, \frac{d\eta(t)}{dt}\right)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\gamma_n''(t)(u_n, \eta(t))\,dt + (\varphi_1, \eta(0)), \tag{6}$$

deci

$$\int_0^T [u(t),\ \eta(t)]\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \gamma_n(t)[u_n,\ \eta(t)]\,dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \lambda_n \gamma_n(t)\,(u_n,\ \eta(t))dt. \qquad (7)$$

Adunînd egalităţile (6) şi (7) şi ţinînd seama de ecuaţia (5), obţinem identitatea (4).

§9. JUSTIFICAREA METODEI PENTRU CONDIŢII INIŢIALE OMOGENE

Vom demonstra acum că suma seriei (7.14) este soluţia slabă a problemei (7.12). În acest scop arătăm că pentru seria (7.14) au loc toate afirmaţiile a) — d) din paragraful precedent, cu singura diferenţă că convergenţa uniformă are loc nu pe toată axa t, ci numai pe segmente de forma $[0,\ \bar{t}]$, $\bar{t} = \text{const} > 0$.

Demonstrarea afirmaţiei a) se reduce la verificarea faptului că seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t \sin \sqrt{\lambda_n}\,(t-\tau) f_n(\tau)\,d\tau \right\}^2 \qquad (1)$$

converge uniform pe segmentul $[0,\ \bar{t}]$. Conform inegalităţii lui Buniakovski, avem

$$\left\{ \int_0^t \sin \sqrt{\lambda_n}\,(t-\tau) f_n(\tau)\,d\tau \right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_0^t |f_n(t)|\,dt \right\}^2 \leqslant \bar{t} \int_0^t f_n^2(\tau)\,d\tau. \qquad (2)$$

În baza egalităţii lui Parseval putem scrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(\tau) = \|f(\tau)\|^2. \qquad (3)$$

Seria de termeni pozitivi şi continui (3) converge la o funcţie continuă. Conform teoremei lui Dini seria (3) converge uniform. Dar atunci şi seria integrală converge uniform. Din inegalitatea (2) rezultă că seria (1) converge uniform.

Din demonstraţie rezultă că seria (7.14) converge uniform pe segmentul $[0,\ \bar{t}]$ în metrica lui $L_2(\Omega)$, precum şi că $w(x,\ 0) = 0$.

Trecem la afirmaţia b). Derivînd formal seria (7.14) în raport cu t, obţinem noua serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \int_0^t \cos \sqrt{\lambda_n}\,(t-\tau) f_n(\tau)\,d\tau.$$

Convergenţa uniformă a acestei serii în metrica lui $L_2(\Omega)$ va rezulta dacă stabilim că seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t \cos \sqrt{\lambda_n}\,(t-\tau) f_n(\tau)\,d\tau \right\}^2$$

converge uniform pe segmentul $[0,\ \bar{t}]$. Dar aceasta se demonstrează ca la punctul a). Atunci este evident că

$$\frac{dw(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \int_0^t \cos \sqrt{\lambda_n}\,(t-\tau) f_n(\tau)\,d\tau, \quad \left.\frac{dw(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

Afirmaţiile de la punctul c) au fost demonstrate pe parcurs.

Să trecem acum la punctul d). Să arătăm că $w(x,\ t)$ satisface identitatea (7.1), care în cazul dat ia forma

$$-\int_0^T \left(\frac{dw(t)}{dt},\ \frac{d\eta(t)}{dt} \right) dt + \int_0^T [w(t),\ \eta(t)]\,dt =$$

$$= \int_0^T (f(t),\ \eta(t))\,dt, \quad \eta \in K_T. \qquad (4)$$

Este evident că

$$\int_0^T \left(\frac{dw(t)}{dt},\ \frac{d\eta(t)}{dt} \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \left(u_n,\ \frac{d\eta(t)}{dt} \right) \times$$

$$\times \left\{ \int_0^t \cos \sqrt{\lambda_n}(t-\tau) f_n(\tau)\,d\tau \right\} dt.$$

Integrînd prin părţi obţinem

$$\int_0^T \left(u_n, \frac{d\eta(t)}{dt}\right) \left\{\int_0^t \cos \sqrt{\lambda_n}\,(t-\tau) f_n(\tau)\,d\tau\right\} dt =$$

$$= \left[(u_n, \eta(t)) \int_0^t \cos \sqrt{\lambda_n}\,(t-\tau) f_n(\tau)\,d\tau\right]_{t=0}^{t=T} -$$

$$- \int_0^T (u_n, \eta(t)) \left\{f_n(t) - \int_0^t \sqrt{\lambda_n} \sin \sqrt{\lambda_n}(t-\tau) f_n(\tau)\,d\tau\right\} dt.$$

Termenul integrat este zero deoarece $\eta(T) = 0$. Ţinînd seama de egalitatea

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\, u_n = f(t), \quad \sqrt{\lambda_n}(u_n, \eta(t)) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} [u_n, \eta(t)],$$

găsim că

$$\int_0^T \left(\frac{dw(t)}{dt}, \frac{d\eta(t)}{dt}\right) dt = -\int_0^T (f(t), \eta(t))\,dt + \int_0^T [w(t), \eta(t)]\,dt,$$

şi relaţia (4) este demonstrată.

În încheiere menţionăm că corectitudinea problemei mixte pentru ecuaţia undelor se studiază după aceeaşi schemă ca şi în cazul ecuaţiei căldurii. Formularea şi demonstrarea ipotezelor corespunzătoare le lăsăm pe seama cititorului.

§ 10. ECUAŢIA COARDEI VIBRANTE. CONDIŢII DE EXISTENŢĂ A SOLUŢIILOR CLASICE

Problema condiţiilor în care soluţia slabă a problemei mixte pentru ecuaţia undelor este totodată şi soluţia clasică, o studiem numai pentru cea mai simplă ecuaţie a coardei [1], şi anume

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

[1] În legătură cu cazul general vezi [21].

Vom rezolva această ecuaţie pentru condiţiile la limită

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \tag{2}$$

şi condiţiile iniţiale

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x). \tag{3}$$

În cazul dat, $\lambda_n = n^2\pi^2$, $u_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x$; conform formulei generale (7.13) soluţia generalizată are forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\pi t + \frac{b_n}{n\pi} \sin n\pi t\right) \sin n\pi x, \tag{4}$$

unde

$$a_n = 2\int_0^1 \varphi_0(x) \sin n\pi x\,dx, \qquad b_n = 2\int_0^1 \varphi_1(x) \sin n\pi x\,dx. \tag{5}$$

Soluţia (4) o numim clasică dacă pentru $0 \leqslant x \leqslant 1, t > 0$, ea este continuă împreună cu derivatele sale de primele două ordine. Aceasta va avea loc dacă seria (4) şi seriile obţinute prin derivare, odată şi de două ori, sînt uniform convergente.

Să arătăm că seriile respective converg într-adevăr uniform dacă sînt îndeplinite următoarele condiţii:

1) funcţiile $\varphi_0^{(k)}(x)$, $k = 0,1,2$, şi $\varphi_1^{(k)}(x)$, $k = 0, 1$, sînt absolut continue pe segmentul $[0,1]$;

2) $\varphi_0''' \in L_2(0, 1)$, $\varphi_1'' \in L_2(0, 1)$;

3) sînt îndeplinite condiţiile de racordare

$$\varphi_0(0) = \varphi_0(1) = 0, \quad \varphi_1(0) = \varphi_1(1) = 0, \quad \varphi_0''(0) = \varphi_0''(1) = 0. \tag{6}$$

Remarcăm că condiţiile de racordare sînt necesare pentru ca soluţia (4) să fie clasică. Primele două condiţii (6) rezultă din continuitatea funcţiei $u(x, t)$ în punctele $x = 0$, $t = 0$ şi $x = 1$, $t = 0$; următoarele condiţii (6) — din continuitatea în aceleaşi puncte a derivatei $\partial u/\partial t$. Ultima pereche se poate obţine astfel: presupunînd în ecuaţia (1) $t = 0$, obţinem

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{t=0} - \varphi_0''(x) = 0.$$

Derivînd identitatea (2), obţinem

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=1} = 0.$$

Presupunînd aici $t = 0$ şi în relaţia precedentă $x = 0$ şi $x = 1$, obţinem a treia parte a condiţiei (6). De îndată ce condiţiile 1) — 3) au fost formulate, cele ce urmează se obţin simplu. Integrînd prin părţi, avem

$$a_n = -\frac{2}{n^3\pi^3}\int_0^1 \varphi_0'''(x)\cos n\pi x\,dx, \quad b_n = -\frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 \varphi_1''(x)\sin n\pi x\,dx.$$

Notăm

$$\alpha_n = -\frac{2}{\pi^3}\int_0^1 \varphi_0'''(x)\cos n\pi x\,dx, \quad \beta_n = -\frac{2}{\pi^3}\int_0^1 \varphi_1''(x)\sin n\pi x\,dx,$$

atunci $a_n = \alpha_n/n^3$, $b_n = \beta_n\pi/n^2$. Mărimile α_n şi β_n sînt coeficienţii Fourier ai funcţiilor $-\frac{1}{\pi^3}\varphi_0'''(x)$ şi $-\frac{1}{\pi^3}\varphi_1''(x)$ ce aparţin spaţiului $L_2(0, 1)$. De aici rezultă că seriile $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^2$ converg. Formula (4) capătă forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}(\alpha_n\cos n\pi t + \beta_n\sin n\pi t)\sin n\pi x. \tag{7}$$

Seria (7) şi seriile derivatelor ei de ordinul întîi şi al doilea sînt majorate, respectiv, de seriile convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\alpha_n| + |\beta_n|}{n^3}, \quad C'\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\alpha_n| + |\beta_n|}{n^2},$$

$$C''\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\alpha_n| + |\beta_n|}{n},$$

$$C', C'' = \text{const}.$$

De aici rezultă că suma seriei (4), adică funcţia $u(x, t)$ este continuă împreună cu derivatele sale de ordinul întîi şi al doilea, ceea ce trebuia demonstrat.

Capitolul 23

PROBLEMA CAUCHY PENTRU ECUAŢIA CĂLDURII

§ 1. FORMULA LUI POISSON

Să analizăm ecuaţia neomogenă a căldurii

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x, t) \tag{1}$$

cu condiţia iniţială

$$u|_{t=0} = \varphi(x). \tag{2}$$

Pentru simplitate, să presupunem că funcţiile $f(x, t)$ şi $\varphi(x)$ sînt continue şi mărginite şi vom căuta soluţia problemei Cauchy (1) — (2) de asemenea mărginită. Să considerăm funcţia $v(x - y, t - \tau)$ definită de formula (6.8) cap. 10 :

$$v(x - y, t - \tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\sqrt{\pi(t-\tau)})^m}\, e^{-\frac{r^2}{4(t-\tau)}}, & t > \tau, \\ 0 & t \leqslant \tau; \ r = |x - y|. \end{cases}$$

Amintim că pentru $t \neq \tau$, $x \neq y$, funcţia v satisface ecuaţiile

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta_x v = 0, \quad -\frac{\partial v}{\partial \tau} - \Delta_y v = 0.$$

Vom presupune că x este un punct arbitrar al spaţiului E_m, iar t un număr pozitiv arbitrar. Fie $u(y, \tau)$ o funcţie de clasă $C^{(2,1)}(E_m \times [0, \infty))$ (pentru semnificaţia notaţiei vezi § 2, cap. 20). Presupunem de asemenea că u şi $\partial u/\partial x_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$, sînt mărginite. Aplicăm funcţiilor u şi v formula Green (6.12) cap. 9. Corespunzător notaţiilor adoptate la începutul prezentei secţiuni [1], în formula amintită urmează să se înlocuiască m cu $m + 1$; în afară de aceasta, vom scrie y în locul lui x şi τ în locul lui x_{m+1}. Alegem domeniul de integrare în modul următor. În planul $\tau = 0$ construim bila B_R de rază R cu centrul în originea axelor de coordonate. Fixăm punctul

[1] Partea a patra (capitolele 20—24). (*N.T.*).

$x \in E_m$ și alegem pe R astfel încît $x \in B_R$. Apoi, construim suprafața cilindrică ale cărei generatoare sînt paralele la axa t, avînd ca directoare sfera $S_R = \partial B_R$. Intersectăm această suprafață cu planul $\tau = t - \varepsilon$, unde numerele t și ε satisfac inegalitatea $0 < \varepsilon < t$, altfel oarecare. Bila obținută prin intersecția acestui plan cu suprafața cilindrică indicată mai sus o notăm prin $B_R^{(\varepsilon)}$. Domeniul $Q_t^{(\varepsilon)}$, de frontieră $B_R \cup B_t^{(\varepsilon)} \cup B_R^{(\varepsilon)}$ (fig. 28), îl considerăm ca domeniul de integrare din formula Green. Avînd în vedere că $M_v = 0$, obținem relația

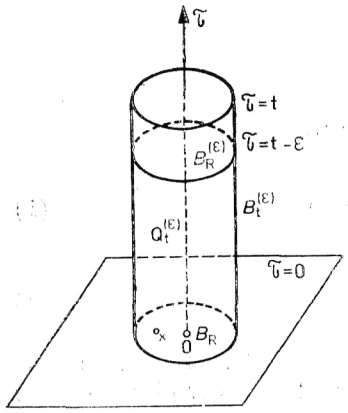

Fig. 28

$$\int_{Q_t^{(\varepsilon)}} v(x-y, t-\tau)\, Lu(y, \tau)\, dy\, d\tau =$$

$$= -\int_{B_R} v(x-y, t)\, u(y, 0)\, dy +$$

$$+\int_{B_R^{(\varepsilon)}} v(x-y, \varepsilon)\, u(y, t-\varepsilon)\, dy -$$

$$-\int_{B_t^{(\varepsilon)}} \left(v\frac{\partial u}{\partial y_k} - u\frac{\partial v}{\partial y_k} \right) \cos(\nu, y_k)\, dS_R d\tau. \qquad (3)$$

Remarcăm că în a doua integrală din dreapta se poate scrie B_R în loc de $B_R^{(\varepsilon)}$.

Fie $\varepsilon \to 0$. Trecerea la limită în integralele pe $Q_t^{(\varepsilon)}$ și $B_t^{(\varepsilon)}$ este evidentă și rămîne să analizăm numai limita integralei

$$\int_{B_R} v(x-y, \varepsilon)\, u(y, t-\varepsilon)\, dy =$$

$$= \frac{1}{2^m(\pi\varepsilon)^{m/2}} \int_{B_R} u(y, t-\varepsilon)\, e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}}\, dy =$$

$$= \frac{1}{2^m(\pi\varepsilon)^{m/2}} \int_{r<\sqrt[4]{\varepsilon}} u(y, t-\varepsilon)\, e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}}\, dy +$$

$$+ \frac{1}{2^m(\pi\varepsilon)^{m/2}} \int_{B_R \setminus (r<\sqrt[4]{\varepsilon})} u(y, t-\varepsilon)\, e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}}\, dy. \qquad (4)$$

Al doilea termen tinde la zero odată cu ε. Într-adevăr, cum funcția $u(y, \tau)$ este mărginită, atunci termenul indicat nu depășește produsul unei anumite constante cu mărimea

$$\frac{1}{2^m\varepsilon^{m/2}} \int_{B_R \setminus (r<\sqrt[4]{\varepsilon})} e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}}\, dy < \frac{1}{2^m\varepsilon^{m/2}} \int_{r>\sqrt[4]{\varepsilon}} e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}}\, dy.$$

În ultima integrală facem schimbarea

$$y = x + 2\sqrt{\varepsilon}z; \qquad (5)$$

mărimea din dreapta capătă forma

$$\int_{|z|>1/2\sqrt[4]{\varepsilon}} e^{-|z|^2}\, dz;$$

această expresie tinde la zero pentru $\varepsilon \to 0$, pentru că integrala

$$\int_{E_m} e^{-|z|^2}\, dz$$

este convergentă.

Rămîne să găsim limita primei integrale din dreapta în (4). Reprezentăm această integrală sub forma

$$\frac{u(x, t)}{2^m(\pi\varepsilon)^{m/2}} \int_{r<\sqrt[4]{\varepsilon}} e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}}\, dy +$$

$$+ \frac{1}{2^m(\pi\varepsilon)^{m/2}} \int_{r<\sqrt[4]{\varepsilon}} [u(y, t-\varepsilon) - u(x, t)]\, e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}}\, dy. \qquad (6)$$

Să găsim limita primului termen din (6), în care scop facem din nou schimbarea (5). Prin aceasta termenul respectiv capătă forma

$$\frac{u(x,t)}{\pi^{m/2}} \int\limits_{|z|<1/2\sqrt[4]{\varepsilon}} e^{-|z|^2}\,dz \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{u(x,t)}{\pi^{m/2}} \int\limits_{E_m} e^{-|z|^2}\,dz.$$

Ultima integrală este egală cu

$$\int\limits_{E_m} e^{-|z|^2}\,dz = \prod_{k=1}^{m} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_k^2}\,dz_k = \pi^{m/2}, \tag{7}$$

iar limita primului termen din (6) este egală cu $u(x, t)$. Al doilea termen din (6) tinde la zero pentru $\varepsilon \to 0$. Într-adevăr, pentru orice $\eta > 0$, există $\varepsilon > 0$, astfel încît de îndată ce $\varepsilon < \varepsilon_0$ și $r < \sqrt[4]{\varepsilon}$, avem $|u(y, t-\varepsilon) - u(x, t)| < \eta$. Atunci termenul al doilea din (6) are estimarea

$$\frac{\eta}{2^m \pi^{m/2}} \int\limits_{r<\sqrt[4]{\varepsilon}} e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}}\,dy = \frac{\eta}{\pi^{m/2}} \int\limits_{|z|<(2\sqrt[4]{\varepsilon})^{-1}} e^{-|z|^2}\,dz <$$

$$< \frac{\eta}{\pi^{m/2}} \int\limits_{E_m} e^{-|z|^2}\,dz = \eta,$$

și afirmația este demonstrată. În sfîrșit,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{B_R} v(x-y, \varepsilon)\, u(y, t-\varepsilon)\,dy = u(x, t),$$

și din relația (3), ca urmare a trecerii la limită, rezultă egalitatea

$$u(x,t) = \int\limits_{Q_t} v(x-y, t-\tau)\, Lu(y,\tau)\,dy\,d\tau +$$

$$+ \int\limits_{B_R} u(y, 0)\, v(x-y, t)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{B_t} \left(v \frac{\partial u}{\partial y_k} - u \frac{\partial v}{\partial y_k} \right) \cos(\nu, y_k)\,dS_R\,d\tau, \tag{8}$$

unde $Q_t = B_R \times (0, t)$, $B_t = \partial B_R \times (0, t)$.

Menționăm un caz particular. Fie funcția $u(x, t)$ cu suport compact; schimbînd, la nevoie, originea axei timpului se poate considera că suportul funcției u se găsește în semispațiul $t > 0$. Luăm raza R astfel încît proiecția supp u pe planul $t = 0$ să se găsească în interiorul bilei B_R. Atunci în formula (8) integralele pe B_R și B_t se anulează. Apoi în exteriorul lui Q_t, sau $u \equiv 0$ (pentru $|y| > R$ și $\tau < 0$), sau $v \equiv 0$ (pentru $\tau > t$). Integrarea pe Q_t se poate înlocui prin integrarea pe întreg spațiul E_{m+1} și ajungem la

$$u(x,t) = \int\limits_{E_{m+1}} v(x-y, t-\tau)\, Lu(y,\tau)\,dy\,d\tau, \tag{9}$$

ceea ce arată că funcția $v(x-y, t-\tau)$ este într-adevăr soluția fundamentală a operatorului $-\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ (vezi § 6, cap. 10).

Să renunțăm acum la ipoteza că funcția u este cu suport compact. Presupunînd că $R \to \infty$ se arată ușor că în formula (8) integrala pe B_t tinde la zero; integrala pe B_R tinde, evident, la o integrală analoagă pe spațiul E_m, iar integrala pe Q_t tinde la o integrală pe stratul $E_m \times (0, t)$. Ca urmare obținem formula

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^m} \int_0^t \int\limits_{E_m} \frac{1}{(t-\tau)^{m/2}} e^{-\frac{r^2}{4(t-\tau)}}\, Lu(y,\tau)\,dy\,d\tau +$$

$$+ \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^m} \int\limits_{E_m} u(y, 0)\, e^{-\frac{r^2}{4t}}\,dy. \tag{10}$$

Să revenim la problema (1) — (2) și să presupunem că ea are soluția $u(x, t) \in C^{(2,1)}(E_m \times [0, \infty))$. Aplicînd acestei funcții formula (10), găsim că soluția problemei Cauchy pentru ecuația căldurii trebuie să aibă forma

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^m} \int_0^t \int\limits_{E_m} \frac{1}{(t-\tau)^{m/2}} e^{-\frac{r^2}{4(t-\tau)}} \times$$

$$\times f(y,\tau)\,dy\,d\tau + \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^m} \int\limits_{E_m} e^{-\frac{r^2}{4t}}\, \varphi(y)\,dy. \tag{11}$$

Formula (11) se numește *formula lui Poisson*. Menționăm cazul particular al ecuației omogene ($f(x, t) \equiv 0$) cînd

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^m} \int_{E_m} e^{-\frac{r^2}{4t}} \varphi(y)\, dy. \tag{12}$$

§ 2. ALTĂ DEDUCERE A FORMULEI LUI POISSON

Vom prezenta încă o cale de deducere a formulei lui Poisson, bazată pe transformata Fourier (vezi § 1, cap. 7). Pentru a simplifica calculele ne limităm la cazul ecuației omogene a căldurii. Să analizăm problema Cauchy

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x). \tag{1}$$

Vom presupune că toate operațiile efectuate mai jos au sens în ipoteza în care deducem formula pentru rezolvarea problemei Cauchy (1). Aplicînd ecuației (1) transformata Fourier în raport cu x, obținem

$$(2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \frac{\partial u(y, t)}{\partial t} e^{-i(x, y)}\, dy -$$

$$- (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u(y, t)}{\partial y_k^2} e^{i(x, y)}\, dy = 0. \tag{2}$$

Deoarece integrarea se referă la y și derivata la t, în prima integrală putem scoate în afară derivata în raport cu t, adică

$$(2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \frac{\partial u(y, t)}{\partial t} e^{-i(x, y)}\, dy =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{E_m} u(y, t)\ e^{-i(x, y)}\, dy = \frac{\partial \tilde{u}(x, t)}{\partial t},$$

unde $\tilde{u}(x, t)$ reprezintă transformata Fourier a funcției $u(x, t)$

$$\tilde{u}(x, t) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} u(y, t)\, e^{-i(x, y)}\, dy.$$

Integrînd prin părți al doilea termen din (2), obținem

$$(2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \frac{\partial^2 u(y, t)}{\partial y_k^2} e^{-i(x, y)} dy =$$

$$= -(2\pi)^{-\frac{m}{2}} x_k^2 \int_{E_m} u(y, t)\, e^{-i(x, y)}\, dy = -x_k^2 \tilde{u}(x, t). \tag{3}$$

Ecuația (2) capătă atunci forma

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + |x|^2 \tilde{u} = 0. \tag{4}$$

Aceasta este o ecuație diferențială de ordinul întîi cu variabila independentă t; coordonatele $x_1, x_2, \ldots, x_m$ joacă rol de parametri. Integrînd ecuația (4), obținem $\tilde{u}(x, t) = C(x)\, e^{-|x|^2 t}$. Presupunînd aici $t = 0$, găsim $C(x) = \tilde{u}(x, 0)$. Astfel, funcția $C(x)$ este transformata Fourier a valorii inițiale a funcției $u(x, t)$. Dar $u(x, 0) = \varphi(x)$, prin urmare

$$C(x) = \tilde{\varphi}(x) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \varphi(y)\, e^{-i(x, y)}\, dy, \quad \tilde{u}(x, t) = \varphi(x)\, e^{-|x|^2 t}.$$

Aplicînd formula de inversare a integralei Fourier (1.4) cap. 7, avem

$$u(x, t) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \tilde{\varphi}(y)\, e^{-|y|^2 t + i(x, y)}\, dy.$$

Înlocuim aici pe $\tilde{\varphi}(x)$ cu expresia sa și schimbăm ordinea de integrare:

$$u(x, t) = (2\pi)^{-m} \int_{E_m} \varphi(z) \left\{ \int_{E_m} e^{-|y|^2 t + i(x - z, y)}\, dy \right\} dz. \tag{5}$$

Calculăm integrala interioară din formula (5):

$$\int_{E_m} e^{-|y|^2 t + i(x - z, y)}\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sum_{k=1}^{m} \left[-y_k^2 t + (x_k - z_k)\right]} dy_1\, dy_2 \ldots dy_m =$$

$$= \prod_{k=1}^{m} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2 t + i(x_k - z_k) y}\, dy. \tag{6}$$

În integrala din dreapta y este o variabilă reală, $-\infty < y < \infty$.

Separăm factorul de ordinul k în produsul (6). Notăm, pentru prescurtare, $x_k - z_k = \alpha$. Problema se reduce la calcularea integralei

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2 t + i\alpha y}\, dy = e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\left(y - \frac{i\alpha}{2t}\right)^2} dy.$$

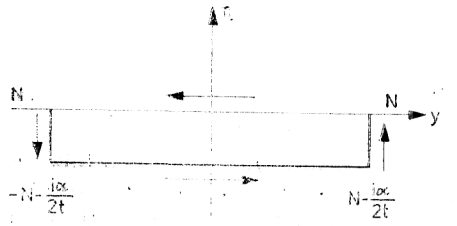

Fig. 29

Să considerăm planul variabilei complexe $\zeta = y + i\eta$. Pentru precizie admitem că $\alpha > 0$. Construim dreptunghiul de contur L, indicat în fig. 29. Conform teoremei lui Cauchy

$$\int_L e^{-t\zeta^2}\, d\zeta = 0$$

sau, mai explicit,

$$\int_{-N}^{+N} e^{-t\left(y - \frac{i\alpha}{2t}\right)^2} dy + \int_{-\frac{\alpha}{2t}}^{0} e^{-t(N + i\eta)^2}\, id\eta - \int_{-N}^{N} e^{-ty^2}\, dy -$$

$$- \int_{-\frac{\alpha}{2t}}^{0} e^{-t(-N + i\eta)^2}\, id\eta = 0.$$

Fie acum $N \to \infty$. Atunci a doua și a patra integrală tind la zero. Într-adevăr,

$$\left| \int_{-\frac{\alpha}{2t}}^{0} e^{-t(N \pm i\eta)^2}\, id\eta \right| \leqslant \int_{-\frac{\alpha}{2t}}^{0} e^{-t(N^2 - \eta^2)}\, d\eta =$$

$$= e^{-tN^2} \int_{-\frac{\alpha}{2t}}^{0} e^{t\eta^2}\, d\eta \xrightarrow[N \to \infty]{} 0.$$

De aici rezultă că

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\left(y - \frac{i\alpha}{2t}\right)^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ty^2}\, dy.$$

Este ușor de observat că pentru $\alpha < 0$ sîntem conduși la același rezultat. Schimbarea $y\sqrt{t} = s$ conduce la

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ty^2}\, dy = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\, ds = \sqrt{\frac{\pi}{t}}.$$

Astfel,

$$e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\left(y - \frac{i\alpha}{2t}\right)^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\, e^{-\frac{(x_k - z_k)^2}{4t}},$$

și integrala (6) este egală cu mărimea

$$\left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{1}{4t}\sum_{k=1}^{m}(x_k - z_k)^2} = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t}},\quad r = |x - z|.$$

Înlocuind acest rezultat în formula (5), obținem formula lui Poisson :

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^m} \int_{E_m} \varphi(z)\, e^{-\frac{r^2}{4t}}\, dz. \qquad (7)$$

§ 3. JUSTIFICAREA FORMULEI LUI POISSON

Pentru simplitate, justificăm formula lui Poisson în ipoteza că ecuația căldurii este omogenă. Nu vom încerca să demonstrăm nici valabilitatea ipotezei din § 1 despre soluția căutată, nici corectitudinea operațiilor din § 2. În locul acestora vom stabili direct că formula lui Poisson dă soluția mărginită a problemei Cauchy pentru ecuația căldurii (2.1) în unica ipoteză că funcția inițială $\varphi(x)$ este continuă și mărginită în spațiul E_m.

Să arătăm mai întîi că formula lui Poisson definește o funcție continuă pentru $t > 0$.

Să considerăm în spațiul $(m+1)$-dimensional al variabilelor $x_1, x_2, \ldots, x_m, t$, domeniul definit de inegalitățile

$$|x|^2 \leqslant a^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

unde a și T sînt constante pozitive. Arătăm că integrala ce intră în formula lui Poisson

$$\int_{E_m} \varphi(z)\, e^{-\frac{r^2}{4t}}\, dz \tag{2}$$

converge uniform în raport cu x și t în domeniul (1). Alegem un număr suficient de mare R și estimăm integrala

$$\int_{|z|>R} \varphi(z)\, e^{-\frac{r^2}{4t}}\, dz.$$

Funcția $\varphi(z)$ este mărginită; fie $|\varphi(z)| \leqslant M = \text{const}$. Mai departe, $r = |x - z| \geqslant |z| - |x| \geqslant |z| - a$. Vom considera că $R > 2a$. Atunci $a < \frac{R}{2} \leqslant \frac{|z|}{2}$ și $r > \frac{|z|}{2}$. Astfel, $e^{-\frac{r^2}{4t}} < e^{-\frac{|z|^2}{16T}}$ și prin urmare

$$\left| \int_{|z|>R} \varphi(z) e^{-\frac{r^2}{4t}}\, dz \right| < M \int_{|z|>R} e^{-\frac{|z|^2}{16T}}\, dz = M|S_1| \int_R^\infty e^{-\frac{\rho^2}{16T}}\, \rho^{m-1}\, d\rho. \tag{3}$$

Integrala

$$\int_0^\infty \rho^{m-1} e^{-\frac{\rho^2}{16T}}\, d\rho$$

este convergentă și de aceea integrala din dreapta în (3) poate fi făcută oricît de mică pentru R suficient de mare; deoarece aceasta nu depinde nici de x, nici de t, atunci integrala (2) converge uniform. De aici rezultă că funcția definită de formula lui Poisson este continuă pentru $t > 0$.

Să arătăm că pentru $t > 0$ funcția $u(x, t)$ este indefinit derivabilă în raport cu t și cu coordonatele punctului x și că toate derivatele se pot obține derivînd sub semnul integrală formula lui Poisson.

Să analizăm, spre exemplu, derivata $\partial u/\partial t$. Dacă diferențiem formal în raport cu t partea dreaptă a formulei lui Poisson, atunci se obține expresia

$$-\frac{m}{2^{m+1}\pi^{\frac{m}{2}} t^{\frac{m+2}{2}}} \int_{E_m} \varphi(z) e^{-\frac{r^2}{4t}}\, dz + \frac{1}{2^{m+1}\pi^{\frac{m}{2}} t^{\frac{m+4}{2}}} \int_{E_m} r^2 \varphi(z) e^{-\frac{r^2}{4t}}\, dz. \tag{4}$$

După cum am văzut, prima integrală converge uniform în domeniul (1). În mod analog se verifică că și integrala a doua converge uniform. De aici rezultă că derivata există, este continuă și coincide cu expresia (4). Existența celorlalte derivate se stabilește în mod analog.

Prin derivare directă se arată că funcția definită de formula lui Poisson satisface ecuația căldurii (2.1).

Rămîne să arătăm că funcția $u(x, t)$ este mărginită și satisface condiția inițială (2.2)

$$\lim_{t\to 0} u(x, t) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^m} \int_{E_m} \varphi(z)\, e^{-\frac{r^2}{4t}}\, dz = \varphi(x).$$

Efectuînd schimbarea $z = x + 2\sqrt{t}\xi$, formula lui Poisson capătă forma

$$u(x, t) = \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \varphi(x + 2\sqrt{t}\,\xi)\, e^{-|\xi|^2}\, d\xi. \tag{5}$$

Pe baza formulei $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho^2}\, d\rho = \sqrt{\pi}$ găsim ușor

$$\pi^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} e^{-|\xi|^2}\, d\xi = 1. \tag{6}$$

Astfel, din formula (5) rezultă că

$$|u(x, t) \leqslant M\pi^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} e^{-|\xi|^2}\, d\xi = M$$

şi formula $u(x, t)$ este deci mărginită. Mai departe, conform formulelor (5) şi (6) avem

$$u(x, t) - \varphi(x) = \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} [\varphi(x + 2\sqrt{t}\xi) - \varphi(x)]\, e^{-|\xi|^2}\, d\xi. \qquad (7)$$

Integrala din formula (7) o descompunem în două integrale luate pe domeniile $|\xi| > R$ şi $|\xi| < R$, unde R este o constantă arbitrară. Avem

$$\left| \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{|\xi|>R} [\varphi(x + 2\sqrt{t}\xi) - \varphi(x)]\, e^{-|\xi|^2}\, d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2M\pi^{-\frac{m}{2}} \int_{|\xi|>R} e^{-|\xi|^2}\, d\xi = 2M\pi^{-\frac{m}{2}} |S_1| \int_R^\infty \rho^{m-1} e^{-\rho^2}\, d\rho.$$

Integrala

$$\int_0^\infty \rho^{m-1} e^{-\rho^2}\, d\rho$$

converge şi se poate alege $R_0(\varepsilon)$ astfel încît pentru $R > R_0(\varepsilon)$ să avem

$$2M\pi^{-\frac{m}{2}} |S_1| \int_R^\infty \rho^{m-1} e^{-\rho^2}\, d\rho < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alegem $R > R_0(\varepsilon)$. Atunci există $t_0(\varepsilon)$ astfel încît pentru $0 < t < t_0(\varepsilon)$ şi pentru orice ξ, $|\xi| \leqslant R$, să avem

$$|\varphi(x + 2\sqrt{t}\xi) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Atunci

$$\left| \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{|\xi|<R} [\varphi(x + 2\sqrt{t}\xi) - \varphi(x)]\, e^{-|\xi|^2}\, d\xi \right| <$$

$$< \pi^{-\frac{m}{2}} \frac{\varepsilon}{2} \int_{E_m} e^{-|\xi|^2}\, d\xi = \frac{\varepsilon}{2}.$$

şi, în sfîrşit,

$$|u(x, t) - \varphi(x)| < \varepsilon, \quad 0 < t < t_0(\varepsilon).$$

Acestea încheie justificarea formulei lui Poisson.

În încheierea paragrafului ne referim la corectitudinea problemei Cauchy pentru ecuaţia omogenă a căldurii; extinderea rezultatelor pentru ecuaţia neomogenă nu prezintă dificultăţi. Drept B_2 considerăm spaţiul funcţiilor continue şi mărginite în E_m, cu norma

$$\|\varphi\|_2 = \sup_{x \in E_m} |\varphi(x)|. \qquad (8)$$

Drept B_1 considerăm spaţiul funcţiilor continue şi mărginite în $E_m \times [0, \infty]$, cu norma

$$\|u\|_1 = \sup_{x \in E_m,\, t \geqslant 0} |u(x, t)|. \qquad (9)$$

Dacă $\varphi \in B_2$, atunci soluţia problemei $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$, $u|_{t=0} = \varphi(x)$ în spaţiul B_1 există şi este unică. Aceasta înseamnă că operatorul R, ce transformă funcţia iniţială φ în soluţie, există şi este definit în tot spaţiul B_2. Mai departe, din formula lui Poisson, scrisă sub forma (5)

$$u(x, t) = \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \varphi(x + 2\sqrt{t}\xi)\, e^{-\xi^2}\, d\xi,$$

rezultă

$$|u(x, t)| \leqslant \sup_{z \in E_m} |\varphi(z)|\, \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} e^{-\xi^2}\, d\xi = \sup_{z \in E_m} |\varphi(z)| = \|\varphi\|_2.$$

Această inegalitate nu se modifică dacă se înlocuieşte partea stîngă cu limita ei superioară: $\|u\|_1 = \|R\varphi\|_1 \leqslant \|\varphi\|_2$ şi prin urmare $\|R\| \leqslant 1$. Aşadar, problema Cauchy pentru ecuaţia căldurii este corectă în perechea de spaţii (B_1, B_2), în care normele sînt date de formulele (9) şi (8).

§ 4. DESPRE VITEZA DE PROPAGARE A CĂLDURII

Din formula lui Poisson rezultă că viteza de propagare a căldurii este *infinită*. Într-adevăr, să ne imaginăm că mediul în care se propagă căldura umple întreg spațiul E_m. Să presupunem că la un moment inițial întreg mediul, cu excepția unui domeniu mărginit D, are temperatura zero ($\varphi(x) \equiv 0$) și că punctele domeniului D au o anumită temperatură $\varphi(x) > 0$. În orice punct $x \in E_m$ și la orice moment $t > 0$ temperatura $u(x, t)$ a mediului este definită prin formula lui Poisson

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^m} \int_D \varphi(z)\, e^{-\frac{r^2}{4t}}\, dz; \qquad (1)$$

integrala pe $E_m \setminus D$ se anulează deoarece în acest domeniu $\varphi(x) = 0$. Din formula (1) este evident că $u(x, t) > 0$. Astfel, pentru t oricît de mic și x oricît de departe de domeniul D, căldura din acest domeniu reușește ca în intervalul de timp t să ajungă pînă la punctul x. Aceasta înseamnă de fapt că propagarea căldurii se face cu viteză infinită. Această concluzie, fizic contradictorie, nu prezintă complicații în practică. Dacă $|x|$ este mare, iar t mic, atunci în formula (1) exponentul negativ este mare în mărime absolută și valoarea temperaturii $u(x, t)$ este neglijabilă. Practic, prin urmare, formula lui Poisson dă o anumită viteză finită de propagare a căldurii (cu precizia unor mărimi neglijabile).

Capitolul 24

PROBLEMA CAUCHY PENTRU ECUAȚIA UNDELOR

§ 1. UTILIZAREA TRANSFORMATEI FOURIER

Vom căuta soluția ecuației undelor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \qquad (1)$$

în tot spațiul E_m și pentru $t > 0$. Să presupunem că funcția căutată satisface condițiile inițiale

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x). \qquad (2)$$

Să admitem că toate operațiile efectuate mai jos au sens. Aplicăm relațiilor (1) și (2) transformata Fourier. Procedînd la fel ca în cazul ecuației căldurii, ajungem la următoarea problemă Cauchy pentru ecuația diferențială liniară de ordinul al doilea cu coeficienți constanți

$$\frac{d^2\tilde{u}}{dt^2} + |x|^2 \tilde{u} = 0, \qquad (3)$$

$$\tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\varphi}_0(x), \qquad \left.\frac{d\tilde{u}}{dt}\right|_{t=0} = \tilde{\varphi}_1(x); \qquad (4)$$

simbolul $\sim$ desemnează transformata Fourier. Soluția generală a ecuației (3) are forma

$$\tilde{u}(x, t) = A(x) \cos |x|\, t + B(x) \sin |x|\, t.$$

Pentru $t = 0$ găsim $\tilde{\varphi}_0(x) = A(x)$, $\tilde{\varphi}_1(x) = |x| B(x)$ și soluția problemei (3) — (4) ia forma

$$\tilde{u}(x, t) = \tilde{\varphi}_0(x) \cos |x|\, t + \tilde{\varphi}_1(x) \frac{\sin |x|\, t}{|x|}. \qquad (5)$$

Aplicînd inversa transformatei Fourier, găsim pentru soluția căutată formula

$$u(x, t) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \left[\tilde{\varphi}_0(y) \cos |y|\, t + \tilde{\varphi}_1(y) \frac{\sin |y|\, t}{|y|}\right] e^{i(x, y)}\, dy. \qquad (6)$$

Justificăm formula (6) în următoarele ipoteze. Presupunem că funcţia $\varphi_0(x)$ are în tot spaţiul E_m derivate continue pînă la ordinul $m+3$ inclusiv, iar funcţia $\varphi_1(x)$ — derivate continue pînă la ordinul $m+2$ inclusiv. Admitem că $\varphi_0(x)$ şi $\varphi_1(x)$, precum şi derivatele lor de ordinele amintite sînt diferite de zero doar într-un domeniu mărginit al spaţiului E_m. Din teorema 7.1.2 rezultă că pentru $|x|$ suficient de mare au loc estimările $\tilde{\varphi}_0(x) = O(|x|^{-m-3})$, $\tilde{\varphi}_1(x) = O(|x|^{-m-2})$. În acest caz funcţia de sub integrală din (6) are la infinit estimarea $O(|y|^{-m-3})$, iar derivatele funcţiei de sub integrală, de ordinul întîi şi al doilea în raport cu $x_1, x_2, \ldots, x_m, t$, au respectiv estimările $O(|y|^{-m-2})$ şi $O(|y|^{-m-1})$. În toate cazurile aceste estimări sînt uniforme în raport cu x şi t. De aici rezultă că atît integrala (6), cît şi integralele obţinute prin derivarea ei, odată sau de două ori, converg uniform în raport cu x şi t. În acest caz funcţia (6) este continuă şi de două ori continuu derivabilă în raport cu coordonatele şi cu timpul, în plus derivatele pot fi obţinute derivînd sub semnul integrală.

Acum nu este greu de arătat că funcţia (6) satisface condiţiile iniţiale (2) şi ecuaţia undelor (1). Presupunînd în (6) $t = 0$, găsim

$$u(x, 0) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \tilde{\varphi}_0(y)\, e^{i(x, y)}\, dy = \varphi_0(x);$$

se deduce uşor că, în cazul dat, condiţiile teoremei 7.1.3 sînt satisfăcute. Derivînd formula (6) în raport cu t şi punînd $t = 0$, găsim ecuaţia

$$\left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \tilde{\varphi}_1(y)\, e^{i(x, y)}\, dy = \varphi_1(x).$$

Mai departe,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t} = -(2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} |y|^2 \left[\tilde{\varphi}_0(y) \cos|y|t + \tilde{\varphi}_1(y) \frac{\sin|y|t}{|y|}\right] e^{i(x, y)}\, dy,$$

$$\Delta u = -(2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} |y|^2 \left[\tilde{\varphi}_0(y) \cos|y|t + \tilde{\varphi}_1(y) \frac{\sin|y|t}{|y|}\right] e^{i(x, y)}\, dy = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

şi deci funcţia (6) satisface ecuaţia undelor.

Acelaşi procedeu de transformare a ecuaţiei diferenţiale cu ajutorul transformatei Fourier poate fi utilizat şi în cazul ecuaţiei neomogene a undelor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x, t). \tag{7}$$

Să presupunem că pentru această ecuaţie s-a formulat problema Cauchy cu condiţiile iniţiale (2). Aplicăm transformata Fourier în raport cu coordonatele. Notînd

$$\tilde{f}(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{E_m} f(y, t)\, e^{-i(x, y)}\, dy,$$

obţinem ecuaţia

$$\frac{d^2\tilde{u}}{dt^2} + |x|^2 \tilde{u} = \tilde{f}(x, t). \tag{8}$$

Soluţia acestei ecuaţii, care satisface condiţiile (4), este funcţia

$$\tilde{u}(x, t) = \tilde{\varphi}_0(x) \cos|x|t + \tilde{\varphi}_1(x) \frac{\sin|x|t}{|x|} + \int_0^t \tilde{f}(x, \tau) \frac{\sin|x|(t-\tau)}{|x|}\, d\tau. \tag{9}$$

Dacă funcţiile $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ şi $f(x, t)$ au un număr suficient de derivate, ce sînt diferite de zero numai într-un domeniu mărginit, atunci inversa transformatei Fourier aplicată formulei (9) dă soluţia problemei Cauchy pentru ecuaţia neomogenă a undelor.

§ 2. UTILIZAREA SOLUŢIEI FUNDAMENTALE

Formula (1.6), care dă soluţia problemei Cauchy pentru ecuaţia undelor, poate fi îmbunătăţită. Să observăm mai întîi că prin înlocuirea lui $\tilde{\varphi}_0(y)$ şi $\tilde{\varphi}_1(y)$ cu expresiile lor în funcţie de φ_0 şi φ_1 în forma integralelor Fourier, se obţin integrale de rang $2m$; de fapt, ne putem mărgini la integrale de rang mult mai mic. Apoi, pentru justificarea formulei (1.6) a fost necesar să se presupună existenţa derivatelor cu un ordin mai înalt funcţiilor iniţiale; în

plus s-a impus ca aceste funcţii să fie diferite de zero numai într-un domeniu mărginit. În sfîrşit, din aspectul formulei (1.6) nu rezultă imediat că valoarea $u(x, t)$ se defineşte numai prin valorile funcţiilor iniţiale în domeniul de influenţă (§ 4, cap. 21). Consideraţii similare sînt adevărate şi pentru formula (1.9) ce rezolvă problema Cauchy pentru ecuaţia neomogenă a undelor. Avînd în vedere cele de mai sus, să rezolvăm problema Cauchy prin altă metodă, bazată pe utilizarea soluţiei fundamentale a ecuaţiei undelor. Această metodă nouă este mai laborioasă decît metoda din §1 bazată pe transformata Fourier, dar ea ne conduce la o nouă formă a soluţiei, care elimină neajunsurile semnalate mai sus.

În § 7, cap. 10 s-a construit funcţia $v(x - y, t - \tau)$, care pentru $x \neq y$ şi $t \neq \tau$ satisface ecuaţia omogenă a undelor atît în raport cu x, t, cît şi cu y, τ; această funcţie este definită de formula (7.11) cap. 10. Amintim, de asemenea, că funcţia

$$q_0(\lambda), \quad \lambda = \frac{t - \tau}{r},$$

definită de formula (7.9) cap. 10, satisface ecuaţia undelor pentru $r \neq 0$, $r = |x - y|$. În semispaţiul $\tau > 0$ alegem un punct (x, t) şi analizăm domeniul D mărginit de pînza inferioară a suprafeţei conului caracteristic $t - \tau = r$ şi de bila $r < t$, situată în planul $\tau = 0$. Separăm din D cilindrul $r < \varepsilon$ şi notăm prin D_ε porţiunea rămasă din domeniul D; celelalte notaţii sînt date pe fig. 30.

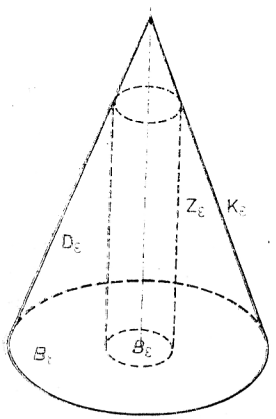

Fig. 30

Fie funcţia $u \in C^{(2)}(E_m \times [0, \infty))$. Atunci în domeniul închis $\bar{D}_\varepsilon$ ambele funcţii $u(y, \tau)$ şi $q_0\left(\frac{t-\tau}{r}\right)$, privite ca funcţii de y şi τ, aparţin clasei $C^2(\bar{D}_\varepsilon)$ şi acestora li se poate aplica formula Green (6.14) cap. 9. Ţinînd seama de faptul că $\Box\, q_0 = 0$, putem scrie formula indicată sub forma

$$\int_{D_\varepsilon} q_0\left(\frac{t-\tau}{r}\right) \Box\, u(y, \tau)\, dy\, d\tau = \int_\Gamma \left\{ q_0 \left[\frac{\partial u}{\partial \tau} \cos(\nu, \tau) - \frac{\partial u}{\partial y_k} \cos(\nu, y_k) \right] - \right.$$

$$\left. - u \left[\frac{\partial q_0}{\partial \tau} \cos(\nu, \tau) - \frac{\partial q_0}{\partial y_k} \cos(\nu, y_k) \right] \right\} d\Gamma. \tag{1}$$

În formula (1), $\Gamma = \partial D_\varepsilon = K_\varepsilon \cup Z_\varepsilon \cup (B_t \setminus B_\varepsilon)$; integrala pe Γ se descompune respectiv în trei integrale, fiecare din ele urmînd să fie studiată separat.

Pe conul caracteristic K funcţia $q_0 = 0$; în afară de aceasta pe acelaşi con

$$\frac{\partial q_0}{\partial \tau} \cos(\nu, \tau) - \frac{\partial q_0}{\partial y_k} \cos(\nu, y_k) = 0. \tag{2}$$

Într-adevăr, este evident că pe conul caracteristic direcţiile r, ν şi τ sînt situate în acelaşi plan bidimensional şi de aceea

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial \tau} \cos(\nu, \tau) + \frac{\partial}{\partial r} \cos(\nu, r).$$

Pe de altă parte,

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial \tau} \cos(\nu, \tau) + \frac{\partial}{\partial y_k} \cos(\nu, y_k).$$

De aici rezultă că pe conul K are loc identitatea

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \cos(\nu, y_k) = \frac{\partial}{\partial r} \cos(\nu, r).$$

De asemenea, în § 3, cap. 21 s-a arătat că $\cos(\nu, \tau) = 1/\sqrt{2}$, adică $\cos(\nu, r) = 1/\sqrt{2}$ şi expresia (2) devine

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial q_0}{\partial \tau} - \frac{\partial q_0}{\partial r} \right).$$

Derivînd formula (7.9) cap. 10 şi ţinînd seama de ecuaţia $t - \tau = r$, ce defineşte conul K, deducem că expresia (2) este egală cu zero. Din cele spuse rezultă că integrala pe K_ε în formula (1) se anulează.

Pe suprafaţa cilindrică Z_ε este îndeplinită egalitatea $r = \varepsilon$, iar funcţia q_0 are estimarea ce se deduce din formula (7.9) cap. 10:

$$q_0\left(\frac{t-\tau}{r}\right) \leqslant \frac{(t-\tau)^{m-2}}{\varepsilon^{m-2}}.$$

De aceea pe suprafaţa Z_ε $\cos(\nu, \tau) = 0$ şi $d\Gamma = d\tau\, dS_\varepsilon = \varepsilon^{m-1}\, d\tau\, dS_1$. De aici rezultă că

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{Z_\varepsilon} q_0 \left[\frac{\partial u}{\partial \tau} \cos(\nu, \tau) - \frac{\partial u}{\partial y_k} \cos(\nu, y_k) \right] dZ_\varepsilon = 0.$$

Să analizăm acum integrala

$$-\int_Z u(y,\tau)\left[\frac{\partial q_0}{\partial\tau}\cos(\nu,\tau)-\frac{\partial q_0}{\partial y_k}\cos(\nu,y_k)\right]\mathrm{d}Z_\varepsilon=$$

$$=\int_0^{t-\varepsilon}\int_{S_\varepsilon} u(y,\tau)\,\frac{\partial q_0}{\partial y_k}\cos(\nu,y_k)\,\mathrm{d}S_\varepsilon\,\mathrm{d}\tau= \tag{3}$$

$$=\int_0^{t-\varepsilon}\int_{S_\varepsilon} u(y,\tau)\,\frac{\partial}{\partial r}q_0\left(\frac{t-\tau}{r}\right)\mathrm{d}S_\varepsilon\,\mathrm{d}\tau;$$

ultima egalitate rezultă din faptul că pe suprafața Z_ε direcțiile ν și r sînt opuse.

Derivînd formula (7.9) cap. 10, găsim că pe Z_ε

$$\frac{\partial}{\partial r}q_0\left(\frac{t-\tau}{r}\right)=-\frac{t-\tau}{\varepsilon^2}\left[\frac{(t-\tau)^2}{\varepsilon^2}-1\right]^{\frac{m-3}{2}}=$$

$$=-\frac{(t-\tau)^{m-2}}{\varepsilon^{m-1}}+\ldots;$$

punctele de suspensie desemnează termenii ce conțin pe ε la numitor cu exponenți mai mici decît $m-1$. Punînd acum $y=x+\varepsilon\theta$, $|\theta|=1$, găsim că integrala (3) este egală cu

$$\int_0^{t-\varepsilon}\int_{S_1}(t-\tau)^{m-2}\,u(x+\varepsilon\theta,\tau)\,\mathrm{d}S_1\,\mathrm{d}\tau+O(\varepsilon).$$

De aici rezultă imediat expresia limitei acestei integrale pentru $\varepsilon\to 0$

$$|S_1|\int_0^t(t-\tau)^{m-2}\,u(x,\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{4}$$

În sfirșit, pe porțiunea de frontieră $B_t\setminus B_\varepsilon$, unde $\tau=0$, avem $\cos(\nu,\tau)=-1$, $\cos(\nu,y_k)=0$; limita respectivei integrale pentru $\varepsilon\to 0$ este egală cu

$$-\int_{B_t}\left[q_0\right]\left(\frac{t}{r}\right)\frac{\partial u(y,\tau)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0}-\frac{\partial}{\partial\tau}q_0\left(\frac{t-\tau}{r}\right)\Big|_{\tau=0}u(y,0)\Big]\,\mathrm{d}y. \tag{5}$$

La fel de simplă este trecerea la limită pentru $\varepsilon\to 0$ în partea stîngă a formulei (1): este suficient să se înlocuiască D_ε prin D. Ansamblul de rezultate conduce la următoarea formulă:

$$|S_1|\int_0^t(t-\tau)^{m-2}u(x,\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_D q_0\left(\frac{t-\tau}{\tau}\right)\square\,u(y,\tau)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau+$$

$$+\int_{B_t}\left[\frac{\partial u(y,\tau)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0}q_0\left(\frac{t}{r}\right)-\frac{\partial}{\partial\tau}q_0\left(\frac{t-\tau}{r}\right)\Big|_{\tau=0}u(y,0)\right]\mathrm{d}y. \tag{6}$$

Derivînd formula (6) de $m-1$ ori în raport cu t, obținem formula de bază pentru cele ce urmează

$$u(x,t)=\frac{1}{(m-2)!\,|S_1|}\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\int_D q_0\left(\frac{t-\tau}{r}\right)\square\,u(y,\tau)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau+$$

$$+\frac{1}{(m-2)!\,|S_1|}\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\int_{B_t}\Big[u_\tau(y,0)\,q_0\left(\frac{t}{r}\right)- \tag{7}$$

$$-u(y,0)\,q_{0\tau}\left(\frac{t-\tau}{r}\right)\Big|_{\tau=0}\Big]\,\mathrm{d}y.$$

Să ne oprim la următorul caz particular. Să presupunem că funcția $u(x,t)$ este cu suport compact; ca și în cazul ecuației căldurii, putem presupune că supp u este situat în semispațiul $t>0$. Atunci în formula (7) integrala pe B_t se anulează, iar integrarea pe D poate fi înlocuită cu integrarea pe întreg spațiul E_{m+1}, deoarece pentru $\tau<0$ avem $u(y,\tau)=0$, iar pentru $\tau>t$, în exteriorul conului K, funcția $q_0\left(\frac{t-\tau}{r}\right)$ este nulă. Atunci

$$u(x,t)=\frac{1}{(m-1)!\,|S_1|}\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\int_{E_{m+1}}q_0\left(\frac{t-\tau}{r}\right)\square\,u(y,\tau)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau= \tag{8}$$

$$=\frac{1}{(m-2)!\,|S_1|}\int_{E_{m+1}}\square\,u(y,\tau)\,\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}q_0\left(\frac{t-\tau}{r}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau.$$

Formula (8) arată că funcţia $v(x-y, t-\tau)$, definită de expresiile (7.11) şi (7.9) cap. 10, este într-adevăr soluţia fundamentală a ecuaţiei undelor.

§ 3. CAZUL UNUI NUMĂR IMPAR DE COORDONATE. GENERALIZAREA FORMULELOR LUI KIRCHHOFF

Să analizăm problema Cauchy pentru ecuaţia undelor (1.7) cu condiţiile iniţiale (1.2). Să presupunem că soluţia acestei probleme există şi este de clasă $C^{(2)}(\bar{E}_m \times [0, \infty))$. Atunci formula (2.7) dă imediat soluţia sa

$$u(x,t) = \frac{1}{(m-2)!\,|S_1|}\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\int\limits_D q_0\left(\frac{t-\tau}{r}\right) f(y,\tau)\,dy\,d\tau + \\ + \frac{1}{(m-2)!\,|S_1|}\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\int\limits_{B_t}\left[\varphi_1(y)\,q_0\left(\frac{t}{r}\right) - \right. \\ \left. - \varphi_0(y)\,q_{0\tau}\left(\frac{t-\tau}{r}\right)\Big|_{\tau=0}\right] dy. \tag{1}$$

Pentru simplitate ne mărginim la cazul ecuaţiei omogene a undelor, adică la problema (1.1)—(1.2); menţionăm totodată că studiul ecuaţiei neomogene nu ridică nici un fel de dificultăţi. Formula (1) capătă forma mai simplă:

$$u(x,t) = \frac{1}{(m-2)!\,|S_1|}\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\int\limits_{B_t}\left[\varphi_1(y)\,q_0\left(\frac{t}{r}\right) - \right. \\ \left. - \varphi_0(y)\,q_{0\tau}\left(\frac{t-\tau}{r}\right)\Big|_{\tau=0}\right] dy. \tag{1a}$$

Ne ocupăm de simplificarea formulei (1a). Să examinăm cazul m impar. Fie $m = 2s+3$, atunci $q_0(\lambda)$ este un polinom de gradul $m-2$ în λ. Vom considera $s \geqslant 0$, adică $m \geqslant 3$. Cazul $m = 1$ deşi elementar, necesită o analiză separată. Notăm

$$T_\varphi(x,t) = \frac{1}{(m-2)!\,|S_1|}\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\int\limits_{B_t}\varphi(y)\,q_0\left(\frac{t}{r}\right)dy; \tag{2}$$

expresia (2) diferă de prima integrală (1a) prin înlocuirea lui φ_1 cu φ; să presupunem că

$$\varphi \in C^{(s+2)}(E_m) = C^{\left(\left[\frac{m}{2}\right]+1\right)}(E_m).$$

Punem $y = x + r\theta$, $|\theta| = 1$ şi introducem coordonatele sferice cu centrul în x. Atunci expresia (2) ia forma

$$T_\varphi(x,t) = \frac{1}{(m-2)!\,|S_1|}\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\int\limits_0^t\left\{\int\limits_{S_1}\varphi(x + \right. \\ \left. + r\theta)\,q_0\left(\frac{t}{r}\right)dS_1\right\} r^{m-1}\,dr. \tag{3}$$

Fiecare derivată în raport cu t conţine doi termeni: integrala din derivata în raport cu t şi valoarea funcţiei de sub integrală pentru $r = t$. Dar formula (7.9) cap. 10 arată că funcţia $q_0(\lambda)$ are pe $\lambda = 1$ rădăcină multiplă de ordinul $s+1$, adică pentru $r = t$ avem $q_0(1) = q_{(0)}'(1) = \ldots = q_0^{(s)}(1) = 0$ şi prin urmare primele $s+1$ derivări se anulează în cel de al doilea termen menţionat mai sus. Cu alte cuvinte, în formula (3) primele $s+1$ derivări se efectuează sub semnul integrală. Remarcăm, de asemenea, că

$$\frac{\partial^{s+1}}{\partial t^{s+1}}q_0\left(\frac{t}{r}\right) = \frac{1}{r^{s+1}}\frac{d^{s+1}}{d\lambda^{s+1}}q_0(\lambda), \qquad \lambda = \frac{t}{r},$$

sau, conform formulei (7.9) cap. 10,

$$\frac{\partial^{s+1}}{\partial t^{s+1}}q_0\left(\frac{t}{r}\right) = \frac{1}{r^{s+1}}\frac{d^s}{d\lambda^s}(\lambda^2-1)^s = \frac{2^s s!}{r^{s+1}}P_s\left(\frac{t}{r}\right), \tag{4}$$

unde P_s este un polinom Legendre de gradul s. Înlocuim aceasta în formula (3):

$$T_\varphi(x,t) = \frac{2^s s!}{(2s+1)!\,|S_1|}\frac{\partial^{s+1}}{\partial t^{s+1}}\int\limits_0^t\left\{\int\limits_{S_1}\varphi(x+r\theta)\,dS\right\}\times \\ \times P_s\left(\frac{t}{r}\right)r^{s+1}\,dr. \tag{5}$$

Coeficientul din formula (5) se poate simplifica folosind formula (2.9) cap. 1 și formula de recurență pentru funcția gamma, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Cu ajutorul acestei formule găsim

$$\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) = \Gamma\left(s+\frac{3}{2}\right) = \left(s+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) = \ldots =$$

$$= \left(s+\frac{1}{2}\right)\left(s-\frac{1}{2}\right)\ldots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2S+1)!!\sqrt{\pi}}{2^{s+1}}$$

și prin urmare

$$|S_1| = \frac{2^{s+2}\pi^{s+1}}{(2s+1)!!}.$$

Deoarece

$$\frac{2^s s!}{(2s+1)!} = \frac{1}{(2s+1)!!}$$

găsim că coeficientul din formula (5) este egal cu $[2(2\pi)^{s+1}]^{-1}$. Efectuînd derivata în această formulă, obținem

$$T_\varphi(x,t) = \frac{1}{2(2\pi)^{s+1}}\sum_{k=0}^{s}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\,t^{k+1}\,P_s^{(s-k)}(1)\int_{S_1}\varphi(x+t\theta)\,dS_1, \qquad (6)$$

ce poate fi de asemenea reprezentată sub forma

$$T_\varphi(x,t) = \frac{1}{2(2\pi)^{s+1}}\sum_{k=0}^{s}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\,\frac{P_s^{(s-k)}(1)}{t^{2s+1-k}}\int_{S_t}\varphi(y)\,d_y S_t; \qquad (7)$$

aici S_t este sfera de rază t cu centrul în punctul x. Din condiția $\varphi \in C^{(s+2)}(E_m)$ rezultă că toate derivatele din formula (6) au sens și că $T\varphi \in C^{(2)}(E_m \times [0,\infty))$.

Dacă $m = 3$, adică $s = 0$, suma (7) se reduce la un singur termen, obținînd

$$m = 3, \qquad T_\varphi(x,t) = \frac{1}{4\pi t}\int_{S_t}\varphi(y)\,dy\,S_t. \qquad (8)$$

Să revenim la primul termen din formula (1a). Dacă se înlocuiește în ea φ_0 cu φ, atunci aceasta capătă forma

$$-\frac{1}{(m-2)!\,|S_1|}\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\int_{B_t}\varphi(y)\frac{\partial}{\partial\tau}q_0\left(\frac{t-\tau}{r}\right)\Big|_{\tau=0}^{\tau}dy. \qquad (9)$$

Dar

$$\frac{\partial}{\partial\tau}q_0\left(\frac{t-\tau}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}q_0\left(\frac{t-\tau}{r}\right),$$

și integrala (9) devine

$$\int_{B_t}\frac{\partial}{\partial t}q_0\left(\frac{t}{r}\right)\varphi(y)\,dy.$$

După cum s-a arătat mai sus, integrala

$$\int_{B_t}q_0\left(\frac{t}{r}\right)\varphi(y)\,dy$$

poate fi derivată direct, în raport cu t, sub semnul integrală:

$$\int_{B_t}\frac{\partial}{\partial t}q_0\left(\frac{t}{r}\right)\varphi(y)\,dy = \frac{\partial}{\partial t}\int_{B_t}q_0\left(\frac{t}{r}\right)\varphi(y)\,dy,$$

și expresia (9) capătă, în sfîrșit, forma:

$$\frac{1}{(m-2)!\,|S_1|}\frac{\partial^m}{\partial t^m}\int_{B_t}\varphi(y)\,q_0\left(\frac{t}{r}\right)dy = \frac{\partial}{\partial t}T_\varphi(x,t). \qquad (10)$$

Funcția (10) aparține evident clasei $C^{(2)}(E_m \times [0,\infty))$ dacă

$$\varphi \in C^{(s+3)}(E_m) = C^{\left(\left[\frac{m}{2}\right]+2\right)}(E_m).$$

Acum problema Cauchy (dacă ea există) se definește prin formula

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}T_{\varphi_0}(x,t) + T_{\varphi_1}(x,t), \qquad (11)$$

unde $T\varphi(x, t)$ se definește la rîndul său prin formula (6) sau (7). Prin aceasta funcția $u(x, t)$ are derivate de ordinul al doilea continue dacă

$$\varphi_0 \in C^{\left(\left[\frac{m}{2}\right]+2\right)}(E_m), \qquad \varphi_1 \in C^{\left(\left[\frac{m}{2}\right]+1\right)}(E_m). \tag{12}$$

Din formula (7) rezultă că pentru m impar, domeniul de influență este sfera $S_t : |y - x| = t$.

Perechea de formule (11) și (7) (sau (6)) se numește *formula generalizată a lui Kirchhoff*; însuși Kirchhoff a analizat numai cazul tridimensional, pentru care a obținut formulele (11) și (8).

§ 4. FRONTUL DE UNDĂ POSTERIOR

Formula generalizată a lui Kirchhoff permite punerea în evidență a unui aspect deosebit al fenomenului propagării undelor în spații cu un număr de dimensiuni impar, anume apariția așa-numitului front de undă posterior, despre care am amintit în §5, cap. 21. Particularitatea amintită nu este greu de justificat prin aceea că în cazul dat domeniul de influență este nu bila, ci sfera.

Este evident că în formula lui Kirchhoff $u(x, t) = 0$, dacă $\varphi_0(z) \equiv 0$, $\varphi_1(z) \equiv 0$ pentru $z \in S_t$. Să presupunem acum că funcțiile inițiale sînt diferite de zero numai într-un anumit domeniu D al spațiului E_m (fig. 31). Să admitem că punctul x se găsește, de exemplu, în exteriorul lui D. Notăm prin δ și δ_1 distanța cea mai mică, respectiv cea mai mare, de la punctul x pînă la punctele frontierei lui D.

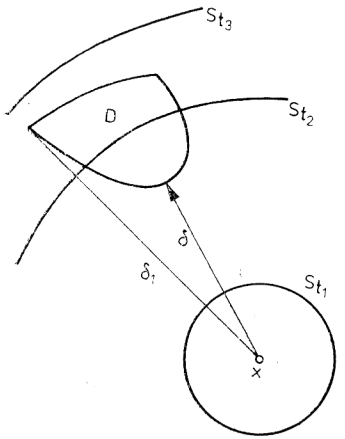

Fig. 31

La momentul cel mai apropiat de cel inițial, și anume pentru $t < \delta$, sfera S_t nu intersectează domeniul D; pe această sferă funcțiile inițiale sînt egale cu zero și $u(x, t) = 0$. Dacă $\delta < t < \delta_1$, atunci sfera S_t intersectează domeniul D (sfera S_{t_2} din fig. 31); pe acea parte a sferei S_t, ce se găsește în interiorul lui D, funcțiile inițiale nu sînt identice nule și, în general, $u(x, t) \neq 0$. Ambele aceste cazuri au fost relevate în §5, cap. 21 pentru ecuația undelor într-un spațiu cu un număr oarecare de dimensiuni.

Fie acum $t > \delta_1$. Sfera S_t nu intersectează domeniul D (sfera S_{t_3} din fig. 31) și din nou $u(x, t) = 0$; punctul x s-a găsit în stare perturbată în intervalul de timp $\delta < t < \delta_1$ și apoi a revenit la starea de repaus.

Dacă analizăm oscilația mediului la un moment nu prea apropiat de cel inițial, atunci în acest mediu se găsesc puncte de trei tipuri: unele puncte se află în repaus pentru că perturbația nu a ajuns încă la ele; altele se află în stare de perturbare; iar al treilea tip se găsesc din nou în repaus — prin faptul că prin aceste puncte perturbația a trecut deja. Frontul anterior de undă (vezi §5, cap. 21) delimitează domeniul pînă la care perturbația încă nu a ajuns, față de domeniul ce se găsește în stare de perturbare. Suprafața care delimitează domeniul de perturbare de domeniul prin care perturbația a trecut deja se numește *front de undă posterior*. Prin punctul x frontul de undă posterior trece în momentul $t = \delta_1$.

Dacă ecuația undelor are forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0, \qquad a = \text{const},$$

atunci toate cele expuse în acest paragraf rămîn valabile, dacă se înlocuiește t cu at.

§ 5. JUSTIFICAREA FORMULEI LUI KIRCHHOFF

Să demonstrăm că dacă funcțiile inițiale satisfac condițiile (3.12), atunci formula (3.11) dă soluția problemei Cauchy (1.1)—(1.2). Am văzut deja că în cazul îndeplinirii condițiilor (3.12) funcția (3.11) are derivate de ordinul al doilea continue. Să arătăm că această funcție satisface ecuația undelor (1.1) cu condițiile inițiale (1.2).

Dacă se efectuează toate derivatele în formula (3.6), atunci se obține o sumă de termeni, fiecare dintre ei conținînd pe t la exponent pozitiv. De aici rezultă

$$T_\varphi(x, 0) = 0. \tag{1}$$

Să găsim mărimea $\dfrac{\partial}{\partial t} T_\varphi(x, t)\big|_{t=0}$. Dacă se derivează (3.6) și apoi se pune $t = 0$, atunci se obține

$$\frac{\partial}{\partial t} T_\varphi(x, t)\big|_{t=0} = \frac{\varphi(x)\,|S_1|}{2(2\pi)^{s+1}} \sum_{k=0}^{s} (k+1)!\, P_s^{(s-k)}(1). \tag{2}$$

Pentru a calcula coeficientul lui $\varphi(x)$, formulăm următoarea problemă Cauchy:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Delta w = 0; \qquad w(x, 0) = 1, \qquad w_t(x, 0) = 0.$$

Soluția (unică) a acestei probleme există — ea este identic egală cu unitatea și pentru ea este valabilă formula (3.11). În cazul dat, $T_{\varphi_1}(x, t) \equiv 0$ și conform formulei (3.6)

$$T_{\varphi_0}(x, t) = \frac{|S_1|}{2(2\pi)^{s+1}} \sum_{k=0}^{s} \frac{\partial^k}{\partial t^k} t^{k+1} P_s^{(s-k)}(1).$$

Mai departe, conform formulei (3.11),

$$1 \equiv \frac{|S_1|}{2(2\pi)^{s+1}} \sum_{k=0}^{s} \frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}} t^{k+1} P_s^{(s-k)}(1).$$

Derivînd și punînd $t = 0$, găsim valoarea sumei care ne interesează [1]

$$\frac{|S_1|}{2(2\pi)^{s+1}} \sum_{k=0}^{s} (k+1)!\, P_s^{(s-k)}(1) = 1 \tag{3}$$

și, în final,

$$\frac{\partial}{\partial t} T_\varphi(x, t)\,|_{t=0} = \varphi(x). \tag{4}$$

Să arătăm acum că funcția $T_\varphi(x, t)$ satisface ecuația undelor (1.1). Este suficient să demonstrăm că această ecuație este verificată de funcția (vezi formula (3.3))

$$U_\varphi(x, t) = \int_0^t q_0\left(\frac{t}{r}\right) r^{m-1} \left\{ \int_{S_1} \varphi(x + r\theta)\, dS_1 \right\} dr = \tag{5}$$

$$= \int_{B_t} q_0\left(\frac{t}{r}\right) \varphi(y)\, dy.$$

Demonstrația o dăm la început pentru $s \geqslant 1$, adică $m \geqslant 5$. În acest caz, după cum am văzut în § 3, $q_0(1) = q_0'(1) = 0$ și derivata de

[1]) Identitatea (3) este echivalentă cu identitatea numerică

$$\sum_{k=0}^{s} \frac{(k+1)(s+k)!}{2^k (s-k)!} = 2(s+1)!!$$

ordinul al doilea în raport cu t se poate face direct sub semnul integrală:

$$\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial t^2} = \int_{B_t} \frac{1}{r^2} q_0''\left(\frac{t}{r}\right) \varphi(y)\, dy.$$

Mai departe,

$$\frac{\partial U_\varphi}{\partial x_k} = \int_0^t q_0\left(\frac{t}{r}\right) r^{m-1} \left\{ \int_{S_1} \frac{\partial \varphi(x + r\theta)}{\partial x_k}\, dS_1 \right\} dr = \int_{B_t} q_0\left(\frac{t}{r}\right) \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_k}\, dy.$$

Integrînd prin părți, integrala de suprafață se anulează, întrucît pentru $r = t$, $q_0\left(\frac{r}{t}\right) = q_0(1) = 0$ și obținem

$$\frac{\partial U_\varphi}{\partial x_k} = -\int_{B_t} \varphi(y) \frac{\partial}{\partial y_k} q_0''\left(\frac{t}{r}\right) dy. \tag{6}$$

Analog găsim

$$\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial x_k^2} = \int_{B_t} \varphi(y) \frac{\partial^2}{\partial y_k^2} q_0\left(\frac{t}{r}\right) dy.$$

Astfel,

$$\Box U_\varphi = \int_{B_t} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} q_0\left(\frac{t}{r}\right) - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial y_k^2} q_0\left(\frac{t}{r}\right) \right] \varphi(y)\, dy,$$

și cum funcția $q_0(t/r)$ satisface pentru $r \neq 0$ ecuația undelor, avem $\Box U_\varphi = 0$.

Revenim la cazul $m = 3$. Atunci $q_0(\lambda) = \lambda - 1$ iar formula (5) ia forma

$$U_\varphi(x, t) = \int_{B_t} \left(\frac{t}{r} - 1\right) \varphi(y)\, dy = \int_0^t r^2 \left(\frac{t}{r} - 1\right) \int_{S_1} \varphi(x + r\theta)\, dS_1.$$

De aici

$$\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial t^2} = t \int_{S_1} \varphi(x + t\theta)\, dS_1. \tag{7}$$

Pentru $m = 3$, ca mai înainte, $q_0(1) = 0$ și formula (6) rămîne adevărată. Trecînd la variabilele r, θ și derivînd în raport cu x_k, obținem

$$\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial x_k^2} = -t\int_0^t r^2\,dr\int_{S_1}\frac{\partial}{\partial y_k}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi(x+r\theta)}{\partial x_k}\,dS_1 =$$

$$= -t\int_{B_t}\frac{\partial}{\partial y_k}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\,dy = t\int_{B_t}\varphi(y)\frac{\partial^2}{\partial y_k^2}\frac{1}{r}\,dy +$$

$$+ t\int_{S_1}\cos^2(r, y_k)\,\varphi(x+t\theta)\,dS_1.$$

Efectuăm sumarea după k. Deoarece $\Delta\frac{1}{r} = 0$, folosind formula (7), găsim că $\Box U_\varphi = 0$.

În acest fel, pentru orice $m \geqslant 3$ impar funcția $u(x, t)$ definită de formula (3.11) (funcția generalizată a lui Kirchhoff), satisface ecuația undelor (1.1). Să arătăm că ea satisface și condițiile inițiale (1.2). Presupunînd în (3.11) $t = 0$ și folosindu-ne de relațiile (1) și (4), deducem că $u(x, 0) = \varphi_0(x)$. Apoi derivăm formula (3.11) în raport cu t și punem $t = 0$. Conform relației (4)

$$u_t(x, 0) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}T_{\varphi_0}(x, t)\,|_{t=0} + \varphi_1(x).$$

Funcția $T_{\varphi_0}(x, t)$ satisface ecuația undelor; folosind și egalitatea (1), găsim că

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}T_{\varphi_0}(x, t)\,|_{t=0} = \Delta T_{\varphi_0}(x, 0) = 0$$

și prin urmare $u_t(x, 0) = \varphi_1(x)$.

§ 6. CAZUL UNUI NUMĂR PAR DE COORDONATE

Se poate demonstra că și pentru m par, formula (3.1a) dă soluția problemei Cauchy (1.1)—(1.2); de asemenea se poate arăta că formula respectivă poate fi simplificată, dîndu-i-se o exprimare mult mai explicită. Toate acestea însă se obțin simplu din formula generalizată a lui Kirchhoff (3.11).

Să presupunem momentan că $m = 2s + 3$, iar funcțiile $\varphi_0(x)$ și $\varphi_1(x)$ satisfac condițiile (3.12). Atunci, după cum s-a arătat mai sus, funcția (3.11) satisface condițiile inițiale (1.2) și ecuația undelor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t} - \sum_{k=1}^{2s+3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{1}$$

Să presupunem acum că funcțiile inițiale $\varphi_0(x)$ și $\varphi_1(x)$ nu depind de coordonata x_{2s+3} și să arătăm că atunci nici $u(x, t)$ nu depinde de x_{2s+3}. Acest lucru odată arătat, înseamnă că funcția respectivă rezolvă problema Cauchy pentru valoarea pară $2s + 2$ a dimensiunii. Mai jos vom considera m par, $m = 2s + 2$.

Este suficient să se demonstreze următoarea afirmație ceva mai simplă: dacă $\varphi(x)$ nu depinde de x_{2s+3}, atunci și $T_\varphi(x, t)$ nu depinde de x_{2s+3}. În baza formulei (3.7), pentru aceasta este suficient să se arate că integrala

$$J(x, t) = \int_{S_t}\varphi(y)\,d_y S_t \tag{2}$$

nu depinde de coordonata x_{2s+3}. Să reprezentăm integrala (2) sub forma sumei integralelor pe două semisfere, în care sfera S_t este divizată de planul ce trece prin punctul x, perpendicular pe axa x_{2s+3}. Fiecare semisferă se proiectează pe planul respectiv sub forma unei bile $(2s + 2)$-dimensionale de rază t cu centrul în punctul $(x_1, x_2, \ldots, x_{2s+2})$. Vom desemna acum prin x și y punctele spațiului $E_m = E_{2s+2}$ și vom scrie ca mai înainte $r = |x - y|$. Are sens să păstrăm notația $\varphi(x)$ pentru că această funcție nu depinde de y_{2s+3}. Bila $(2s + 2)$-dimensională de mai sus este definită acum de inegalitatea $r < t$.

Funcția $\varphi(y)$ nu depinde de y_{2s+3}, de aceea integralele pe semisfere sînt egale între ele și fiecare din ele se poate înlocui prin integrala pe bila $r < t$, dacă ținem seama că $dyS_t = \frac{dy}{\cos(\nu, y_{2s+3})}$, unde ν este normala exterioară la sfera S_t. Astfel,

$$J(x, t) = 2\int_{r<t}\frac{\varphi(y)\,dy}{|\cos(\nu, y_{2s+3})|}.$$

Normala la sferă este îndreptată în direcția razei și de aceea

$$|\cos(\nu, y_{2s+3})| = \frac{|y_{2s+3} - x_{2s+3}|}{t} = \frac{1}{t}\sqrt{t^2 - \sum_{k=1}^{2s+2}(y_k - x_k)^2} = \frac{\sqrt{t^2 - r^2}}{t}$$

de unde

$$J(x, t) = 2t \int_{r<t} \frac{\varphi(y)\, dy}{\sqrt{t^2 - r^2}}. \tag{3}$$

Integrala (3) nu depinde de x_{2s+3} și afirmația este demonstrată. Astfel, soluția problemei Cauchy pentru m par este dată — ca mai înainte — de formula (3.11), numai că de această dată

$$T_\varphi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{s+1}} \sum_{k=0}^{s} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \frac{P_s^{(s-k)}(1)}{t^{2s-k}} \int_{r<t} \frac{\varphi(y)\, dy}{\sqrt{t^2 - r^2}}. \tag{4}$$

În particular, dacă $m = 2$, atunci se obține soluția problemei Cauchy pentru ecuația vibrației membranelor

$$u(x, t) = u(x_1, x_2, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\pi} \iint_{r<t} \frac{\varphi_0(y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} + \tag{5}$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \iint_{r<t} \frac{\varphi_1(y_1, y_2)\, \partial y_1\, \partial y_2}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}.$$

Formula (5) se numește *formula lui Poisson-Parseval.*

Ca și în cazul unui număr impar de coordonate, soluția problemei Cauchy $u \in C^{(2)}(E_m \times [0, \infty))$, dacă funcțiile inițiale satisfac condiția (3.12). Remarcăm că atît pentru m impar, cît și pentru m par, condiția (3.12) este necesară : dacă ea nu are loc, atunci se poate arăta că soluția problemei Cauchy nu are derivatele de ordinul al doilea continue.

În încheiere menționăm, fără a prezenta demonstrațiile, că formula (3.11) dă soluția problemei Cauchy (1.1)—(1.2) dacă φ_0 și φ_1 sînt funcții generalizate de clasă $\mathscr{D}'(E_m)$; se înțelege că în general soluția este de asemenea o funcție generalizată. Această afirmație se referă atît la cazul unui număr par, cît și impar de coordonate.

§ 7. ECUAȚIA COARDEI VIBRANTE

Din formula lui Poisson-Parseval se poate obține soluția problemei Cauchy pentru ecuația coardei vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{1}$$

dacă se presupune că $\varphi_0(x)$ și $\varphi_1(x)$ nu depind de x_2 ; este mai simplu însă să se obțină această soluție direct.

Nu este greu să obținem formula care conține toate soluțiile ecuației coardei. Pentru aceasta introducem noile variabile $\xi = x + t$, $\eta = x - t$. Ecuația (1) devine atunci $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$. Reprezentînd ultima ecuație sub forma $\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0$, deducem de aici $\frac{\partial u}{\partial \xi} = \upsilon(\xi)$, unde $\upsilon(\xi)$ este o funcție arbitrară. Integrînd în raport cu ξ, obținem $u = \theta_1(\xi) + \theta_2(\eta)$, $\theta_1(\xi) = \int \upsilon(\xi)\, d\xi$, unde θ_1 și θ_2 sînt funcții derivabile arbitrare. Revenind la vechile variabile, ajungem la soluția generală a ecuației (1) :

$$u(x, t) = \theta_1(x + t) + \theta_2(x - t). \tag{2}$$

Formula (2) se numește *integrala d'Alembert.*

Să găsim soluția ecuației (1) ce satisface condițiile Cauchy

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x).$$

Presupunînd în formula (2) $t = 0$, obținem

$$\theta_1(x) + \theta_2(x) = \varphi_0(x). \tag{3}$$

Derivînd formula (2) în raport cu t și presupunînd apoi $t = 0$, obținem, de asemenea, $\theta_1'(x) - \theta_2'(x) = \varphi_1(x)$. Integrăm ultima egalitate

$$\theta_1(x) - \theta_2(x) = \int_0^x \varphi_1(z)\, dz + C. \tag{4}$$

Din egalitățile (3) și (4) deducem

$$\theta_1(x) = \frac{1}{2}\left[\varphi_0(x) + \int_0^x \varphi_1(z)\, dz + C\right],$$

$$\theta_2(x) = \frac{1}{2}\left[\varphi_0(x) - \int_0^x \varphi_1(z)\, dz - C\right].$$

Astfel, formula (2) dă soluţia căutată

$$u(x, t) = \frac{\varphi_0(x+t) + \varphi_0(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \varphi_1(z)\, dz. \qquad (5)$$

Formula (5) se numeşte *formula lui d'Alembert.*

§ 8. DESPRE CORECTITUDINEA PROBLEMEI CAUCHY

Nu este greu să se indice o pereche de spaţii pentru care problema (1.1)—(1.2) este corectă. Astfel, de exemplu, considerăm drept B_1 spaţiul $C^{(2)}(E_m \times [0, \infty))$ al funcţiilor care, pentru orice $x \in E_m$ şi orice $t \geqslant 0$, sînt continue şi mărginite împreună cu derivatele lor de ordinul întîi şi al doilea; drept normă a elementelor acestui spaţiu luăm mărimea

$$\|u\|_1 = \sup_{\substack{x \in E_m \\ t \geqslant 0}} \left\{ |u(x)| + \sum_{k=1}^{m+1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|_{x_{m+1}=t} + \sum_{j,k=1}^{m+1} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \right| \right\}.$$

Drept B_2 considerăm spaţiul perechilor $\Phi = (\varphi_0, \varphi_1)$ cu norma

$$\|\Phi\|_2 = \sup_{x \in E_m} \left\{ \sum_{|\alpha|=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]+2} |D^\alpha \varphi_0(x)| + \sum_{|\alpha|=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]+1} |D^\alpha \varphi_1(x)| \right\}.$$

Notăm cu R operatorul care transformă perechea de funcţii iniţiale $\Phi = (\varphi_0, \varphi_1)$ în soluţia $u(x, t)$ a problemei Cauchy (1.1)—(1.2); acest operator este dat de partea dreaptă a formulei generalizate a lui Kirchhoff.

Din teorema de unicitate pentru problema Cauchy (§4, cap. 21) rezultă că operatorul R există şi din rezultatele §§5, 6 ale prezentului capitol se deduce că acest operator acţionează din B_2 în B_1 şi este definit pe tot spaţiul B_2. Folosind reprezentările (3.6) şi (6.4) pentru funcţia $T_\varphi(x, t)$, nu este greu de arătat că R este un operator mărginit din B_2 în B_1. De aici rezultă că problema Cauchy pentru ecuaţia undelor este corect pusă în perechea de spaţii B_1 şi B_2.

BIBLIOGRAFIE

1. Agmon, S, *Lectures on elliptic boundary value problems*, D. van Norstrand C. Princeton, 1965.

2. Agmon, S., Douglis, A., Nierenberg, L., *Estimares near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions*, I — II, Communications on pure and applied Math.; V. XII, 1959, 623—727; V. XVII, 1964, 35—92. (Prima lucrare este tradusă în l. rusă: S. Agmon, A. Duglis, L. Nirenberg, *Oţenki reşenii ellipticeskih uravnenii vblizi granişi*, IL, 1962.)

3. Babici, V. M., *K voprosu o rasprostranenii funkţii*, Uspehi matem. nauk, VIII, Nr. 2 (54), 1953, 111—113.

4. Bakelmann, I. Ia., *Gheometriceskie metodi reşenia nelineinih uravnenii*, Nauka, 1965.

5. Bernstein, S. N., *Sobranie socinenii*, t. III (*Uravnenia v ceastnih proizvodnih*), Izd. AN. SSSR, 1965.

6. Browder. F. E., *Variaţionnie kraevie zadacii dlea kvazilineinih ellipticeskih uravnenii proizvolnovo poreadka* (trad. din engleză), Sov. — Amer. simpozium po uravn. s ceastn. proizv., Novosibirsk, 1963.

7. Carleman, T., *Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte partieller Differentialgleichungen*, Berichte d. Sächsischen Akad. d. Wissenschaften zu Leipzig, Math. Phys. Klasse, Bd. 88, 1936.

8. Courant, R., *Uravnenia s ceastnimi proizvodnimi* (trad. din engleză), Mir, 1964.

9. Courant, R., Hilbert, D., *Metodi matematiceskoi fiziki* (trad. din germană), t. 1, 2, Gostehizdat, 1951.

10. Friedrichs, K., *Spektralerlegung halbbeschränkten Operatoren und Anwendung zu Spektralzerlegung von Differentialoperatoren.*, Math. Annalen, Bd. 109, H. 4—5, 1934, 465—487.

11. Gelfand, I. M., Şilov. G. E., *Nekotorie voprosi teorii differenţialnih uravnenii*, Fizmatghiz, 1958.

12. Gelfand, I. M., Şilov, G. E., *Obobşcennie funkţii i deistvia nad nimi*, Fizmatghiz, 1958.

13. Gelfand, I. M., Şilov, G. E., *Prostranstva osnovnih i obobşcennih funkţii*, Fizmatghiz, 1958.

14. Ghiunter, N. M., *Teoria potenţiala i eio primenenie k osnovnim zadaceam matematiceskoi fiziki*, Gostehizdat, 1953.

15. Gording, L., *Zadacea Koşi dlea ghiperboliceskih uravnenii*, IL, 1961.

16. Hadamard, J., *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linèaires hyperbolyques*, Paris, Hermann et C^ie, 1932.

17. Hadamard, J., *La théorie des équations aux derivées partielles*, Editions Scientifiques, Pekin, 1964.

18. Heine, E., *Die speciellen Lameschen Funktionen erster Art von beliebiger Ordnuhg*, Journ. f.d. reine und angewandte Math., 62, 1863, 110–141.

19. Hobson, E. V., *Teoria sfericeskih i ellipsoidalnîh funkţii* (trad. din engleză), IL, 1952.

20. Hörmander, L., *Lineinîe differenţialnîe uravnenia s ceastnîmi proizvodnîmi* (trad. din engleză), Mir, 1965.

21. Ladîjenskaia, O. A., *Smeşannaia zadacea dlea ghiperboliceskovo uravnenia*, Gostehizdat, 1953.

22. Ladîjenskaia, O. A., *Lineinîe i kvazilineinîe uravnenia paraboliceskovo tipa*, Nauka, 1967.

23. Ladîjenskaia, O. A., Uralţeva, N. N., *Lineinîe i kvazilineinîe uravnenia ellipticeskovo tipa*, „Nauca", 1973.

24. Landkof, N. S., *Osnovî sovremennoi teorii potenţiala*, Nauka, 1966.

25. Léray, J., Schauder, I., *Topologhiia i funkţionalnîe uravnenia* (trad. din franceză), Uspehi matem. nauk, I, Nr. 3–4, 1946, 71–75.

26. Mihlin, S. G., *Nekotorîe elementarnîe kraevîe zadacii dlea volnovovo uravnenia*, Trudî Seismologhic. in-ta AN SSSR, Nr. 101, 1940.

27. Mihlin, S. G., *Rasprostranenie voln v oblasteah s krivolineinoi graniţei*, Trudî Seismologhic. in-ta AN SSSR, Nr. 110, 1941.

28. Mihlin, S. G., *Lekţii po lineinîm integralnîm uravneneam*, Fizmatghiz, 1959.

29. Mihlin, S. G., *Mnogomernîe singulearnîe integralî i integralnîe uravnenia*, Fizmatghiz, 1962.

30. Mihlin. S., G., *Problema minimuma kvadraticinovo funkţionala*, Gostehizdat, 1962.

31. Mihlin, S. G., *Cislenaia realizaţia variaţionnîh metodov*, Nauka, 1966.

32. Miranda, C., *Uravnenia c ceastnîmi proizvodnîmi ellipticeskovo tipa* (trad. din italiană), IL, 1957.

33. Müntz, G., *Integralnîe uravnenia*, C. l. Gostehizdat, 1934.

34. Musheliṣvili, N. I., *Singulearnîe integralnîe uravnenia*, „Nauka", 1968.

35. Nečas, J., *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Prague, Edition de l'Acad. Tchecoslovaque d. Sciences, 1967.

36. Oleinik, O. A., *A boundary value problem for linear elliptic-parabolic equations*, Univ. of Maryland, January, 1965.

37. Petrovskii, I. G., *O zadace Koşi dlea sistemî uravnenii s ceastnîmi proizvodnîmi*, Matem. Sborn. 2(44), 1937, 815–870.

38. Petrovskii, I. G., *Lekţii ob uravneniah s ceastnîmi proizvodnîmi*, Fizmatghiz 1961.

39. Riesz, M., *L'integrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy*, Acta Math., 81, 1949.

40. Schwartz, L., *Théorie des distributions*, V. V. I, II, Paris, Hermann et C^ie 1950.

41. Şilov, G. E., *Matematiceskii analiz*, Vtoroi speţialnîi kurs. Nauka, 1966.

42. Slobodeţkii, L.N., *Obobşcennîe prostranstva S. L. Soboleva i ih nrilojenie k kraevîm zadaceam dlea differenţialnîh uravnenii v ceastnîh proizvodnîh*, Uce. zapiski Leningr, ped. in-ta im. Gherţena, 197, 1958, 54–112.

43. Smirnov, M. M., *Vîrojdaiuşciesea ellipticeskie i ghiperboliceskie uravnenia*, Nauka, 1966.

44. Smirnov, V. I., *Kurs visşei matematiki*, T. III, Fizmatghiz, 1956; T. IV, 1958; T. V, 1959.

45. Sobolev, S. L., *Méthode nouvelle à rèsondre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales*, Matem. Sborn. Nr. 1(43), 1936, 39–72.

46. Sobolev, S. L., *Nekotorîe prilojenia funkţionalnovo analiza v matematiceskoci fizike*, Izd. LGU, 1950.

47. Stein, I., Weiss, G., *Vvedenie v garmoniceskii analiz na evklidovîh prostranstvah* (trad. din engleză), Mir, 1974.

48. Titchmarsh, E., *Vvedenie v teoriiu integralov Furie* (trad. din engleză), Gostehizdat, 1948.

49. Trèves, J., *Lekţii po lineinîm uravneniam v ceastnîh proizvodnîh s postoiannîmi koeffiţienţami* (trad. din engleză), Mir, 1965.

50. Tricomi, F., *O lineinîh uravneniah smeşannovo tipa* (trad. din italiană), Gostehizdat, 1947.

51. Vekua, I. N., *Obobşcennîe analiticeskie funkţii*, Fizmatghiz, 1959.

52. Vilenkin, N. Ia., *Speţialnîe funkţii i teoria predstavlenii grupp*, Nauka, 1965.

53. Vişik, M. I., *O silno ellipticeskih sistemah differenţialnîh uravnenii*, Mats. sborn., 29(71), 1951, 615–676.

54. Watson, G. N., *Teoriia besselevîh funkţii*, Ce. I (trad. din engleză), IL, 1949.

55. Zigmund, A., *Trigonometriceskie readî* (trad. din engleză), t. II, Mir, 1965.

INDEX ALFABETIC

d'Alembert, J., 522
Ampère, A., 12
Atkinson, F., 146
A doua formulă Green, 225
— — problemă la limită, condiții, 273, 454
— treia problemă la limită, condiții, 347, 454

Bertrand, J., 156, 160
Bessel, F. V., 136
Bandă frontieră, 13

Carleman, T., 363
Cauchy, O., 208
Cebîșev, P.L., 301
Caracteristică, 219
Compact, 13
Con caracteristic, 456
Condiția lui Hölder, 13
— de prelungire, 381, 386
Condiții Cauchy, 208
— de existență ale integralei singulare, 175
— — racordare, 206,473
— la frontieră, 205
— — limită, 205
Convergența funcțiilor de medie, 40

Dirichlet, P., 207
Date Cauchy, 208
Derivata generalizată 42, 49, 53, 54
— —, cele mai simple proprietăți, 48
— —, teoremă, 44
Distanța de la punct la mulțime, 12
Distribuția lui Dirac, 285
Distribuții, 232
— de ordin finit, 235
— pe spațiu, 232
— regulate, 234
— singulare, 234
Domeniu de influență, 460
— stelat, 59

Ecuația biarmonică, 9
— caracteristică, 219
— coardei vibrante, 7, 8
— de tip eliptic, 9, 202
— — — hiperbolic, 9, 202, 216
— — — parabolic, 9, 202
— diferențială a suprafeței minime, 204
— eliptică nedegenerată, 405
— Fredholm de primă speță, 213
— lui Bessel, 136
— — Laplace, 9, 211, 247, 262, 383
— — — în cubul m-dimensional, 9, 417
— — — pentru paralelipiped, 427
— — —, soluție fundamentală, 240, 241, 348
— — —, teoreme de unicitate, 274
— — Monge-Ampère, 12, 204
— — Navier-Stokes, 11
— — Poisson, 247, 262
— — Tricomi, 201
— neautoadjunctă, 421
— nedegenerată, 371
— neomogenă, 199
— omogenă, 199, 381
— —, metoda Fourier, 482
— poliarmonică, 10
— propagării căldurii, 8, 442, 447, 491
— — —, metoda Fourier, 463
— — —, soluție singulară, 241
— undelor, 7, 453, 456
— — cu patru variabile independente, 8
— —, metoda Fourier, 480
— vibrației membranelor, 8
— vectorială, 10
Ecuații ale fizicii matematice, 202
— cvaziliniare, 11
— de ordinul al doilea, 200
Ecuațiile problemei plane pentru medii perfect plastice, 11
— ultrahiperbolice, 203
Elementul de volum (Lebesgue), 12
Expresie diferențială de ordinul al doilea, 199
— — liniară, 224

Expresii diferențiale formal autoadjuncte, 223
Extensia Friedrichs, 100

Fourier, J., 168
Fredholm, I., 142
Friedrichs, K., 69
Forma canonică a ecuației, 222
— pătratică, 75
Formula lui d'Alembert, 523
— — Dini, 356
— — Kirchhoff, 515, 517
— — Plancherel, 175
— — Poincaré-Bertrand, 156, 160
— — Poisson, 282, 286, 356, 496
— — Poisson-Parseval, 522
— — Sohoțki-Plemelj, 153, 366
— de integrare prin părți, 42
— pentru transformata Fourier a nucleului singular, 187
— transformatei Fourier inverse, 171
Formule Green, 224
Front anterior de undă, 462
— de undă posterior, 517
— Funcția Green, 389
— δ, 297
Funcție abstractă, 449
— —, soluție slabă, 451
— armonică, 247, 283
— — în domeniul mărginit (sau nemărginit), 247
— local integrabilă, 14
— test, 233
Funcții finite, 13, 41
— de medie, 38
— — —, proprietăți, 39
Funcții sferice, 294
— —, ecuațiile integrale, 304
Funcțională biliniară, 75
— energetică, 90
Funcționale biliniare simetrice, 75
— pătratice, 75, 109
— — omogene, 75

Gauss, K. F., 321
Giraud, J., 177
Green, D., 224

Hausdorff, F., 144
Hölder, O. P., 13
Holmgren, E., 211

Identitatea integrală a lui Sobolev, 61
Indexul problemei, 358
— operatorului, 143, 146, 164
Inegalitatea de pozitivă definire, 79
— lui Friedrichs, 69
— — Markov, 297, 301, 302
— — Poincaré, 69
Integrala lui d'Alembert, 522
— — Cauchy, 151
— — Dirichlet, 226
— — Gauss, 321, 349
— singulară, 175, 188, 193
Integrale uniform convergente, 17

Kelvin, 252
Kirchhoff, G., 516, 517
Kovalevskaia, E. V., 211

Laplace, P., 9
Liapunov, A. M., 310
Liouville, J., 285
Lipschitz, R., 13
Lărgimea benzii frontieră, 13
Lungimea multiindicelui, 14

Markov, A. A., 297
Monge, G., 12
Metoda Fourier, 463
Metoda Fourier pentru condiții inițiale omogene, 486
— separării variabilelor, 415, 463
Multiindice, 14
Multiplicitatea (sau rangul) valorii proprii, 114

Navier, 11
Noether, E., 144
Norma energetică, 84
Nucleu de mediere, 37, 296
— — de tip Fredholm, 135
Nucleul lui Poisson, 282
— integralei singulare, 175
— operatorului, 142
— singular, transformata Fourier, 187
Norme echivalente în spații Sobolev, 67

Operator identic, 156
— pozitiv definit, 79, 134, 139
— simetric, 77, 115
— — strict pozitiv, 78
— — strict pozitiv, 78
— simplu, 164
— singular, 162, 188
— — Cauchy, 156, 160
— unitar, 174
Operatorul de scufundare, 63
— lui Laplace, 9, 226
— — —, schimbare de variabile, 249
— problemei la limită, 212
— propagării căldurii, 227
Operatori integrali cu singularitate slabă, 25
Ordinul ecuației diferențiale, 198

Plancherel, M., 175
Plemelj, I., 153
Poincaré, A., 156, 160
Poisson, S., 247
Privalov, I. I., 153
Polinom Cebișev, 301
Polinoame Gegenbauer, 302
— Legendre, 300
Potențial, 257
Potențial de dublu strat, 257
— — — —, de valoare primară, 319
— — — —, valori limită, 324
— — simplu strat, 257, 248
— — — —, continuitate, 327
— — — —, derivata normală, 330
— — volum, 257, 259
—, ecuații integrale, 337—339
—, — — adjuncte, 341, 342
Potențiale logaritmice, 348
Prima formulă a lui Green, 224, 226
— problema la limită, 273, 405, 454
Principiul de maxim, 444
Problema Cauchy, 208, 447, 456
—, teorema de unicitate, 458
— cîmpului de temperatură staționar (nestaționar), 8, 9
— Dirichlet, 207, 273, 286, 339, 345, 370, 381, 424, 433, 438
— —, ecuație integrală, 336
— —, spațiu energetic, 376
— —, spectru pentru domeniu nemărginit, 412
— Neumann, 207, 274, 339, 349, 395, 424, 432, 438
— —, ecuații integrale, 336
— —, soluție slabă, 403
— —, spectru pentru domenii mărginite, 420
— coardei vibrante, 7
— derivatei oblice, 357, 363
— la limită, 208, 211, 273
— mixtă, 447, 451, 454, 465, 469
— Sturm-Liouville, 127, 139
Probleme la limită pentru ecuația eliptică, 273
— — —, corectitudine, 211
Produs energetic, 84
Punct simetric, 252

Riesz, F., 143
Raza de medie, 39
Regularizatorul la dreapta al operatorului, 142
— — stînga al operatorului, 142
Reprezentare integrală, 254

Schauder, 143
Sobolev, S. L., 37, 57
Sohoțki, I. V., 153
Steklov, V. A., 37
Stokes, D., 11
Sfera lui Liapunov, 310, 330
Simbolul operatorului, 149, 162, 190
Sistem local de coordonate, 14, 208
Sisteme eliptice tari, 407
Soluție clasică, 473
— —, condiții de existență, 488
Soluție generalizată a ecuațiilor, 92, 230, 383, 422
— singulară a ecuației undelor, 243
— slabă, 370, 374
— tare, 375, 427, 433
Soluții singulare, 236, 507
Spațiu Banach separabil, 75
— de bază, 232
— de distribuții, 232
— energetic, 83, 92, 95, 124
— Sobolev, 57
Spectru discret, 123
— propriu, 113, 116
— — al operatorului, 113, 115, 116, 118, 126
Subdomeniu, 13, 193
Suportul funcției, 14
Suprafață caracteristică, 219
— Cauchy, 208
Suprafețe Liapunov, 14, 310, 315, 320 324, 327, 331, 336

Tricomi, F., 201
Teorema lui Atkinson, 146
— — Cauchy-Kovalevskaia, 211
— — Giraud, 177
— — Harnack, 268
— — Hausdorff, 143
— — Liouville, 285
— — Privalov, 153, 361
— de convergență în medie, 270
— — medie, 285
— despre principiul de maxim, 266

— — regularizarea bilaterală pentru un operator, 147, 151
— de scufundare, 411
— stabilității indexului, 146
Teoreme de umicitate, 448, 458
Teoremele lui Noether, 144
Teoria lui Fredholm, 143
— — Riesz-Schauder, 143
Termenul liber al ecuației, 199
Transformata Fourier, 507
— Kelvin, 252
— singulară, 217
Undă, 460
Unghi solid, 312
Urma funcțiilor, 388

Valoarea primară a derivatei normale, 331
Valoare proprie a unui operator, 113, 115, 118, 120, 139
— — generalizată a unui operator, 116
Vector propriu generalizat al unui operator, 116
— — propriu al unui operator, 113, 115, 119
Zerourile unui operator, 143

CUPRINS

Cuvînt înainte 5

INTRODUCERE 7
§ 1. Obiectul cursului 7
§ 2. Definiții și notații 12

Capitolul 1. INTEGRALE CARE DEPIND DE UN PARAMETRU 17
§ 1. Integrale uniform convergente 17
§ 2. Coordonate sferice 20
§ 3. Operatori integrali cu singularitate slabă 25
§ 4. Operatori integrali cu singularitate slabă (continuare) 33

Capitolul 2. FUNCȚII DE MEDIE ȘI DERIVATE GENERALIZATE 37
§ 1. Nucleu de mediere 37
§ 2. Funcții de medie 38
§ 3. Noțiunea de derivată generalizată 42
§ 4. Cele mai simple proprietăți ale derivatei generalizate 48
§ 5. Proprietăți de convergență ale derivatelor generalizate 50
§ 6. Cazul unei singure variabile independente 51
§ 7. Cu privire la o proprietate a funcțiilor care au derivată generalizată de ordinul întîi 53
§ 8. Derivatele integralelor cu singularitate slabă 55

Capitolul 3. SPAȚII DE FUNCȚII CU DERIVATE GENERALIZATE 57
§ 1. Definiția spațiilor $W_p^{(k)}$ 57
§ 2. Identitatea integrală a lui Sobolev 59
§ 3. Teoremele de scufundare 63
§ 4. Extinderea la domenii mai generale 66
§ 5. Norme echivalente în spații Sobolev 67
§ 6. Inegalitățile Friedrichs și Poincaré 69

Capitolul 4. OPERATORI POZITIV DEFINIȚI 75
§ 1. Funcționale pătratice 75
§ 2. Operatori pozitiv definiți 76
§ 3. Spațiul energetic 83
§ 4. Funcționala energetică și problema minimului acesteia 90
§ 5. Soluție generalizată 92
§ 6. Despre separabilitatea spațiului energetic 95

§ 7. Extensia unui operator pozitiv definit 98
§ 8. O problemă la limită elementară pentru ecuaţia diferenţială ordinară 102
§ 9. Problema generală a minimului unei funcţionale pătratice 109
§ 10. Cazul unui operator strict pozitiv 112

Capitolul 5. SPECTRUL PUNCTUAL AL UNUI OPERATOR POZITIV DEFINIT 113
§ 1. Noţiunea de spectru punctual al unui operator 113
§ 2. Valori proprii şi vectori proprii pentru un operator simetric 115
§ 3. Spectrul punctual generalizat al unui operator pozitiv definit 116
§ 4. Formularea variaţională a problemei spectrului punctual. 118
§ 5. Cea mai mică valoare proprie 121
§ 6. Despre caracterul discret al spectrului 123
§ 7. Dezvoltarea după spectru punctual a unui operator pozitiv definit 126
§ 8. Problema Sturm-Liouville 127
§ 9. Cazuri elementare 131
§10. Principiul de minimax 136
§11. Despre ordinul de creştere al valorilor proprii ale problemei Sturm-Liouville 139

Capitolul 6. ECUAŢII ÎN SPAŢII BANACH ŞI ECUAŢII SINGULARE UNIDIMENSIONALE 142
§ 1. Noţiuni introductive 142
§ 2. Teoremele lui Noether 144
§ 3. Teorema de stabilitate a indexului 146
§ 4. Noţiunea de simbol 149
§ 5. Integrala singulară Cauchy 151
§ 6. Operatorul Cauchy în spaţiul $L_2(\Gamma)$ 156
§ 7. Simbolul şi regularizarea unui operator singular. 162
§ 8. Calculul indexului unui operator singular 164

Capitolul 7. ELEMENTE DE TEORIA INTEGRALELOR SINGULARE MULTIDIMENSIONALE 168
§ 1. Transformata Fourier 168
§ 2. Definirea şi condiţiile de existenţă ale integralei singulare 175
§ 3. Teorema lui Giraud 177
§ 4. Transformata Fourier a nucleului singular 183
§ 5. Integrale singulare în L_2 188
§ 6. Diferenţierea integralelor cu singularitate slabă 193

Capitolul 8. ECUAŢII ŞI PROBLEME LA LIMITĂ 198
§ 1. Expresie diferenţială şi ecuaţie diferenţială 198
§ 2. Clasificarea ecuaţiilor de ordinul al doilea 200
§ 3. Condiţii şi probleme la limită 205
§ 4. Problema Cauchy 208
§ 5. Probleme de existenţă, unicitate şi corectitudine pentru probleme la limită 211

Capitolul 9. CARACTERISTICE. FORMA CANONICĂ. FORMULELE LUI GREEN 217
§ 1. Transformarea variabilelor independente 217
§ 2. Caracteristice. Relaţia dintre datele Cauchy pe caracteristice 219
§ 3. Aducerea ecuaţiei de ordinul al doilea la forma canonică 222
§ 4. Expresii diferenţiale formal adjuncte 223
§ 5. Expresii diferenţiale de ordin superior 224
§ 6. Formule Green 224

Capitolul 10. SOLUŢII GENERALIZATE ALE ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE 230
§ 1. Soluţii generalizate local integrabile 230
§ 2. Distribuţii 232
§ 3. Distribuţii de ordin finit 235
§ 4. Soluţii din clasa distribuţiilor. Soluţii fundamentale 236
§ 5. Soluţia fundamentală a ecuaţiei lui Laplace 237
§ 6. Soluţia fundamentală a ecuaţiei căldurii 241
§ 7. Soluţia fundamentală a ecuaţiei undelor 243

Capitolul 11. ECUAŢIA LUI LAPLACE ŞI FUNCŢII ARMONICE 247
§ 1. Noţiuni de bază 247
§ 2. Schimbarea de variabile în operatorul lui Laplace 249
§ 3. Reprezentarea integrală a funcţiilor de clasă $C^{(2)}$ şi a funcţiilor armonice 254
§ 4. Noţiunea de potenţial 257
§ 5. Proprietăţile potenţialului de volum 259
§ 6. Teoreme de medie 263
§ 7. Principiul de maxim 266
§ 8. Subspaţii de funcţii armonice 268

Capitolul 12. PROBLEMELE DIRICHLET ŞI NEUMANN 273
§ 1. Formularea problemei 273
§ 2. Teoreme de unicitate pentru ecuaţia lui Laplace 274
§ 3. Soluţia problemei Dirichlet pentru sferă 279
§ 4. Teorema lui Liouville 285
§ 5. Problema Dirichlet pentru exteriorul sferei. 286
§ 6. Derivatele funcţiei armonice la infinit 287
§ 7. Singularităţi neesenţiale ale funcţiilor armonice 289

Capitolul 13. FUNCŢII SFERICE 291
§ 1. Noţiunea de funcţie sferică 291
§ 2. Ecuaţia diferenţială a funcţiilor sferice 295
§ 3. Notaţii şi construcţii auxiliare 296
§ 4. Operatorul δ şi puterile lui. Ortogonalitatea funcţiilor sferice 297
§ 5. Dezvoltarea soluţiei fundamentale în serie de polinoame 299
§ 6. Ecuaţia integrală a funcţiilor sferice 304
§ 7. Completitudinea sistemului funcţiilor sferice 306

Capitolul 14. TEORIA POTENȚIALULUI 310
§ 1. Suprafețe Liapunov 310
§ 2. Unghi solid 312
§ 3. Valoarea primară a potențialului de dublu strat 319
§ 4. Integrala lui Gauss 321
§ 5. Valori limită ale potențialului de dublu strat 324
§ 6. Continuitatea potențialului de simplu strat 327
§ 7. Derivata normală a potențialului de simplu strat 330

Capitolul 15. ECUAȚII INTEGRALE ALE TEORIEI POTENȚIALULUI 336
§ 1. Reducerea problemelor Dirichlet și Neumann la ecuații integrale 336
§ 2. Problemele Dirichlet și Neumann pentru semispațiu 339
§ 3. Studiul primei perechi de ecuații adjuncte 341
§ 4. Studiul celei de a doua perechi de ecuații adjuncte 342
§ 5. Rezolvarea problemei Dirichlet exterioară 345
§ 6. Cazul a două variabile independente 348
§ 7. Ecuațiile teoriei potențialului pentru cerc 351

Capitolul 16. PROBLEMA DERIVATEI OBLICE 357
§ 1. Formularea problemei 357
§ 2. Cazul a două variabile. Indexul problemei 358
§ 3. Despre continuitatea soluțiilor 361
§ 4. Un caz particular al problemei derivatei oblice 363
§ 5. Cazul mai multor variabile 368

Capitolul 17. METODA VARIAȚIONALĂ. SOLUȚII SLABE 370
§ 1. Problema Dirichlet cu condiții la limită omogene 370
§ 2. Spațiul energetic al problemei Dirichlet 376
§ 3. Problema Dirichlet pentru ecuația omogenă 381
§ 4. Derivatele de ordinul doi ale soluției slabe a ecuației lui Laplace 383
§ 5. Asupra condiției de prelungire 386
§ 6. Funcția Green 389
§ 7. Problema Neumann cu condiții la limită omogene 395
§ 8. Problema Neumann cu condiții la limită neomogene 401
§ 9. Ecuații eliptice de ordin superior; sisteme de ecuații. 405
§ 10. Problema Dirichlet pentru domenii nemărginite 407

Capitolul 18. SPECTRUL PROBLEMELOR DIRICHLET ȘI NEUMANN 411
§ 1. Asupra unei teoreme de scufundare 411
§ 2. Spectrul problemei Dirichlet pentru domenii mărginite. 412
§ 3. Cazuri elementare 414
§ 4. Ordinul de creștere al valorilor proprii 417
§ 5. Spectrul problemei Neumann pentru domenii mărginite 420
§ 6. Despre ecuații neautoadjuncte 421
§ 7. Problemele Dirichlet și Neumann pentru ecuațiile eliptice neautoadjuncte 424

Capitolul 19. SOLUȚII TARI 427
§ 1. Soluția ecuației lui Laplace pentru paralelipiped 427
§ 2. Produsul soluțiilor slabe cu funcții netede 430
§ 3. Soluții tari pentru domenii oarecare 433
§ 4. Condiții la limită neomogene 438
§ 5. Cazul frontierelor suficient de netede 439

Capitolul 20. ECUAȚIA PROPAGĂRII CĂLDURII 442
§ 1. Ecuația propagării căldurii și caracteristicile ei 442
§ 2. Principiul de maxim 444
§ 3. Problema Cauchy și problema mixtă 447
§ 4. Teoreme de unicitate 448
§ 5. Funcții abstracte de variabilă reală 449
§ 6. Soluția slabă a problemei mixte 451

Capitolul 21. ECUAȚIA UNDELOR 453
§ 1. Noțiunea de ecuație a undelor 453
§ 2. Problema mixtă și soluția ei slabă 454
§ 3. Ecuația undelor cu coeficienți constanți. Problema Cauchy. Conul caracteristic 456
§ 4. Teorema de unicitate pentru problema Cauchy. Domeniul de influență 458
§ 5. Fenomenul de propagare a undelor 460

Capitolul 22. METODA FOURIER 463
§ 1. Metoda Fourier pentru ecuația căldurii 463
§ 2. Fundamentarea metodei Fourier 465
§ 3. Despre corectitudinea problemei mixte a ecuației căldurii 469
§ 4. Despre stabilitatea soluțiilor 470
§ 5. Existența soluțiilor clasice 473
§ 6. Cazul cu parte eliptică neautoadjunctă 476
§ 7. Metoda Fourier pentru ecuația undelor 480
§ 8. Justificarea metodei pentru ecuația omogenă 482
§ 9. Justificarea metodei pentru condiții inițiale omogene 486
§ 10. Ecuația coardei vibrante. Condiții de existență a soluțiilor clasice 488

Capitolul 23. PROBLEMA CAUCHY PENTRU ECUAȚIA CĂLDURII . . . 491
§ 1. Formula lui Poisson 491
§ 2. Altă deducere a formulei lui Poisson 496
§ 3. Justificarea formulei lui Poisson 499
§ 4. Despre viteza de propagare a căldurii 504

Capitolul 24. PROBLEMA CAUCHY PENTRU ECUAȚIA UNDELOR 505
§ 1. Utilizarea transformatei Fourier 505
§ 2. Utilizarea soluției fundamentale 507

§ 3. Cazul unui număr impar de coordonate. Generalizarea formulelor lui Kirchhoff 512
§ 4. Frontul de undă posterior 516
§ 5. Justificarea formulei lui Kirchhoff 517
§ 6. Cazul unui număr par de coordonate 520
§ 7. Ecuația coardei vibrante 522
§ 8. Despre corectitudinea problemei Cauchy 524

BIBLIOGRAFIE 525

INDEX ALFABETIC 528

Redactor MARIA BORICEAN
Tehnoredactor C-tin IORDACHE

Coli de tipar: 33,75
Bun de tipar: 15.09.1983

cd. 775 — I. P. Informația,
str. Brezoianu, nr. 23—25,
București